A FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY 10 ÉVE

BOLYAI TEHETSÉGGONDOZÓ GIMNÁZIUM ÉS KOLLÉGIUM
ZENTA, 2013

Szerkesztette: dr. Péics Hajnalka

A feladatokat válogatták és lektorálták:
Béres Zoltán
Csikós Pajor Gizella, magiszter
Zavargó Zsuzsanna
dr. Péics Hajnalka
dr. Ripcó Sipos Elvira
Szabó Magdolna

Az ábrákat készítette:
dr. Ripcó Sipos Elvira

CIP - Каталогизација у публикацији
Библиотека Матице српске, Нови Сад

51(079.1)

A FEKETE Mihály emlékverseny 10 éve [Elektronski izvor] / [szerkesztette Péics Hajnalka; az ábrákat készítette Ripcó Sipos Elvira]. -Zenta : Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, 2013. - 1 elektronski optički disk (CD-ROM) : tekst, slika ; 12 cm

Nasl. sa naslovnog ekrana. - Tiraž 200.

ISBN 978-86-917345-0-3

a) Математика - Задаци
COBBIS.SR-ID 281907719

BEVEZETŐ

A Fekete Mihály Emlékverseny az egyetlen vajdasági szervezésű és szintű matematikaverseny, amelyen csak magyarul tudó diákok vehetnek részt. Ezen a versenyen a tanulók összemérhetik tudásukat társaikkal és ezáltal is felkészülhetnek a hazai és nemzetközi matematikaversenyekre. Ez a verseny egyben a Nemzetközi Magyar Matematikaverseny válogatóversenye. A verseny névadója Fekete (Schwarz) Mihály (1886-1957) zentai születésű matematikus, aki Fejér Lipót tanítványa, Neumann János tanára volt. Legjelentősebb és egyben legismertebb eredményei a ponthalmazok elmélete, az algebra és a komplex függvénytan határterületéhez tartoznak.
A Fekete Mihály Emlékversenyt 2003 óta rendezik meg. Az elsőt az Észak-bácskai Magyar Pedagógusok Egyesületének égisze alatt szervezte Szabó Magda matematikatanár. A verseny ezután átköltözött Szabadkáról Zentára, az újonnan megalakuló Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium helyiségeibe. Ekkor vált a Gimnázium a hivatalos szervezőjévé a Bolyai Farkas Alapítvány közreműködésével. A versenybizottság elnöke minden évben dr. Péics Hajnalka volt, a versenybizottság tagjai pedig 2005 óta a Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium matematikatanárai.
A verseny háromfordulós: a két levelező fordulót a legjobbak megméretéseként egy zárthelyi rendszerű, feladatkidolgozós forduló, a döntő követi, amelyre általában november végén, december elején kerül sor. A döntőben a versenyzőknek 120 perc alatt kell négy feladatot megoldaniuk. A 2003 és 2012 között megrendezett döntők feladatsorait és megoldásait tartja a kezében a kedves Olvasó.
Kezdetben a Verseny csak a középiskolás diákokat szólította meg, de 2009-től a nyolcadikosokat, 2011-től pedig a hetedikeseket is bevontuk a versenybe. Ezzel a bővítéssel a döntő résztvevőinek a száma a százat is meghaladja. A legjobb helyezéseket elért versenyzők és felkészítő tanáraik oklevelet, könyvet és más ajándékokat kapnak. A legjobb általános iskolások ingyenes részvételt nyernek a Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium keretein belül szervezett Téli táborba, míg a legjobb középiskolások alkotják azt a csapatot, amely a vajdasági magyarságot képviseli a Nemzetközi Magyar Matematikaversenyen.
Az Emlékverseny nem csak versenyzésre ad alkalmat, hanem barátkozásra és új ismeretek szerzésére is. Minden évben rangos meghívott tanárok tartanak előadást érdekes matematikai témákról.
A Versenyen való részvétel a támogatóinknak köszönhetően ingyenes. Ezúton mondunk köszönetet a Bolyai Tehetséggondozó Gimnáziumnak és Kollégiumnak a logisztikai, a Bolyai Farkas Alapítványnak a pályázástechnikai segítségéért, a Szekeres László Alapítványnak, a Magyar Nemzeti Tanácsnak és a Zentai Önkormányzatnak az anyagi támogatásért, a Szegedi Egyetem Bolyai Intézetének pedig a felajánlott ajándékkönyvekért.
A Fekete Mihály Emlékversennyel való törődés szakmai kötelességünk, ez késztetett bennünket ezen összeállítás elkészítésére is. Reméljük, e kiadvány hozzájárul ahhoz, hogy a diákok tanáraik segítségével minél sikeresebben tudjanak készülni és részt venni a Fekete Mihály Emlékversenyen, ezzel is továbbemelve annak színvonalát.

2013 novembere

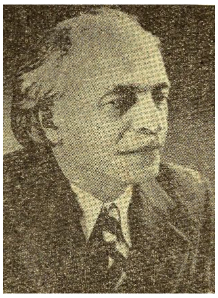
a Szerzők

TARTALOMJEGYZÉK

I. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Előadó: Árki Tamás
Előadás címe: Területszámítás és átdarabolás

Árki Tamás, az előadó, valamint a Versenybizottság tagjai, Szabó Magdolna, Csikós Pajor Gizella, Péics Hajnalka, Béres Zoltán, Zolnai Irén, Mészáros Anna és a versenyzők a Népkörben.



I. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Szabadka, 2004. január 24.

9. évfolyam

1. Egy háromjegyű szám számjegyei különbözőek és nincs közöttük nulla. A számjegyek összege az n állandó. Bizonyítsd be, hogy a három számjegyből az összes lehetséges módon képezhető háromjegyű számok számtani közepe osztható 37-tel és n-nel!

2. Hány olyan – legalább kételemű – halmaz van, amelynek elemei egymást követő pozitív egész számok, és a halmaz elemeinek összege 100?

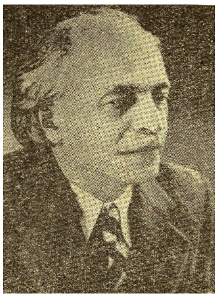
3. Vajon összetett-e a $2003^4 + 4^{2005}$ szám?

4. Az ABC háromszög C csúcsánál derékszög van. A B csúcsból induló szögfelező az AC befogót a P, a háromszög köréírt körét a Q pontban metszi. Mekkorák a háromszög szögei, ha $|BP| = 2|PQ|$?

5. Egy hegyesszögű háromszög területe T. Minden oldal felezőpontjából merőlegest állítunk a másik két oldalra. Mekkora a hat merőleges által közrezárt konvex hatszög területe?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



I. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Szabadka, 2004. január 24.

<u>10. évfolyam</u>

1. Egy $n \times n$-es táblázat minden mezőjére ráírjuk az 1, 2 és 3 számok valamelyikét. Ki lehet-e tölteni a táblázatot úgy, hogy a sorokban, az oszlopokban és a két átlóban levő számok összege mind különböző legyen?

2. Határozd meg a $2x^2 - 8xy + 17y^2 - 16x - 4y + 2072$ kifejezés legkisebb értékét, ha x és y tetszőleges valós számok!

3. Az $|AB| = 1$ átmérőjű félkörbe olyan $ABCD$ trapézt szerkesztettünk, amely érintőnégyszög is. Mekkora a trapéz két szára?

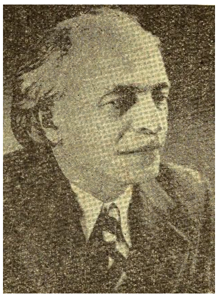
4. Legyenek d_1, d_2 és d_3 egy hegyesszögű háromszög magasságpontját a csúcsokkal összekötő szakaszok. Igazold, hogy $d_1 + d_2 + d_3 > k$, ahol k a magasságok talppontjai által meghatározott háromszög kerületét jelöli!

5. Határozd meg a következő egyenlőtlenségrendszer összes megoldását a pozitív valós számok halmazán:

$$x_1 + \frac{1}{x_2} \le 2,\ x_2 + \frac{1}{x_3} \le 2,\ \cdots,\ x_{2003} + \frac{1}{x_{2004}} \le 2,\ x_{2004} + \frac{1}{x_1} \le 2.$$

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



I. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Szabadka, 2004. január 24.

11. évfolyam

1. Bizonyítsd be, hogy az $f(x)=(m+1)x^2-2(m-1)x+m-5$ függvény grafikonja az m valós paraméter bármely értékére ugyanazon a ponton halad keresztül! Határozd meg ennek a pontnak a koordinátáit!

2. Határozd meg az összes olyan pozitiv x, y, z számokból álló számhármast, amelyekre teljesül a következő két egyenlőség:

$$x^3+3y^3+z^5+z=1998 \text{ és } y^2z=x.$$

3. Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja A_1, az AB oldalának felezőpontja C_1, S pedig a háromszög súlypontja. Mekkorák a háromszög szögei, ha

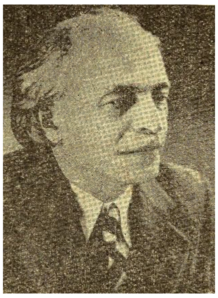
$$CAA_1\angle=CC_1A_1\angle \text{ és } A_1SC_1\angle=BAC\angle+ACB\angle\text{?}$$

4. Az ABC háromszög belsejében lévő P pontra igaz, hogy $PAB\angle=PBC\angle=PCA\angle$. Mivel egyenlő a $PAB\angle$ szög tangensének értéke, ha $|AB|=13$, $|BC|=14$ és $|AC|=15$?

5. Bizonyítsd be, hogy ha egy tetraéder súlypontja mind a négy csúcstól egyenlő távolságra van, akkor bármely két szemközti élpár felezőpontjait összekötő szakasz merőleges mindkét élre!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



I. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Szabadka, 2004. január 24.

12. évfolyam

1. Oldd meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$x^4 - x^3y - xy^3 + y^4 = 1.$$

2. Egy nem állandó számtani sorozat első két tagjának összege és szorzata egyenlő egymással. Az első három tag összege és szorzata is egyenlő. Határozd meg a számtani sorozat első négy tagjának az összegét!

3. Az $ABCD$ trapéz csúcsai a k körre illeszkednek. A trapéz AD és BC szárainak meghosszabításai az M pontban metszik egymást. A k körhöz a B, illetve D pontokban húzott érintők metszéspontja N. Bizonyítsd be, hogy MN párhuzamos AB-vel!

4. Az a élű $ABCDEFGH$ kockában mekkora az $ADCH$ és a $BCDG$ tetraéderek közös részét képező test felszíne és térfogata?

5. Legyen A a tízes számrendszerben felírt 2003^{2005} szám számjegyeinek összege, B pedig az A számjegyeinek összege. Számítsd ki a B szám számjegyeinek összegét!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

AZ I. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

9. évfolyam

1. Egy háromjegyű szám számjegyei különbözőek és nincs közöttük nulla. A számjegyek összege az n állandó. Bizonyítsd be, hogy a három számjegyből az összes lehetséges módon képezhető háromjegyű számok számtani közepe osztható 37-tel és n-nel!

Megoldás. Jelölje a háromjegyű szám számjegyeit a, b és c. Ekkor $a+b+c=n$, a képezhető hat szám pedig a következő:

$$\overline{abc}=100a+10b+c, \qquad \overline{bca}=100b+10c+a,$$
$$\overline{acb}=100a+10c+b, \qquad \overline{cab}=100c+10a+b,$$
$$\overline{bac}=100b+10a+c, \qquad \overline{cba}=100c+10b+a.$$

A számok számtani közepe:

$$S=\frac{222a+222b+222c}{6}=37(a+b+c)=37n.$$

Tehát S osztható 37-tel és n-nel.

2. Hány olyan – legalább kételemű – halmaz van, amelynek elemei egymást követő pozitív egész számok, és a halmaz elemeinek összege 100?

Megoldás. 1.eset: a feltételeknek eleget tevő H halmaz elemeinek száma páratlan, azaz $2n+1$, $n\in N$. H elemeinek átlagát jelöljük x-szel, ez a középső egész szám. Most $(2n+1)x=100$, tehát $2n+1$ csak 5 vagy 25 lehet.

Ha $2n+1=5$, akkor $n=2$, $x=20$, $H=\{18,19,20,21,22\}$.

Ha $2n+1=25$, akkor $n=12$, $x=4$, ami lehetetlen, mert H elemei pozitívak.

2.eset: a H halmaz elemeinek száma páros, azaz $2n$, $n\in N$. H elemeinek x átlaga most a két középső szám számtani közepe. Így $2nx=100$, tehát $2x=\frac{100}{n}\in N$, de $x=\frac{50}{n}$ már nem egész. n a 4 szóbajövő többszöröse lehet: 4, 20 vagy 100. Ha $n=4$, akkor $x=12,5$; $H=\{9,10,11,12,13,14,15,16\}$. Ha $n=20$ vagy $n=100$, akkor nincs alkalmas H halmaz.

Összefoglalva: két olyan halmaz van, amely a feltételeknek eleget tesz.

3. Vajon összetett-e a 2003^4+4^{2005} szám?

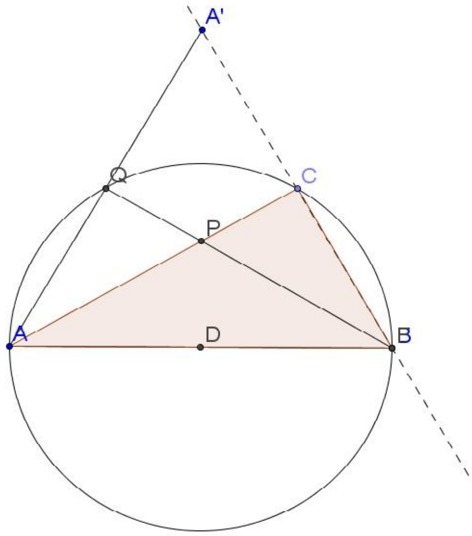
Megoldás. Végezzük el a következő átalakításokat:

$$2003^4+4^{2005}=\left(2003^2\right)^2+\left(2^{2005}\right)^2=\left(2003^2+2^{2005}\right)^2-2^{2006}\cdot 2003^2=$$
$$=\left(2003^2+2^{2005}\right)^2-\left(2^{1003}\cdot 2003\right)^2=$$
$$=\left(2003^2+2^{2005}-2^{1003}\cdot 2003\right)\cdot\left(2003^2+2^{2005}+2^{1003}\cdot 2003\right)$$

Mivel két négyzetszám különbségét kaptuk, ez nyilván két – egynél nagyobb és egész – szám szorzata, tehát összetett szám.

4. Az ABC háromszög C csúcsánál derékszög van. A B csúcsból induló szögfelező az AC befogót a P, a háromszög köréírt körét a Q pontban metszi. Mekkorák a háromszög szögei, ha

$$|BP| = 2|PQ| ?$$

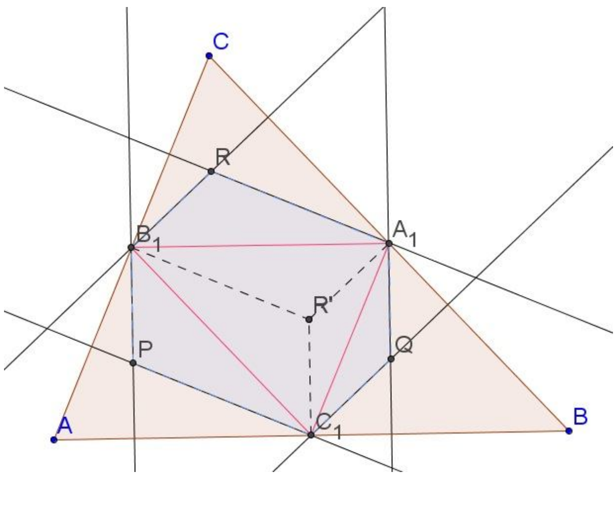


Megoldás. A $CBA\angle$ BQ szögfelezőjére az A pontot tükrözve A' pontot kapunk, és nyilvánvaló, hogy A' rajta van BC-n és $AB = A'B$.
Mivel $|BP| = 2|PQ|$ miatt a P pont az $ABA'\Delta$ súlypontja, AC súlyvonala és $|BA| = |AA'|$ is teljesül. Így $ABA'\Delta$ egyenlőoldalú, tehát az $ABC\Delta$ hegyesszögei: $60°$ és $30°$.

5. Egy hegyesszögű háromszög területe T. Minden oldal felezőpontjából merőlegest állítunk a másik két oldalra. Mekkora a hat merőleges által közrezárt konvex hatszög területe?

Megoldás. Tekintsük az ABC háromszöget, és jelölje A_1, B_1 és C_1, rendre az ABC háromszög A, B és C csúcsaival szemben fekvő oldalainak középpontjait. Legyen továbbá P a B_1 pontból AB oldalra állított merőleges és a C_1 pontból AC oldalra állított merőleges metszéspontja, Q az A_1 pontból AB oldalra állított merőleges és a C_1 pontból BC oldalra állított merőleges metszéspontja, R pedig a B_1 pontból BC oldalra állított merőleges és az A_1 pontból AC oldalra állított merőleges metszéspontja. Az ABC háromszöget a középvonalai négy egybevágó háromszögre bontják, a meghúzott merőlegesek ezekben a háromszögekben magasságvonalak. Így a PB_1C_1, QA_1C_1 és RB_1A_1 háromszögekből összerakható egy az $A_1B_1C_1$ háromszöggel egybevágó, $\frac{T}{4}$ területű háromszög.

Így a hatszög területe $\frac{T}{2}$.



10. évfolyam

1. Egy $n \times n$-es táblázat minden mezőjére ráírjuk az 1, 2 és 3 számok valamelyikét. Ki lehet-e tölteni a táblázatot úgy, hogy a sorokban, az oszlopokban és a két átlóban levő számok összege mind különböző legyen?

Megoldás. Az $n \times n$-es táblázatnak n sora és n oszlopa valamint 2 átlója van, tehát összesen $2n+2$ különböző összeget kell kapnunk. Minden összeg n tagú, a legkisebb n darab 1-est, a legnagyobb n darab 3-ast tartalmaz, vagyis az előforduló lehetséges összegek n és $3n$ között mozognak (beleértve a határokat is). Ez összesen $2n+1$ szám. Tehát a skatulya elv alapján nem lehetséges a $2n+2$ különböző összeget előállítani a $2n+1$ lehetséges összegből.

2. Határozd meg a $2x^2 - 8xy + 17y^2 - 16x - 4y + 2072$ kifejezés legkisebb értékét, ha x és y tetszőleges valós számok!

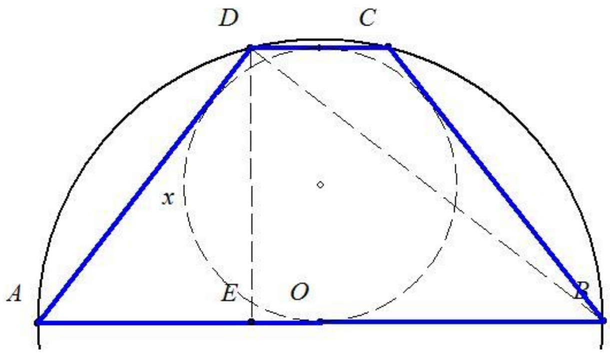
Megoldás. Végezzük el a következő átalakításokat:

$$2x^2 - 8xy + 17y^2 - 16x - 4y + 2072 = 2(x-2y-4)^2 + 9(y-2)^2 + 1994 \geq 1994$$

minden $x, y \in R$ esetén. Az 1994 értéket fel is veszi $x = 8$ és $y = 2$ esetén.

3. Az $|AB| = 1$ átmérőjű félkörbe olyan $ABCD$ trapézt szerkesztettünk, amely érintőnégyszög is. Mekkora a trapéz két szára?

Megoldás. Az *ABCD* trapéz egyenlő szárú, mert húrnégyszög. *AD* szárának hossza legyen *x*, és legyen a *D* csúcs merőleges vetülete az *AB* szakaszra *E* pont. Ekkor az $AED\Delta$ és $ADB\Delta$ derékszögű háromszögek hasonlósága miatt $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AD|}$, vagyis $|AE| = x^2$, így $|CD| = |AB| - 2 \cdot |AE| = 1 - 2x^2$.



Mivel *ABCD* érintőnégyszög is, ezért $|AB| + |CD| = 2 \cdot |AD|$, azaz $1 + \left(1 - 2x^2\right) = 2x$, vagyis $x^2 + x - 1 = 0$, megoldásaiból csak a pozitív lehetséges, tehát $x = |AD| = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

4. Legyenek d_1, d_2 és d_3 egy hegyesszögű háromszög magasságpontját a csúcsokkal összekötő szakaszok. Igazold, hogy $d_1 + d_2 + d_3 > k$, ahol k a magasságok talppontjai által meghatározott háromszög kerületét jelöli.

I.Megoldás. Tekintsük az ABC háromszöget, amelyben a A_1 az A csúcsból kiinduló, B_1 a B csúcsból kiinduló, C_1 a C csúcsból kiinduló magasságvonal talppontja, M pedig a magasságvonalak metszéspontja. Ekkor $d_1 = |MC|$, $d_2 = |MB|$ és $d_3 = |MA|$. Thálész tétele szerint MC a CA_1MB_1 négyszög köré írt kör átmérője, A_1B_1 pedig húrja. Mivel a háromszög hegyesszögű, így $d_1 > |A_1B_1|$.

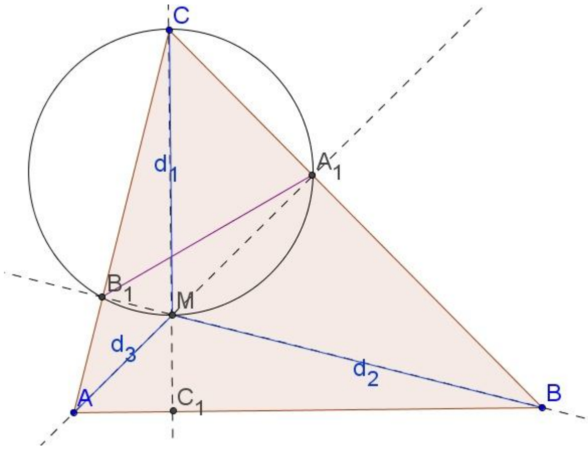
Hasonlóan belátható, hogy

$$d_2 > |A_1C_1| \text{ és } d_3 > |B_1C_1|.$$

Az egyenlőtlenségek összevonásával kapjuk, hogy

$d_1 + d_2 + d_3 > |A_1B_1| + |A_1C_1| + |B_1C_1| = k$,

amit bizonyítani kellett.



II.Megoldás. Az AMB, BMC és CMA háromszögekben a háromszög egyenlőtlenségeket felírva kapjuk, hogy $d_2 + d_3 > c$, $d_1 + d_2 > a$ és $d_1 + d_3 > b$. Ebből

$$d_1 + d_2 + d_3 > \frac{1}{2}(a + b + c).$$

Mivel $\frac{1}{2}(a + b + c)$ az oldalak felezőpontjai által meghatározott háromszög kerülete, ezért nem lehet kisebb, mint a talpponti háromszög kerülete, amely az összes beírt háromszögek kerületei közt a minimális, így $d_1 + d_2 + d_3 > k$ **.**

5. Határozd meg a következő egyenlőtlenségrendszer összes megoldását a pozitív valós számok halmazán:

$$x_1 + \frac{1}{x_2} \le 2, \; x_2 + \frac{1}{x_3} \le 2, \; \cdots, \; x_{2003} + \frac{1}{x_{2004}} \le 2, \; x_{2004} + \frac{1}{x_1} \le 2.$$

Megoldás. Az egyenlőtlenségek összeadása és rendezése után azt kapjuk, hogy

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + \cdots + \left(x_{1998} + \frac{1}{x_{1998}}\right) \le 1998 \cdot 2.$$

Mivel pozitív x esetén $\left(x + \frac{1}{x}\right) \ge 2$, és egyenlőség csak $x = 1$ esetén áll fenn, ezért a fenti egyenlőtlenség csak egyenlőséggel teljesülhet, és csak akkor, ha

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{1998} = 1.$$

Ez valóban megoldás is.

11. évfolyam

1. Bizonyítsd be, hogy az $f(x)=(m+1)x^2-2(m-1)x+m-5$ függvény grafikonja az m valós paraméter bármely értékére ugyanazon a ponton halad keresztül! Határozd meg ennek a pontnak a koordinátáit!

Megoldás. Ha van olyan $\left(x_0, f(x_0)\right)$ pont, hogy bármely m-re

$$f(x_0)=(m+1)x_0^2-2(m-1)x_0+m-5=m(x_0^2-2x_0+1)+x_0^2+2x_0-5$$

állandó, ez csak $x_0^2-2x_0+1=0$ esetén lehetséges. Ekkor $x_0=1$ és $f(x_0)=-2$, így az $(1;-2)$ ponton valóban bármely m-re áthalad a függvény grafikonja.

2. Határozd meg az összes olyan pozitiv x, y, z számokból álló számhármast, amelyekre teljesül a következő két egyenlőség:

$$x^3+3y^3+z^5+z=1998 \textbf{ és } y^2z=x.$$

Megoldás. A feltételt kielégítő számokra fennáll, hogy

$$y^6z^3+3y^3+z^5+z=1998, \text{ tehát } y^3=\frac{-3\pm\sqrt{9-4z^3(z^5+z-1998)}}{2z^3}.$$

z értéke csak 1, 2, 3 vagy 4 lehet, mert $z>4$ esetén $z^5+z>1998$ miatt a négyzetgyök alatt negatív szám áll.
Ezek közül csak $z=3$-ra lesz y pozitív egész, ekkor $y=2$ és $x=12$. A $(12;2;3)$ számhármas valóban megoldás.

3. Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja A_1, az AB oldalának felezőpontja C_1, S pedig a háromszög súlypontja. Mekkorák a háromszög szögei, ha

$$CAA_1\angle=CC_1A_1\angle \textbf{ és } A_1SC_1\angle=BAC\angle+ACB\angle\textbf{?}$$

Megoldás. Vezessük be a $CAA_1\angle=\alpha$ jelölést. Ekkor $CC_1A_1\angle=\alpha$ és így $AC \parallel A_1C_1$ miatt

$$ACC_1\angle=AA_1C_1\angle=\alpha.$$

Mivel az ACA_1C_1 négyszög körbe írható,

$$A_1CC_1\angle=A_1AC_1\angle=\beta.$$

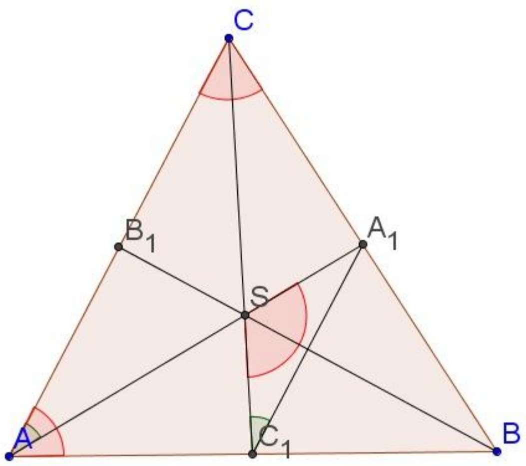
$$A_1SC_1\angle=BCA\angle+CAB\angle$$

miatt

$$180°-2\alpha=2\alpha+2\beta,$$

$$AC_1C\angle=180°-(2\alpha+\beta)=90°.$$

Így $\alpha=\beta=30°$, az ABC háromszög minden szöge pedig $60°$.



4. Az ABC háromszög belsejében lévő P pontra igaz, hogy $PAB\angle = PBC\angle = PCA\angle$. Mivel egyenlő a $PAB\angle$ szög tangensének értéke, ha $|AB|=13$, $|BC|=14$ és $|AC|=15$?

Megoldás. Legyen $PAB\angle = \varphi$, $|PA|=x$, $|PB|=y$ és $|PC|=z$. Ekkor a háromszög területe

$$T = \frac{1}{2}\sin\varphi(13x+14y+15z),$$

tehát

$$\sin\varphi = \frac{2T}{13x+14y+15z} = \frac{168}{13x+14y+15z},$$

mert a Héron képlet alapján $T=84$.

Írjuk fel a PAB, PBC és PCA háromszögekre a koszinusz tételt:

$$y^2 = 13^2 + x^2 - 26x\cos\varphi,$$
$$z^2 = 14^2 + y^2 - 28y\cos\varphi,$$
$$x^2 = 15^2 + z^2 - 30z\cos\varphi.$$

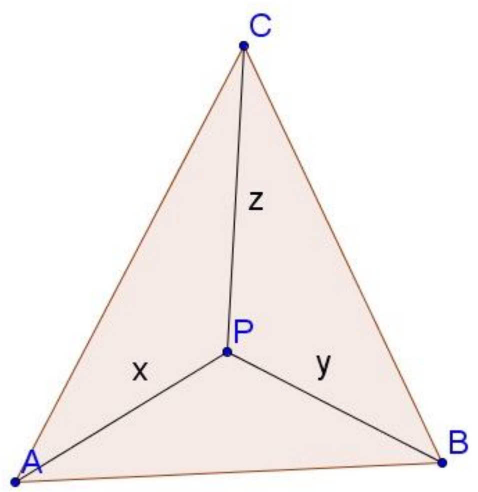
Ezeket összeadva: $13^2+14^2+15^2 = (26x+28y+30z)\cos\varphi$.

Rendezve azt kapjuk, hogy

$$\cos\varphi = \frac{13^2+14^2+15^2}{2(13x+14y+15z)},$$

s ebből

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{168}{295}.$$

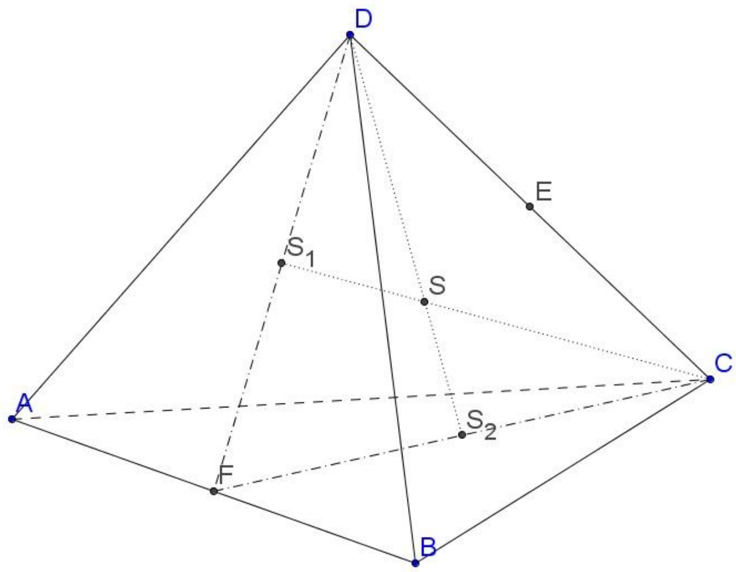


5. Bizonyítsd be, hogy ha egy tetraéder súlypontja mind a négy csúcstól egyenlő távolságra van, akkor bármely két szemközti élpár felezőpontjait összekötő szakasz merőleges mindkét élre!

Megoldás. Legyen az ABC háromszög a tetraéder alaplapja, D pedig a csúcspontja. Jelölje E és F rendre a CD és AB oldalélek középpontját, a CFD háromszögben pedig S_1 és S_2 rendre az FD és CF oldalak középpontját, S pedig a CS_1 és DS_2 szakaszok metszéspontját. Elegendő megmutatni, hogy a CFD háromszög egyenlő szárú, tehát EF ebben a háromszögben az alaphoz tartozó magasságvonal, amiből már következik a feladat állítása. A feltételek alapján $|AS|=|BS|=|CS|=|DS|$, és a súlyvonal tulajdonságai miatt $|SS_1|=|SS_2|$, azaz $|CS_1|=|DS_2|$.

A párhuzamos szelők tétele és a súlyvonal tulajdonsága miatt CDS_1S_2 szimmetrikus trapéz, amiből következik, hogy CFD valóban egyenlő szárú háromszög.

A többi oldalra és a megfelelő felezőpontokat összekötő egyenesekre hasonlóan végezhető el a bizonyítás.



12. évfolyam

1. Oldd meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$x^4 - x^3y - xy^3 + y^4 = 1.$$

Megoldás. Alakítsuk át az egyenlet bal oldalát a következő módon:

$$x^4 - x^3y - xy^3 + y^4 = x^3(x-y) - y^3(x-y) = (x-y)^2(x^2+xy+y^2).$$

Mivel x és y egészek, ezért $(x-y)^2 = 1$ és $x^2+xy+y^2=1$, amiből a két egyenlet kivonása után $xy=0$ következik.
Ha $x=0$, akkor $y=1$ vagy $y=-1$, ha pedig $y=0$, akkor $x=1$ vagy $x=-1$.
Az egyenlet megoldáshalmaza:

$$M = \{(1;0),(-1;0),(0;1),(0;-1)\}.$$

2. Egy nem állandó számtani sorozat első két tagjának összege és szorzata egyenlő egymással. Az első három tag összege és szorzata is egyenlő. Határozd meg a számtani sorozat első négy tagjának az összegét!

Megoldás. Legyen a számtani sorozat első négy tagja $a_1 = a$, a_2, a_3 és a_4. A feltétel szerint $a \neq a_2$, $a + a_2 = aa_2$ és $a + a_2 + a_3 = aa_2a_3$. Ezekből az adatokból nyilvánvaló, hogy $a \neq 0$ és $a \neq 1$, továbbá

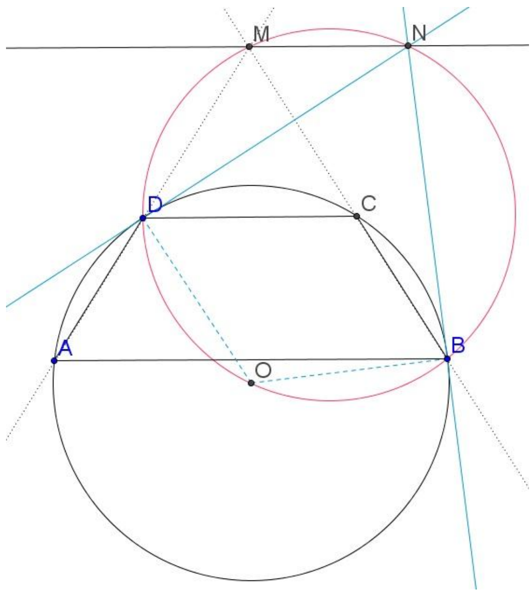
$$a_2 = \frac{a}{a-1} \text{ és } a_3 = \frac{a^2}{a^2-a+1}.$$

A számtani sorozat tulajdonságai alapján $a + a_3 = 2a_2$, amiből az előzőek alapján és rendezéssel megkapjuk, hogy $a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = 2$. Ezt az egyenletet $(a-1)^3 = 2$ alakba írva kapjuk az egyetlen valós megoldást: $a = 1+\sqrt[3]{2}$. A számtani sorozat első négy tagja így:

$$a_1 = 1+\sqrt[3]{2},\ a_2 = \frac{1+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}},\ a_3 = \frac{3}{1+\sqrt[3]{2}},\ a_4 = 2a_3 - a_2 = \frac{6}{1+\sqrt[3]{2}} - 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Az első négy tag összege tehát: $S_4 = 1+\sqrt[3]{2} + \dfrac{9}{1+\sqrt[3]{2}}$.

3. Az $ABCD$ trapéz csúcsai a k körre illeszkednek. A trapéz AD és BC szárainak meghosszabításai az M pontban metszik egymást. A k körhöz a B, illetve D pontokban húzott érintők metszéspontja N. Bizonyítsd be, hogy MN párhuzamos AB-vel!



Megoldás. Mivel
$ABD\angle = BDC\angle = CBN\angle$
és $ABD\angle = ACD\angle = MDN\angle$, ezért $BDMN$ húrnégyszög.
Így $NDC\angle = DBC\angle = DNM\angle$, ezért $DC \parallel MN$, ezért $AB \parallel MN$ is teljesül, amit bizonyítani kellett.

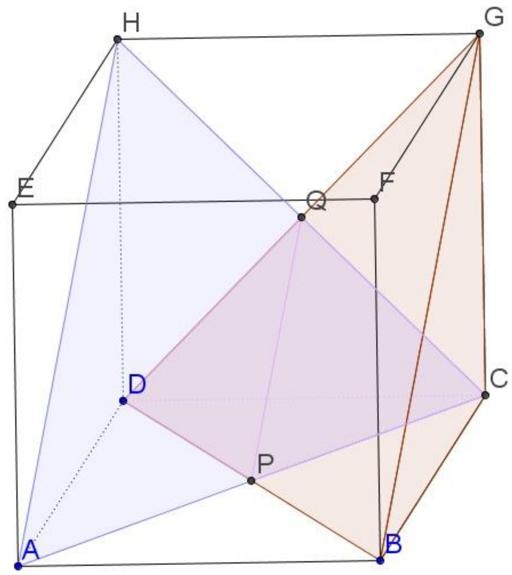
4. Az a élű $ABCDEFGH$ kockában mekkora az $ADCH$ és a $BCDG$ tetraéderek közös részét képező test felszíne és térfogata?

Megoldás. Legyen az $ABCD$ alaplap középpontja P, a $CGHD$ lap középpontja Q. A két tetraéder közös része a $DPCQ$ tetraéder. A DCP és CQD háromszögek területe egyenként $\frac{a^2}{4}$, a PCQ oldallap területe az ACH szabályos háromszög területének negyede. Tehát a keresett felszín és térfogat:

$$F = 2 \cdot \frac{a^2}{4} + 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{8} = \frac{(2+\sqrt{3})a^2}{4}$$

és

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{24}.$$



5. Legyen A a tízes számrendszerben felírt 2003^{2005} szám számjegyeinek összege, B pedig az A számjegyeinek összege. Számítsd ki a B szám számjegyeinek összegét!

Megoldás. Jelöljük a 2003^{2005} számot N-nel, a B jegyeinek az összegét C-vel. Ha a „$\to$” jel a „számjegyeinek az összege” kapcsolatot jelöli, akkor a feladat szerint

$$N \to A \to B \to C,$$

ahol a C értékét kell kiszámolnunk.

Mivel tudjuk, hogy egy szám és a szám számjegyeinek az összege 9-cel osztva ugyanazt a maradékot adja, így a fenti láncon végigfutva N és C a kilencnek ugyanabba a maradékosztályába esik.

A 2003 első hat hatványának 9-es maradékai rendre 5, 7, 8, 4, 2, 1, és a további hatványozások során ezek a maradékok ismétlődnek ebben a sorrendben. (Ez utóbbi állítás binomiális képlettel vagy matematikai indukcióval is bizonyítható). Ezek alapján a 2003 hattal osztható kitevőjű hatványai kilenccel osztva 1-est adnak maradékul (például a 2004 kitevőjű), a rákövetkező pedig 5-öst. Ezek alapján az N, és így a C is a 9-esnek az 5-ös maradékosztályába tartozik.

A továbbiakban becsüljük felül a keletkező összegeket. Az

$$N = 2003^{2005} < 10000^{2005} = 10^{8020},$$

vagyis N legfeljebb 8020 jegyű, így számjegyeinek összege: $A \le 9 \cdot 8020 = 72180$. A 72180-nál kisebb számjegyek összege biztosan kisebb, mint $7+9+9+9+9=43$, azaz $B < 43$. A 43-nál kisebb számok számjegyeinek összege a 39 esetében a legnagyobb, 12, így $C \le 12$.

Így tehát a C egy tizenkettőnél nem nagyobb szám, amely 9-cel osztva 5-öt ad maradékul, azaz $C = 5$.

AZ I. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

9. évfolyam

1. Takács Árpád, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **I. díj**
2. Lakatos Zoltán, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **I. díj**
3. Döme Zsolt, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Csizmadia Zsolt, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
5. Somogyi Huba, Műszaki Középiskola, Szabadka, **II. díj**
6. Varga Dávid, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**
7. Grósz Tímea, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**
8. Raffai Zsolt, Zentai Gimnázium, Zenta, **III. díj**
9. Dósa Szilvia, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**

10. évfolyam

1. Sóti Valentin, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **II. díj**
2. Oláh Attila, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **II. díj**
3. Ficinger Viktor, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **III. díj**
4. Ladócki Janka, Zentai Gimnázium, Zenta, **III. díj**

11. évfolyam

1. Nagy Alfréd, Dositej Obradović Gimnázium, Topolya, **III. díj**
2. Hallgató Emese, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**

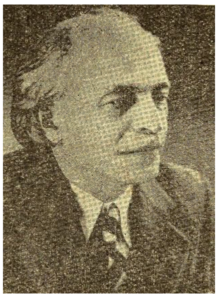
12. évfolyam

1. Jungábel Éva, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**

II. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Előadó: dr. Kosztolányi József
Előadás címe: Számelméleti érdekességek

A Versenybizottság elnöke, Péics Hajnalka aláírja az okleveleket.



II. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2005. január 29.

<u>9. évfolyam</u>

1. Oldd meg a pozitív egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$y^3 - x^3 = 21.$$

2. Bizonyítsd be, hogy 6 osztója $n^2 + 5$ **-nek, ha** n **páratlan és 3-mal nem osztható egész szám!**

3. Igazold, hogy ha a**,** b **és** c **különböző pozitív számok és** $a + b + c = 1$**, akkor**

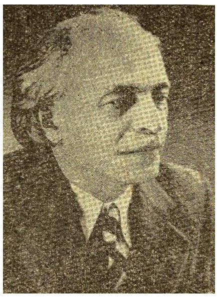
$$(1-a)(1-b)(1-c) > 8abc.$$

4. Hány négyzet látható egy 8×8 **-as sakktáblán? Hány olyan téglalap van, amely nem négyzet?**

5. Egy derékszögű háromszög befogói $28\ \mathrm{cm}$ **és** $45\ \mathrm{cm}$ **hosszúságúak. Határozd meg a háromszög beírható és köréírható körei középpontjainak távolságát!**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



II. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2005. január 29.

10. évfolyam

1. Oldd meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}.$$

2. Oldd meg a következő egyenlőtlenséget:

$$(1+x)^2<\sqrt{(1-x^2)^2}\ .$$

3. Adott területű derékszögű háromszögek közül melyiknek legkisebb az átfogója?

4. Igaz-e, hogy

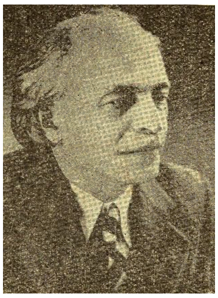
$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1\,?$$

5. Egy háromszög szögeinek mértékei számtani sorozatot alkotnak. Határozd meg ezeknek a szögeknek a mértékét külön-külön, ha tudjuk, hogy színuszaik összege

$$\frac{3+\sqrt{3}}{2}.$$

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



II. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2005. január 29.

11. évfolyam

1. Oldd meg a következő egyenletet:

$$4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x .$$

2. Bizonyítsd be, hogy ha a, b és c egy háromszög oldalhosszúságai, akkor

$$abc > (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) .$$

3. Igazold, hogy minden valós x értékre teljesül a következő reláció:

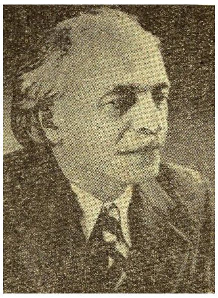
$$x^4 + 1 \geq 2x(x^2 - x + 1) .$$

4. A Pitagorasz tétel szerint, bármely derékszögű háromszög befogóira rajzolt négyzetek területének összege egyenlő az átfogóra rajzolt négyzet területével. Igaz-e a tétel következő általánosítása: bármely derékszögű háromszög befogóira rajzolt szabályos n-szögek ($n \geq 3$) területének összege egyenlő az átfogóra rajzolt szabályos n-szög területével.

5. Az $ABCDA'B'C'D'$ egységnyi élű kocka AC' testátlójának mely P pontjára teljesül, hogy $APC\angle = 60°$?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



II. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2005. január 29.

12. évfolyam

1. Oldd meg a következő egyenletet a nemnegatív egész számok halmazán:

$$x^{y+1} = (x+1)^y \text{.}$$

2. Igazold, hogy bármely négyzetszámot 16-tal osztva négyzetszámot kapunk maradékul!

3. Határozd meg az f függvény szélsőértékeit, ha

$$f(x) = \frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5}\text{, } x \in \mathrm{R}\text{.}$$

4. Adott a síkban n egyenes. Legalább, illetve legfeljebb hány részre osztja fel a síkot az n egyenes?

5. Bizonyítsd be, hogy ha a háromszög S súlypontján és beírható körének O középpontján áthaladó egyenes párhuzamos a háromszög valamely oldalával, akkor a háromszög oldalainak mérőszámai számtani sorozatot alkotnak!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

A II. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

9. évfolyam

1. Oldd meg a pozitív egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$y^3 - x^3 = 21.$$

Megoldás. Az egyenletnek csak olyan (x, y) pozitív egész számokból álló számpár lehet a megoldása, amelyre $y > x$. Alkalmazva az ismert azonosságot adódik, hogy

$$(y-x)(y^2+xy+x^2)=21.$$

A 21 két pozitív szám szorzatára a következő módon bontható:

a)	$y-x=1$	$y^2+xy+x^2=21$
b)	$y-x=3$	$y^2+xy+x^2=7$
c)	$y-x=7$	$y^2+xy+x^2=3$
d)	$y-x=21$	$y^2+xy+x^2=1$

A c) és d) esetek nem lehetségesek, hiszen a pozitív egész számok halmazán $y^2+xy+x^2>3$. (Az egyenlőség $y>x$ miatt nem teljesülhet.)

Tekintsük az a) esetet: $y-x=1$ és $y^2+xy+x^2=21$. Mivel $y=x+1$, ezért $(x+1)^2+x(x+1)+x^2=21$, azaz $3x^2+3x=20$. A bal oldal osztható 3-mal, a jobb nem, tehát ebben az esetben nincs megoldás.

Tekintsük a b) esetet: $y-x=3$ és $y^2+xy+x^2=7$. Mivel $y=x+3$, ezért $(x+3)^2+x(x+3)+x^2=7$, azaz $3x^2+9x+9=7$, ami szintén nem teljesülhet egyetlen x pozitív egész számra sem. Az egyenletnek a pozitív egész számok halmazán tehát nincs megoldása.

2. Bizonyítsd be, hogy 6 osztója n^2+5-nek, ha n páratlan és 3-mal nem osztható egész szám!

Megoldás. Bármely n egész szám a következő alakok valamelyikében írható fel:

$$n=\begin{cases}6k\\6k+1\\6k+2\\6k+3\\6k+4\\6k+5\end{cases} \quad (k \text{ egész szám}), \text{ viszont } n=\begin{cases}6k+1\\6k+3\\6k+5\end{cases} \quad (k \text{ egész szám})$$

páratlan n esetén adja a megmaradó lehetőségeket.

Mivel n nem osztható 3-mal, ezért $n=\begin{cases}6k+1\\6k+5\end{cases}$ (k egész szám) lehetséges.

Ha $n=6k+1$, akkor $n^2+5=36k^2+12k+1+5=36k^2+12k+6$. Mivel az összeg minden tagja osztható 6-tal, ezért az összeg is ilyen tulajdonságú.

Ha $n=6k+5$, akkor $n^2+5=36k^2+60k+25+5=36k^2+60k+30$, ami szintén osztható 6-tal.

3. Igazold, hogy ha a, b és c különböző pozitív számok és $a+b+c=1$, akkor

$$(1-a)(1-b)(1-c)>8abc\,.$$

Megoldás. Tekintsük a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalán álló szorzat tényezőit és az $a+b+c=1$ feltételt, amiből

$$1-a=b+c,\ 1-b=a+c \text{ és } 1-c=a+b\,.$$

Ezt felhasználva azt kell igazolni, hogy

$$(b+c)(a+c)(a+b)>8abc\,.$$

Osszuk el mindkét oldalt 8-cal és hajtsunk végre egy célszerű átalakítást:

$$\frac{b+c}{2}\cdot\frac{a+c}{2}\cdot\frac{a+b}{2}>abc\,.$$

A bal oldalon álló tényezők számtani közepek, amelyek a megfelelő mértani közepekkel az alábbi relációban vannak:

$$\frac{b+c}{2}>\sqrt{bc}\,,\ \frac{a+c}{2}>\sqrt{ac} \text{ és } \frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}\,, \text{ így}$$

$$\frac{b+c}{2}\cdot\frac{a+c}{2}\cdot\frac{a+b}{2}>\sqrt{bc}\cdot\sqrt{ac}\cdot\sqrt{ab}\,,$$

ami egyenértékű a bizonyítandó egyenlőtlenséggel:

$$\frac{b+c}{2}\cdot\frac{a+c}{2}\cdot\frac{a+b}{2}>\sqrt{a^2b^2c^2}=abc\,.$$

4. a) Hány négyzet látható egy 8×8-as sakktáblán?
b) Hány olyan téglalap van, amely nem négyzet?

Megoldás. a) A lehetséges négyzeteket soroljuk osztályokba aszerint, hogy hány egység a négyzet oldala. (A „legkisebb" négyzetek oldalait tekintjük egységnek.)

1 egység oldalú négyzetek száma: $8^2=64$.

2 egység oldalú négyzetek száma: $7^2=49$, mert a bal felső sarokban tekintett 2×2-es négyzetnek $7\cdot7$ „elmozdulása" lehetséges.

3 egység oldalú négyzetek száma: $6^2=36$, mert a bal felső sarokban tekintett 3×3-as négyzetnek $6\cdot6$ „elmozdulása" lehetséges.

Az eljárást folytatva azt kapjuk, hogy 8 egységnyi oldalú négyzet pontosan egy van. A négyzetek száma tehát: $8^2+7^2+6^2+5^2+4^2+3^2+2^2+1^2=204$.

b) (I) Nevezzük az olyan téglalapot, amelynek két vízszintes oldala m egység, két függőleges oldala n egység (m,n) típusúnak, ahol $1\le m\le8$, $1\le n\le8$ és $m\ne n$. Rövid meggondolás után világos, hogy az (m,n) típusú téglalapok száma $(9-m)\cdot(9-n)$. Számláljuk össze a lehetséges típusú téglalapok számát:

$$\begin{aligned}
(1,n):&\quad 8\cdot(1+2+3+4+5+6+7)=8\cdot28=224\\
(2,n):&\quad 7\cdot(1+2+3+4+5+6+8)=7\cdot29=203\\
(3,n):&\quad 6\cdot(1+2+3+4+5+7+8)=6\cdot30=180\\
(4,n):&\quad 5\cdot(1+2+3+4+6+7+8)=5\cdot31=155\\
(5,n):&\quad 4\cdot(1+2+3+5+6+7+8)=4\cdot32=128\\
(6,n):&\quad 3\cdot(1+2+3+4+5+7+8)=3\cdot33=99\\
(7,n):&\quad 2\cdot(1+3+4+5+6+7+8)=2\cdot34=68\\
(8,n):&\quad 1\cdot(2+3+4+5+6+7+8)=1\cdot35=35
\end{aligned}$$

Azon téglalapok száma, amelyek nem négyzetek:

$$224+203+180+155+128+99+68+35=1092\,.$$

b) (II) Összeszámláljuk a sakktáblán látható téglalapok számát. Ez a szám tartalmazza a négyzetek számát is. Az így kapott számból levonva a négyzetek számát, magkapjuk azon téglalapok számát, amelyek nem négyzetek. Alkalmazva az (I)-ben látott számlálási eljárást azzal a módosítással, hogy $m=n$ is lehetséges, a következőt kapjuk:

$$
\begin{aligned}
(1,n):&\quad 8\cdot(1+2+3+4+5+6+7+8)=8\cdot 36\\
(2,n):&\quad 7\cdot(1+2+3+4+5+6+7+8)=7\cdot 36\\
&\quad \vdots\\
(8,n):&\quad 1\cdot(1+2+3+4+5+6+7+8)=1\cdot 36
\end{aligned}
$$

A téglalapok száma: $36^2=1296$, azon téglalapok száma pedig, amelyek nem négyzetek: $1296-204=1092$.

5. Egy derékszögű háromszög befogói 28 cm **és** 45 cm **hosszúságúak. Határozd meg a háromszög beírható és köréírható körei középpontjainak távolságát!**

I.Megoldás. Tekintsük az ABC derékszögű háromszöget, ahol $ACB\angle=90°$. Legyen F a háromszög köréírható körének, O pedig a háromszög beírható körének középpontja. Húzzunk az F ponton keresztül (ez nyilván az átfogó felezőpontja) párhuzamost a háromszög AC befogójával, az O ponton keresztül pedig párhuzamost a háromszög BC befogójával. Legyen a P pont a most meghúzott párhuzamosok metszéspontja. Az így keletkezett POF háromszög befogói $14-r$, illetve $22,5-r$, ahol r az ABC háromszög beírható körének sugara. A r sugár hosszát könnyen meghatározhatjuk a kör külső pontból húzott érintőszakaszainak egyenlőségéből:

$$|AB|=28-r+45-r.$$

Most kiszámítjuk az AB átfogó hosszát a Pitagorasz tételből:

$$|AB|^2=28^2+45^2=2809\text{, ahonnan } |AB|=53\text{, tehát } r=\frac{28+45-53}{2}=10.$$

Most már felírhatjuk a POF háromszögre is a Pitagorasz tételt:

$$|OF|^2=4^2-12,5^2=172,25,$$

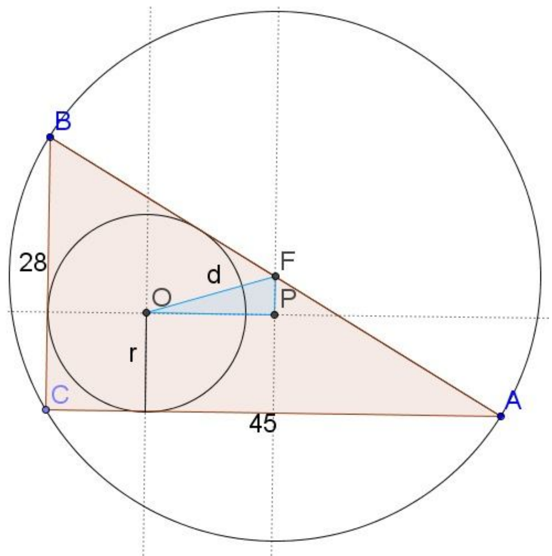
ahonnan a keresett távolság

$$|OF|\approx 13,12.$$

II.Megoldás. Bármely háromszög beírható és köréírható körei középpontjainak d távolságára igaz, hogy $d^2=R^2-2Rr$, ahol r a háromszög beírható körének, R pedig a háromszög köréírható körének sugara. Most $R=26,5$, az átfogó fele, a beírható kör sugara $r=10$, így

$$d^2=26,5^2-2\cdot 26,5\cdot 10=172,25,$$

ahonnan $d\approx 13,12$ adódik.



10. évfolyam

1. Oldd meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}.$$

Megoldás. Nyilvánvaló, hogy csak olyan (x,y) számpárok lehetnek megoldások, amelyekre $x\neq 0$ és $y\neq 0$. Szorozzuk meg mindkét oldalt $3xy$-nal, rendezés és kiemelés után a következőt kapjuk:

$$3y+3x=xy\text{, azaz } y(x-3)=3x.$$

Mivel $x\neq 3$ (hiszen az $x=3$ esetben $y\cdot 0=9$ lenne, ami lehetetlen), ezért

$$y=\frac{3x}{x-3}=\frac{3(x-3)+9}{x-3}=3+\frac{9}{x-3}$$

adódik. Az y pontosan akkor egész, ha $\frac{9}{x-3}$ egész, azaz ha $x-3$ osztója 9-nek. Az $x-3$ lehetséges értékei:

$$x-3=\begin{cases}1\\-1\\3\\-3\\9\\-9\end{cases},\quad \text{amiből}\quad x=\begin{cases}4\\2\\6\\0\text{ (kizárt)}\\12\\-6\end{cases}\quad \text{és}\quad y=\begin{cases}12\\-6\\6\\-\\4\\2\end{cases}$$

Az egyenletet a következő számpárok elégítik ki:

$$(4,12),\ (2,-6),\ (6,6),\ (-6,2) \text{ és } (12,4).$$

2. Oldd meg a következő egyenlőtlenséget:

$$(1+x)^2<\sqrt{(1-x^2)^2}.$$

Megoldás. A megoldandó egyenlőtlenség a következő alakba írható:

$$(1+x)^2<|1-x^2|.$$

Mivel $1-x^2\geq 0$ pontosan akkor, ha $-1\leq x\leq 1$ és $1-x^2<0$, ha $x<-1$ vagy $x>1$, ezért két esetet különböztetünk meg.

Ha $-1\leq x\leq 1$, akkor az egyenlőtlenség a következő alakú:

$$(1+x)^2<1-x^2\text{, amiből } x+x^2<0$$

egyenlőtlenség adódik. Ez pontosan akkor teljesül, ha $-1<x<0$. A kapott x értékek a feltételnek megfelelnek, tehát minden $-1<x<0$ megoldás.

Ha $x<-1$ vagy $x>1$, akkor az $(1+x)^2<x^2-1$ egyenlőtlenséget kell megoldani, ami egyenértékű a következővel: $2x<-2$, azaz $x<-1$. A kapott x értékek mind megfelelnek a feltételnek.

Összefoglalva, az egyenlőtlenségnek minden olyan x valós szám megoldása, amelyre $-1<x<0$ vagy $x<-1$, ami úgy is felírható, hogy $x<0$, de $x\neq 1$.

3. Adott területű derékszögű háromszögek közül melyiknek legkisebb az átfogója?

I.Megoldás. Jelölje T annak a derékszögű háromszögnek a területét, amelynek a befogói a és b, átfogója pedig c. Ekkor

$$T=\frac{a\cdot b}{2}, \text{ a Pitagorasz tételből pedig } c^2=a^2+b^2.$$

A c átfogó minimumát keressük. Nyilvánvaló, hogy $c=\sqrt{a^2+b^2}$ pontosan ott minimális, ahol a $c^2=a^2+b^2$. Felhasználva a $T=\frac{a\cdot b}{2}$ összefüggést adódik, hogy

$$c^2=a^2+\frac{4T^2}{a^2}=\left(a-\frac{2T}{a}\right)^2+4T.$$

Ez az összeg pontosan akkor minimális, ha

$$a-\frac{2T}{a}=0, \text{ azaz ha } a=\frac{2T}{a}, \text{ azaz } a^2=2T, \text{ így } b^2=2T.$$

Megállapíthatjuk, hogy az átfogó akkor a legkisebb, amikor a derékszögű háromszög egyenlőszárú. Ekkor az átfogó

$$c=2\sqrt{T}.$$

II.Megoldás. Jelölje α az a befogóval szemben fekvő szöget. Mivel $a=c\sin\alpha$ és $b=c\cos\alpha$, ezért

$$T=\frac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{2}, \text{ ahonnan } \frac{2T}{\sin\alpha\cos\alpha}=c^2, \text{ azaz } c^2=\frac{4T}{\sin 2\alpha}.$$

Ez a hányados pontosan akkor minimális, ha $\sin 2\alpha=1$ (hiszen a számláló konstans), ahol $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Az adott intervallumban $\sin 2\alpha=1$ pontosan akkor teljesül, ha $2\alpha=\frac{\pi}{2}$, azaz $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Ekkor viszont a derékszögű háromszög egyenlő szárú és

$$c=2\sqrt{T}.$$

4. Igaz-e, hogy

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1\,\textbf{?}$$

I.Megoldás. Legyen $a=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. Kíséreljük meg a köbgyökös kifejezés alatt teljes köbök kialakítását. Végezzük el a következő átalakításokat:

$$a=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}}+\sqrt[3]{1-3\sqrt{5}+15-5\sqrt{5}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{5}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{5}\right)^3}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}\right)=1.$$

II.Megoldás. Most próbáljuk meg köbreemeléssel megoldani a feladatot.

$$a^3=2+\sqrt{5}+3\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)^2\left(2-\sqrt{5}\right)}+3\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)^2}+2-\sqrt{5}=$$

$$=4-3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)=4-3a,$$

mert $3\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}=3\sqrt[3]{4-5}=-3$. Feladatunk a továbbiakban az $a^3=4-3a$ egyenlet megoldása. Írjuk át az egyenletet az $a^3+3a-4=0$ alakba, majd a baloldalt alakítsuk szorzattá:

$$a^3+3a-4=a^3-a+4a-4=a(a^2-1)+4(a-1)=$$
$$=a(a-1)(a+1)+4(a-1)=(a-1)(a^2+a+4)$$

A megoldandó egyenlet tehát

$$(a-1)(a^2+a+4)=0.$$

Ez a reláció pontosan akkor teljesül, ha $a-1=0$, azaz $a=1$, ugyanis

$$a^2+a+4=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4},$$

amiből látszik, hogy az $a^2+a+4=0$ egyenlet egyetlen valós a-ra sem teljesül. Ezért a $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ számkifejezés értéke valóban 1.

5. Egy háromszög szögeinek mértékei számtani sorozatot alkotnak. Határozd meg ezeknek a szögeknek a mértékét külön-külön, ha tudjuk, hogy színuszaik összege

$$\frac{3+\sqrt{3}}{2}.$$

Megoldás. Legyenek α, β és γ a háromszög szögei. Ha e szögek mértékei számtani sorozatot alkotnak, akkor valamely φ szögre

$$\beta-\varphi+\beta+\beta+\varphi=180°\text{, azaz } \beta=60°.$$

A háromszög szögei tehát $\alpha=60°-\varphi$, $\beta=60°$ és $\gamma=60°+\varphi$.

Írjuk most fel a szögek színuszainak összegét:

$$\sin\left(60°-\varphi\right)+\sin 60°+\sin\left(60°+\varphi\right)=\frac{3+\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin 60°\cos\varphi-\cos 60°\sin\varphi+\sin 60°+\sin 60°\cos\varphi+\cos 60°\sin\varphi=\frac{3+\sqrt{3}}{2},$$

$$2\sin 60°\cos\varphi+\sin 60°=\frac{3+\sqrt{3}}{2},$$

$$2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3+\sqrt{3}}{2},$$

innen pedig $2\sqrt{3}\cos\varphi=3$, azaz $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, tehát $\varphi=30°$.

A háromszög keresett szögei: $30°, 60°, 90°$.

11. évfolyam

1. Oldd meg a következő egyenletet:

$$4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x.$$

Megoldás. Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$\left(2^x\right)^2 + \left(3^x\right)^2 + \left(5^x\right)^2 = 2^x \cdot 3^x + 2^x \cdot 5^x + 3^x \cdot 5^x,$$

majd szorozzuk be 2-vel. Átalakítás után a következő egyenlethez jutunk:

$$\left(2^x - 3^x\right)^2 + \left(3^x - 5^x\right)^2 + \left(5^x - 2^x\right)^2 = 0.$$

Ebből következik, hogy $2^x = 3^x = 5^x$ kell hogy teljesüljön, azaz $x = 0$.

2. Bizonyítsd be, hogy ha a, b és c egy háromszög oldalhosszúságai, akkor

$$abc > (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

Megoldás. Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldalán szereplő tényezők mindegyike pozitív, így a bizonyítandó egyenlőtlenség egyenértékű a következő egyenlőtlenséggel: $a^2b^2c^2 > (a+b-c)^2(a-b+c)^2(-a+b+c)^2$.
A jobb oldalon álló szorzat tényezőit csoportosítsuk a következő módon:

$$\begin{aligned}&(a+b-c)^2(a-b+c)^2(-a+b+c)^2 = \\ &= [a+(b-c)][a-(b-c)][b-(a-c)][b+(a-c)][c-(b-a)][c+(b-a)] = \\ &= \left[a^2-(b-c)^2\right]\left[b^2-(a-c)^2\right]\left[c^2-(b-a)^2\right].\end{aligned}$$

Mivel $a^2-(b-c)^2 \le a^2$, $b^2-(a-c)^2 \le b^2$ és $c^2-(b-a)^2 \le c^2$, ezért

$$a^2b^2c^2 > (a+b-c)^2(a-b+c)^2(-a+b+c)^2$$

teljesül, s ezzel állításunkat bizonyítottuk.

3. Igazold, hogy minden valós x értékre teljesül a következő reláció:

$$x^4 + 1 \ge 2x(x^2 - x + 1).$$

Megoldás. Beszorzás és rendezés után adódik $x^4 + 1 \ge 2x^3 - 2x^2 + 2x$, amiből $x^4 + 2x^2 + 1 \ge 2x^3 + 2x$ következik. A bal oldalon teljes négyzet áll, a jobb oldalon kiemelés után a következőt kapjuk: $\left(x^2+1\right)^2 \ge 2x\left(x^2+1\right)$.

Mivel $x^2 + 1 > 0$, ezért a kapott egyenlőtlenség egyenértékű az $x^2 + 1 \ge 2x$ egyenlőtlenséggel, amiből az $(x-1)^2 \ge 0$ egyenlőtlenséget kapjuk, ami minden valós x-re teljesül, így az eredeti egyenlőtlenségnek is minden valós x megoldása.

4. A Pitagorasz tétel szerint, bármely derékszögű háromszög befogóira rajzolt négyzetek területének összege egyenlő az átfogóra rajzolt négyzet területével. Igaz-e a tétel következő általánosítása: bármely derékszögű háromszög befogóira rajzolt szabályos n-szögek ($n \ge 3$) területének összege egyenlő az átfogóra rajzolt szabályos n-szög területével.

Megoldás. $n = 4$-re az állítás igaz (Pitagorasz tétel). Vajon igaz-e az állítás $n = 3$-ra? Rajzoljunk a derékszögű háromszög oldalai fölé szabályos háromszögeket. Az egyes háromszögek területei:

$$T_a = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4},\ T_b = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \text{ és } T_c = \frac{c^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Azt kell eldönteni, hogy igaz-e az $\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{c^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ egyenlőség. $\frac{4}{\sqrt{3}}$-mal szorozva mindkét oldalt megkapjuk az $a^2 + b^2 = c^2$ ekvivalens egyenlőséget, vagyis a Pitagorasz tételt, amiről tudjuk, hogy igaz, ezért $T_a + T_b = T_c$ is igaz.

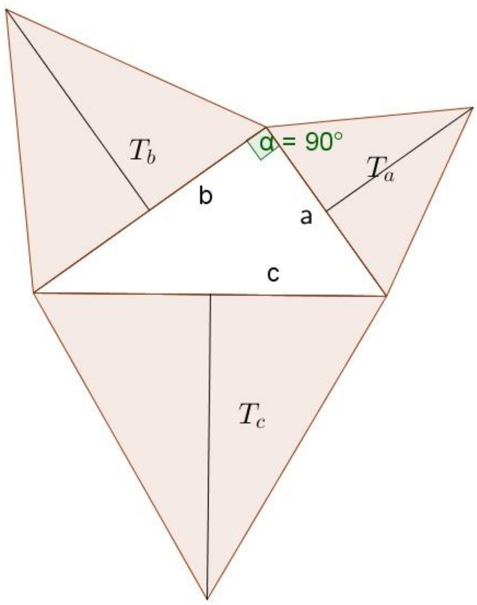
Legyen ezután $n \geq 5$ tetszőleges. Jelölje továbbra is T_a, T_b és T_c az a, b és c oldalak fölé rajzolt szabályos n-szögek területét. Tudjuk, hogy a szabályos n-szögek páronként hasonlóak. Jelöljük a T_c és c^2 arányát η-val, azaz $\eta = \frac{T_c}{c^2} \neq 0$. Az η tehát azt mutatja meg, hogy a c átfogóra rajzolt szabályos n-szög területe hányszorosa az átfogóra rajzolt négyzet területének, vagyis $T_c = \eta \cdot c^2$.

Megmutatjuk, hogy igazak a $T_a = \eta \cdot a^2$ és $T_b = \eta \cdot b^2$ relációk is. Mivel $\frac{T_a}{T_c} = \left(\frac{a}{c}\right)^2$, azaz a területek aránya egyenlő a megfelelő oldalak arányának négyzetével, ezért

$$T_a = T_c \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \eta \cdot c^2 \cdot \frac{a^2}{c^2} = \eta \cdot a^2.$$

Hasonlóan $\frac{T_b}{T_c} = \left(\frac{b}{c}\right)^2$, ahonnan $T_b = T_c \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \eta \cdot c^2 \cdot \frac{b^2}{c^2} = \eta \cdot b^2$.

Azt akarjuk eldönteni, hogy igaz-e a $T_a + T_b = T_c$ reláció, azaz $\eta a^2 + \eta b^2 = \eta c^2$. Ez az egyenlőség egyenértékű az $a^2 + b^2 = c^2$ relációval (hiszen egymásból $\eta \neq 0$-val való osztással/szorzással állnak elő). Mivel $a^2 + b^2 = c^2$ igaz, ezért $\eta a^2 + \eta b^2 = \eta c^2$ is igaz.



5. Az $ABCDA'B'C'D'$ **egységnyi élű kocka** AC' **testátlójának mely** P **pontjára teljesül, hogy** $APC\angle = 60°$**?**

Megoldás. Ismert, hogy az egységnyi élű kocka lapátlója $\sqrt{2}$, testátlója pedig $\sqrt{3}$. Jelölje y a keresett P pontnak az A csúcstól, x pedig a C csúcstól való távolságát. Legyen $PAC\angle = \varphi$. Célunk az y szakasz hosszának meghatározása.
Írjuk fel először az ACP háromszögre a szinusztételt:

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\sin\varphi}{\sin 60°}, \text{ innen } x = \frac{\sqrt{2}\sin\varphi}{\sin 60°} = \frac{2\sqrt{2}\sin\varphi}{\sqrt{3}}.$$

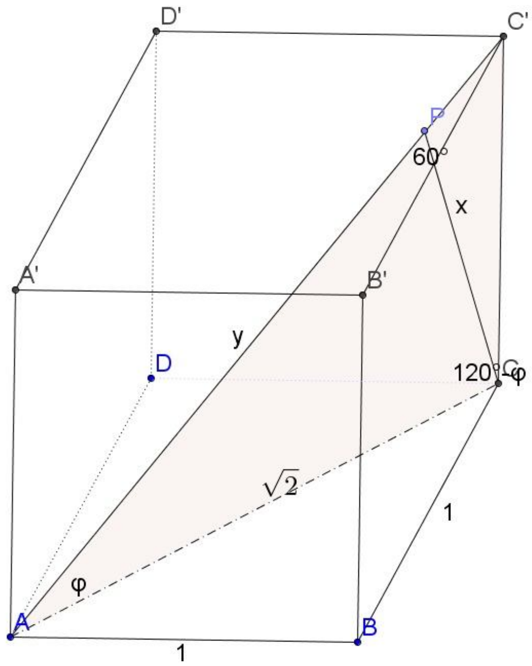
Mivel az ACC' háromszögből $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ és $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, ezért $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Ezek után írjuk fel az ACP háromszögben a keresett y szakaszra a koszinusztételt:

$$y^2 = x^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2x\sqrt{2}\cos\left(120° - \varphi\right) = \frac{8}{9} + 2 - \frac{8}{3}(\cos 120°\cos\varphi + \sin 120°\sin\varphi).$$

$$y^2 = \frac{26}{9} - \frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{26}{9} - \frac{8}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{52\sqrt{3} - 24\sqrt{3} + 24\sqrt{2}}{18\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{14\sqrt{3} + 12\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}, \text{ ahonnan } y = \sqrt{\frac{14\sqrt{3} + 12\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}} \approx 1{,}626.$$



12. évfolyam

1. Oldd meg a következő egyenletet a nemnegatív egész számok halmazán:

$$x^{y+1} = (x+1)^y.$$

Megoldás. Ha $x=0$, akkor $x^{y+1}=0$ bármely nemnegatív egész számra, ugyanakkor $(x+1)^y=1$. Így az $x=0$ esetre nincs megoldás.

Ha $x=1$, akkor $x^{y+1}=1$, bármely y nemnegatív egész számra, ugyanakkor $2^y=1$ pontosan akkor, ha $y=0$. Tehát az $(1,0)$ számpár megoldása az egyenletnek.

Ha $x \geq 2$ és x páros, akkor x^{y+1} is páros, ugyanakkor $(x+1)^y$ páratlan bármely y nemnegatív egész szám esetén, ezért $x^{y+1} \neq (x+1)^y$. Ha x páratlan, akkor x^{y+1} is páratlan és $(x+1)^y$ páros bármely y nemnegatív egész számra, ezért $x^{y+1} \neq (x+1)^y$.

Az egyenletet tehát egyetlen nemnegatív egész számokból álló páros elégíti ki:

$$x=1,\ y=0.$$

2. Igazold, hogy bármely négyzetszámot 16-tal osztva négyzetszámot kapunk maradékul!

Megoldás. Először lássuk be a páros számok négyzeteire, majd később belátjuk a páratlanokéra is.

A páros számok a 4-gyel való oszthatóság szempontjából felírhatók $4k$ és $4k+2$ alakban (ahol k egész szám). A $4k$ alakú páros számok négyzete

$$(4k)^2 = 16k^2.$$

Ez a négyzetszám 16-tal osztva 0-át ad maradékul, ami négyzetszám. A $4k+2$ alakú számok négyzete

$$(4k+2)^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 16(k^2+k) + 4,$$

amely alakból látszik, hogy a négyzetszám 16-tal osztva 4-et ad maradékul, ami négyzetszám.

Most vegyük sorra a páratlan számokat, mégpedig először a $8k \pm 1$, majd a $8k \pm 3$ alakúakat.

$$(8k \pm 1)^2 = 64k^2 \pm 16k + 1 = 16(4k^2 \pm k) + 1$$

$$(8k \pm 3)^2 = 64k^2 \pm 48k + 9 = 16(4k^2 \pm 3k) + 9.$$

A két alakról megállapítható, hogy 16-tal osztva 1-et, illetve 9-et adnak maradékul, amelyek négyzetszámok. Ezzel minden szám négyzetére bebizonyítottuk az állítást.

3. Határozd meg az f függvény szélsőértékeit, ha

$$f(x) = \frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5},\ x \in \mathbb{R}.$$

I.Megoldás. Vezessük be az $f(x)=y$ jelölést. Mivel az f függvény minden valós számra értelmezett, ezért az $y = \dfrac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5}$ egyenlet ekvivalens az

$$yx^2 + 4yx + 5y = 2x^2 + 6x + 6, \text{ illetve } (y-2)x^2 + (4y-6)x + 5y - 6 = 0$$

egyenlettel. Ki kell vizsgálni, hogy milyen y értékek esetén van megoldása a kapott egyenletnek, majd meg kell határozni a legkisebb és a legnagyobb y értéket, ha ilyenek léteznek.
$y = 2$ esetén az egyenlet elsőfokú, azaz $2x + 4 = 0$, amiből $x = -2$.
Ha $y = 2$, akkor az egyenlet akkor és csak akkor oldható meg, ha a diszkrimináns nemnegatív, azaz

$$-(4y-6)^2 - 4(y-2)(5y-6) \geq 0,$$
$$-4y^2 + 16y - 12 \geq 0,$$
$$-4(y^2 - 4y + 3) \geq 0,$$
$$-4(y-1)(y-3) \geq 0,$$

Amiből következik, hogy $1 \leq y \leq 3$, tehát a függvény minimuma 1, maximuma 3.

II.Megoldás. Alakítsuk át a függvényt a következő módon:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 6x + 6}{x^2 + 4x + 5} = \frac{x^2 + 4x + 5 + x^2 + 2x + 1}{x^2 + 4x + 5} = 1 + \frac{(x+1)^2}{(x+2)^2 + 1}.$$

Ez a kifejezés biztosan nem kisebb 1-nél. Egyenlőség $x = -1$ esetén van, ami azt jelenti, hogy ezen a helyen lesz a függvénynek minimuma, amelynek értéke 1.
Hasonló átalakítással jutunk a függvény maximumához is. Mégpedig így:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 6x + 6}{x^2 + 4x + 5} = \frac{3x^2 + 12x + 15 - (x^2 + 6x + 9)}{x^2 + 4x + 5} = 3 - \frac{(x+3)^2}{(x+2)^2 + 1} \leq 3.$$

Egyenlőség $x = -3$ esetén van, ami azt jelenti, hogy ezen a helyen lesz a függvénynek maximuma, amelynek értéke 3.

4. Adott a síkban n egyenes. Legalább, illetve legfeljebb hány részre osztja fel a síkot az n egyenes?

Megoldás. Nyilvánvaló, hogy $n = 1$ esetben a részek száma $t = 2$.
Ha $n = 2$, akkor már két eset lehetséges. A továbbiakban mindig feltételezzük, hogy az egyenesek között nincsenek olyanok, amelyek egybeesnek.
Ha a két egyenes párhuzamos, akkor a részek száma $t = 3$, ha a két egyenes metsző, akkor a részek száma $t = 4$.
Ha $n = 3$, akkor a helyzet már kicsit összetettebb. Három párhuzamos egyenes esetén a részek száma $t = 4$, két párhuzamos és egy metsző egyenes esetén $t = 6$, három egy ponton áthaladó egyenes esetén $t = 6$, valamint három egymást metsző egyenes esetén, amelyek között nincs párhuzamos és amelyek nem egy közös ponton haladnak keresztül, $t = 7$.
A konkrét esetek tanulmányozása alapján világos, hogy adott n egyenes esetén a részek száma pontosan akkor minimális, ha az egyenesek párhuzamosak. Ekkor a részek száma $t_{\min} = n + 1$. Az is világos, hogy a részek száma adott n egyenes esetén akkor maximális, ha az egyenesek között bármelyik kettő nem párhuzamos és nincs közöttük három olyan, amely egy ponton megy át. Ezután alkalmas számlálástechnikát kell konstruálni a maximumok összeszámlálására. Legyen az egyenesek száma n, a maximális részek száma ekkor

$$t_{\max} = 2 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

5. Bizonyítsd be, hogy ha a háromszög S súlypontján és beírható körének O középpontján áthaladó egyenes párhuzamos a háromszög valamely oldalával, akkor a háromszög oldalainak mérőszámai számtani sorozatot alkotnak!

Megoldás. Bármely háromszög beírható körének r sugara kifejezhető a háromszög területe és kerülete segítségével, azaz

$$r = \frac{2T}{K}.$$

Ha az S és O pontokon átmenő e egyenes párhuzamos a háromszög a oldalával, akkor a súlypont tulajdonságai miatt a háromszög beírható körének r sugara az a oldalhoz tartozó m_a magasság harmada:

$$r = \frac{m_a}{3}.$$

Az r sugár e két kifejezését egybevetve, és felhasználva hogy

$$m_a = \frac{2T}{a},$$

kapjuk, hogy

$$\frac{2T}{a+b+c} = \frac{2T}{3a},$$

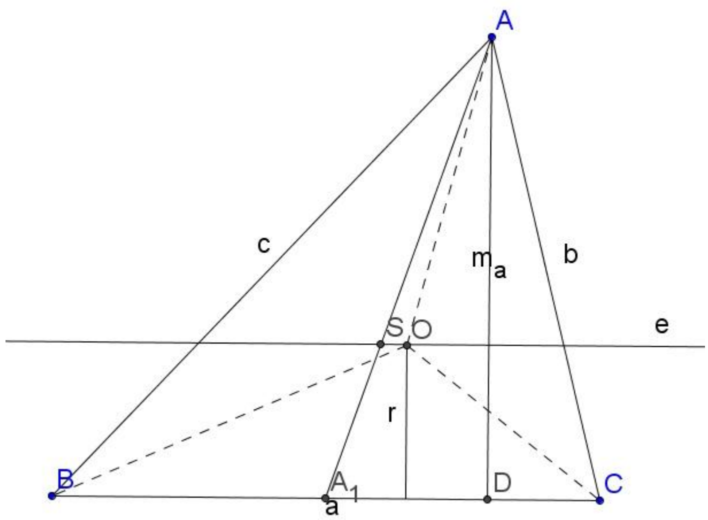
innen pedig

$$a+b+c = 3a,$$

azaz

$$\frac{b+c}{2} = a.$$

A háromszög oldalai tehát tényleg számtani sorozatot alkotnak, mégpedig az az oldal a sorozat középső eleme, amellyel az e egyenes párhuzamos.



A II. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

9. évfolyam

1. Csizmadija Laura, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **I. díj**
2. Gombár Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
3. Juhász Andor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
4. Lajkó Miklós, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
5. Fontányi Andor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
6. Grujin Tamara, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
7. Kalmár Gergely, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
8. Seregély Emese, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

10. évfolyam

1. Csizmadia Zsolt, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Döme Zsolt, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
3. Lakatos Zoltán, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **I. díj**
4. Borbás Imre, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
5. Takács Árpád, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **II. díj**
6. Karácsonyi Éva, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
7. Szegedi Mihály, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **II. díj**
8. Botos Zsófia, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
9. Varga Dávid, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, II**I. díj**
10. Dósa Szilvia, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

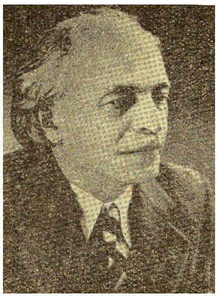
11. évfolyam

1. Sóti Valentin, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **I. díj**
2. Oláh Attila, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **II. díj**
3. Holló Dóra, Dositej Obradović Gimnázium, Topolya, **III. díj**

A III. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Előadó: dr. Karsai János
Előadás címe: Számítógéppel szerkesztett matematikai virágok

A tanulók érdeklődéssel hallgatják az előadást.



III. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Szabadka, 2006. január 21.

9. évfolyam

1. Jelentse a, b és c egy háromszög oldalainak a hosszát. Bizonyítsd be, hogy fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc>a^3+b^3+c^3.$$

2. Három iskola mindegyikében n tanuló van. Minden tanuló a másik két iskolából együttvéve $n+1$ tanulót ismer. Bizonyítsd be, hogy választható a három iskola mindegyikéből egy-egy tanuló úgy, hogy mindegyikük ismeri a másik kettőt. (Az ismeretségeket kölcsönösnek tételezzük fel.)

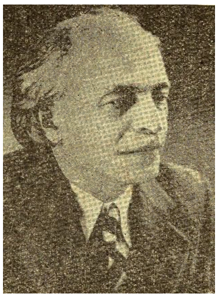
3. Az ABC háromszög C csúcsból induló súlyvonala az AB oldalt C_1-ben, a háromszög köré írható körét C_2-ben, a B csúcsból induló súlyvonal az AC oldalt B_1-ben, a köré írható kört B_2-ben metszi. Bizonyítsd be, hogy ha e két súlyvonal merőleges egymásra, akkor C_2B_2 merőleges AS-re, ahol S a háromszög súlypontja!

4. Keresd meg a legkisebb olyan természetes számot, ami 56-ra végződik, osztható 56-tal, és számjegyeinek összege éppen 56.

5. Bizonyítsd be, hogy ha az a, b és c egész számokra teljesül az $ab+bc+ca=0$ összefüggés, akkor az abc szorzat fölírható egy négyzetszám és egy köbszám szorzataként!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



III. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Szabadka, 2006. január 21.

10. évfolyam

1. Mely egész a, b és c értékek elégítik ki az

$$a^2+b^2+c^2+3<ab+3b+2c$$

egyenlőtlenséget?

2. Legyen n egész szám. Bizonyítsd be, hogy ha $2+2\sqrt{28n^2+1}$ egész szám, akkor négyzetszám is!

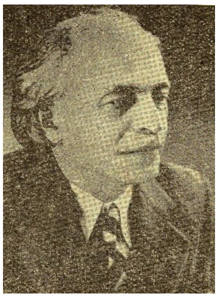
3. Bizonyítsd be, hogy ha p 5-nél nagyobb prímszám, akkor az $x^4+4^x=p$ egyenletnek nincs egész megoldása!

4. Az ABC háromszögben $\gamma=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Legyen D a C-ből induló szögfelező AB oldalhoz tartozó pontja, O pedig a háromszög köré írható körének középpontja. Mekkorák a háromszög szögei, ha $ODAC$ húrnégyszög?

5. Inflációban gyakran emelik a villamos közlekedési díját. A jegy árát ilyenkor a jegy nélkül utazókra kirótt büntetés mértékére emelik, a büntetés pedig mindig az éppen érvényes jegy árának 10-szerese. Makacs Tamás elvi kérdést csinál abból, hogy ne vegyen jegyet, így már 9-szer büntették meg. Ráadásul az egyik alkalommal fizetés közben elejtett, és így elvesztett egy „nagy értékű" bankót. Így Tamásnak eddig 23650 Ft-ja ment rá a villamosozásra. Hány Ft-os bankót vesztett el Tamás? (Inflációban a „nagy értékű" bankók az 1000, 2000, 5000 és a 10000 Ft-osak.)

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



III. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Szabadka, 2006. január 21.

11. évfolyam

1. Két egybevágó, háromoldalú szabályos gúlát alapjuk mentén összeillesztettünk. A keletkező hatlapú test minden lapszöge ugyanakkora. Határozd meg a két háromélű csúcs távolságának és két oldalcsúcs távolságának az arányát!

2. Jelentse a, b és c egy háromszög oldalainak a hosszát. Bizonyítsd be, hogy fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc>a^3+b^3+c^3.$$

3. Egy sakktábla minden mezejére kockát helyeztünk. Ezek lapjai a mezőkkel egybevágóak. Minden kockának van fekete lapja. Azt akarjuk elérni, hogy fölül csak fekete lapok legyenek. Bizonyítsd be, hogy ezt el lehet érni, ha kockát csak úgy mozgathatunk el, hogy teljes sorával vagy oszlopával elforgatjuk annak hossztengelye körül!

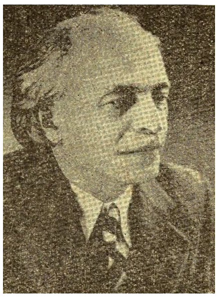
4. Bizonyítsd be, hogy ha p 5-nél nagyobb prímszám, akkor az $x^4+4^x=p$ egyenletnek nincs egész megoldása!

5. Bizonyítsd be, hogy az $A_1A_2A_3\ldots A_{12}$ szabályos tizenkétszögben

$$\frac{1}{|A_1A_2|^2}+\frac{1}{|A_1A_6|^2}=\frac{4}{|A_1A_3|^2}.$$

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



III. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Szabadka, 2006. január 21.

12. évfolyam

1. Bizonyítsd be, hogy ha n természetes szám, akkor $\left(5+\sqrt{26}\right)^n$ tizedestört alakjában a tizedesvesszőt követő első n számjegy egyenlő!

2. Egy könyvtár ki- és bejáratánál egy-egy tábla áll. Minden be-, illetve kilépőnek fel kell írnia a megfelelő táblára, hogy hány embert talált, illetve hagyott a könyvtárban. Bizonyítsd be, hogy egy teljes nap során ugyanazok a számok kerülnek a két táblára, legfeljebb más sorrendben (feltesszük, hogy egyszerre csak egy ember érkezik vagy távozik).

3. Milyen n és k természetes számok esetén alkot számtani sorozatot a következő három kifejezés:

$$\binom{n}{k-1},\ \binom{n}{k},\ \binom{n}{k+1}.$$

4. Adott négyzeteknek egy végtelen sorozata, ahol az oldalak hossza rendre $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$. Bizonyítsd be, hogy van olyan négyzet, amelyben mindezek a négyzetek átfedés nélkül elhelyezhetők, és keresd meg a legkisebb ilyen négyzetet!

5. Az ABC háromszög B és C csúcsain átmenő kör az AB oldalt D pontban, az AC oldalt pedig E pontban metszi. A háromszög AF súlyvonala DE-t G pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy ekkor

$$\frac{|GD|}{|GE|}=\frac{|AC|^2}{|AB|^2}.$$

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

A III. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

9. évfolyam

1. Jelentse a, b és c egy háromszög oldalainak a hosszát. Bizonyítsd be, hogy fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc>a^3+b^3+c^3.$$

Megoldás. Rendezzük a bal oldalt, a job oldalon szereplő kifejezéseket vigyük át az egyenlőtlenség bal oldalára, majd alakítsuk át a kifejezést!

$$ab^2-2abc+ac^2+bc^2-2abc+ba^2+ca^2-2abc+cb^2+4abc-a^3-b^3-c^3>0$$

$$ab^2+ac^2+bc^2+ba^2+ca^2+cb^2-2abc-a^3-b^3-c^3>0$$

$$b(a^2-c^2+2bc-b^2)+c(a^2-c^2+2bc-b^2)-a(a^2-c^2+2bc-b^2)>0$$

$$(b+c-a)(a^2-c^2+2bc-b^2)>0$$

$$(b+c-a)(a^2-(c-b)^2)>0$$

$$(b+c-a)(a-c+b)(a+c-b)>0$$

A háromszög-egyenlőtlenségek alapján mindhárom tényező pozitív, azaz igaz egyenlőtlenséget kaptunk.

2. Három iskola mindegyikében n tanuló van. Minden tanuló a másik két iskolából együttvéve $n+1$ tanulót ismer. Bizonyítsd be, hogy választható a három iskola mindegyikéből egy-egy tanuló úgy, hogy mindegyikük ismeri a másik kettőt. (Az ismeretségeket kölcsönösnek tételezzük fel.)

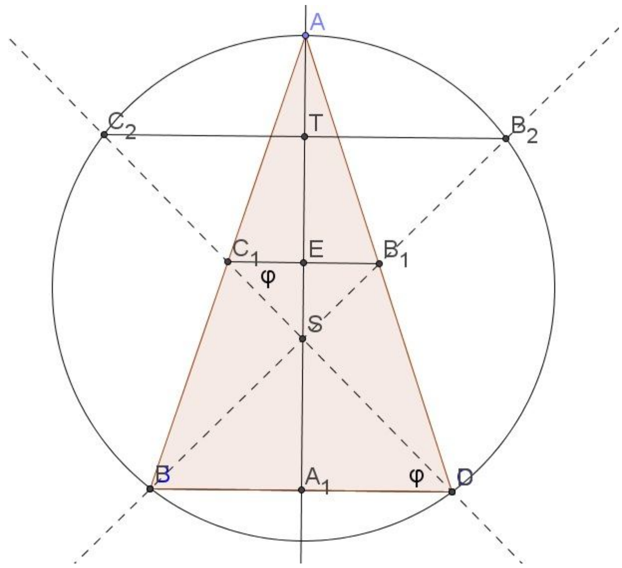
Megoldás. Megkérdezünk mindenkit, hány ismerőse van egy-egy iskolában. Legyen a legkisebb hallott szám k. Ez nem 0, mert mindenkinek több ismerőse van a másik két iskolából, mint ahány tanuló jár egy-egy iskolába.
Legyen mondjuk András az A iskolából egy tanuló, akinek k ismerőse van a B iskolában. Ekkor a C iskolában $n+1-k$ ismerőse van és $k-1$ tanulót nem ismer.
András egy B iskolabeli ismerőse, mondjuk Bálint, legalább k tanulót ismer a C iskolából. Ezek közül legalább egy ismeri Andrást is. Ha Csongor egy közös ismerős, akkor hármuk közül mindenki ismeri a másik kettőt. A feladat állítása tehát igaz.

3. Az ABC háromszög C csúcsból induló súlyvonala az AB oldalt C_1-ben, a háromszög köré írható körét C_2-ben, a B csúcsból induló súlyvonal az AC oldalt B_1-ben, a köré írható kört B_2-ben metszi. Bizonyítsd be, hogy ha e két súlyvonal merőleges egymásra, akkor C_2B_2 merőleges AS-re, ahol S a háromszög súlypontja!

Megoldás. Használjuk az ábra jelöléseit. Legyen $\varphi = C_1CB\angle$. A C_1B_1 szakasz az ABC háromszögnek egy középvonala, ezért C_1B_1 párhuzamos BC-vel. Ebből az is következik, hogy az ABC háromszög AA_1 súlyvonalának C_1B_1-gyel alkotott E

metszéspontja felezi a C_1B_1 szakaszt. Ezek szerint C_1SB_1 derékszögű háromszögnek SE az átfogóhoz tartozó súlyvonala, amiről tudjuk – Thálész tétele miatt – hogy egyenlő az átfogó felével.

$$|SE|=|C_1E|=|EB_1|.$$



Ez viszont azt jelenti, hogy a C_1ES háromszög egyenlő szárú, vagyis

$$EC_1S\angle = SCB\angle = ESC_1\angle = \varphi.$$

Vizsgáljuk most a C_2B_2S derékszögű háromszöget. Nyilván $C_2B_2S\angle = \varphi$, hiszen a $C_2B_2B\angle$ és $C_2CB\angle$ azonos íven nyugvó kerületi szögek. Mivel $C_2ST\angle = \varphi$, ezért

$$TSB_2\angle = 90° - \varphi,$$

ami azt jelenti, hogy a B_2TS háromszögben

$$B_2TS\angle = 90°,$$

vagyis AS merőleges C_2B_2-re, és éppen ezt kellett igazolnunk.

4. Keresd meg a legkisebb olyan természetes számot, ami 56-ra végződik, osztható 56-tal, és számjegyeinek összege éppen 56.

Megoldás. A keresett szám felírható $A \cdot 100 + 56$ alakban. Mivel $56 | A \cdot 100$, így $14 | A$, azaz A páros szám és osztható 7-tel, számjegyeinek összege pedig $56-(5+6)=45$. A legkisebb olyan páros szám, ahol a számjegyek összege 45 a 199998, de ez nem osztható 7-tel. A következő a 289998, majd a 298998. Ez utóbbi osztható csak 7-tel, tehát a keresett szám a 29899856.

5. Bizonyítsd be, hogy ha az a, b és c egész számokra teljesül az $ab+bc+ca=0$ összefüggés, akkor az abc szorzat fölírható egy négyzetszám és egy köbszám szorzataként!

Megoldás. Vegyük észre, hogy $ab = -c(b+a)$ miatt, az a, b és c számok mindegyike osztja a másik két számot, ezért ebből az következik, hogy ha az abc szorzat osztható egy p egész számmal, akkor p^n-nel is osztható valamilyen $n>1$ természetes számra. Ekkor viszont biztosan találhatók olyan x és y nemmegatív egészek, amelyekre $p^n = p^{3x} \cdot p^{2y}$, ami igazolja a feladat állítását.

10. évfolyam

1. Mely egész a, b és c értékek elégítik ki az

$$a^2+b^2+c^2+3<ab+3b+2c$$

egyenlőtlenséget?

Megoldás. Minthogy az egyenlőtlenség mindkét oldalán egész szám áll, az egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha a bal oldal legalább 1-gyel kisebb a jobb oldalnál, így a bal oldalhoz 1-et hozzáadva akár az egyenlőség is teljesülhet, azaz

$$a^2+b^2+c^2+4\le ab+3b+2c.$$

Megfelelő rendezéssel a következő egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$a^2-ab+\frac{b^2}{4}+\frac{3b^2}{4}-3b+3+c^2-2c+1\le 0$$

$$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+3\left(\frac{b}{2}-1\right)^2+(c-1)^2\le 0$$

A fenti egyenlőtlenség csak akkor teljesülhet, ha benne minden négyzet alapja 0, hiszen különben a bal oldalon pozitív szám állna. Eszerint

$$a-\frac{b}{2}=0,\ \frac{b}{2}-1=0,\ c-1=0,$$

amelyből az egyetlen megoldás: $a=1$, $b=2$, $c=1$.

2. Legyen n egész szám. Bizonyítsd be, hogy ha $2+2\sqrt{28n^2+1}$ egész szám, akkor négyzetszám is!

Megoldás. Legyen $2+2\sqrt{28n^2+1}=a$. Megfelelő rendezéssel, majd négyzetre emeléssel adódik, hogy

$$2\sqrt{28n^2+1}=a-2\text{, illetve } 7\cdot 16n^2=a(a-4).$$

A feltétel szerint a egész, ez esetben azonban párosnak kell lennie, sőt 4-gyel oszthatónak is, mert ha páratlan, akkor $a-4$ is és $a(a-4)$ is páratlan, ha pedig páratlan szám kétszerese, akkor $a-4$ is az, s így a szorzat páratlan szám négyszerese, tehát nem osztható 16-tal. Eszerint alkalmas b egész számmal $a=4b$ és

$$7n^2=b(b-1).$$

Itt b és $b-1$ relatív prím egymáshoz, hiszen minden közös osztójuk osztója a különbségüknek, 1-nek is. Ez esetben egyiküknek négyzetszámnak kell lennie, másikuknak pedig egy négyzetszám 7-szeresének. Ha ugyanis n, b és $b-1$ helyébe beírjuk felbontásukat prímszámok szorzatára, akkor a bal oldalon a 7 páratlan hatványon fog szerepelni, a többi prímszám páros hatványon.
A jobb oldalon b és $b-1$ prímosztói különbözőek.
A számelmélet alaptétele szerint egy szám prímtényezős felbontása a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű, tehát a két oldalon ugyanazok a prímszámok szerepelnek, és egy-egy prím a két oldalon ugyanazon a hatványon fordul elő. Ekkor b és $b-1$ felbontásában minden prím páros kitevővel szerepel, kivéve a hetet amely fellép valamelyiknek a felbontásában, éspedig páratlan hatványon. A két szám egyike tehát x^2, a másik $7y^2$ alakú. Mivel b és $b-1$ egyike páros, másikuk páratlan, így x és y közül is egyik páros, másik páratlan.

Azt is tudjuk, hogy x^2-7y^2 vagy 1, vagy -1, továbbá azt is, hogy páros szám négyzete osztható 4-gyel, páratlan számé pedig 4-gyel osztva (sőt 8-cal osztva is) 1-et ad maradékul. Eszerint, ha $7y^2$-et 4-gyel osztjuk, akkor 0 vagy 3 a maradék, x^2-é pedig 1 vagy 0. Mivel továbbá az egyik maradék 0, így az x^2-7y^2 szám mindkét esetben 1 maradékot kap, tehát nem lehet -1-gyel, csak 1-gyel egyenlő. Ez azt jelenti, hogy $b=x^2$, $b-1=7y^2$. Ha tehát a feladatban szereplő a szám egész, akkor fennáll rá, hogy $a=4b=4x^2=(2x)^2$, vagyis négyzetszám, amint a feladat állította.

3. Bizonyítsd be, hogy ha p 5-nél nagyobb prímszám, akkor az $x^4+4^x=p$ egyenletnek nincs egész megoldása!

Megoldás. Csak pozitív egész x értékek jönnek tekintetbe, mert negatívokra a

$$K=x^4+4^x$$

kifejezés nem is egész, 0-ra pedig 1. Pozitív páros x-ekre K osztható 4-gyel, tehát összetett.

Ha x pozitív páratlan szám, akkor $2y+1$ alakban írva

$$4^x=4\cdot 4^{2y}=4\cdot\left(2^y\right)^4.$$

Írjunk $2^y=2^{\frac{x-1}{2}}$ helyébe z-t. Ekkor kifejezésünk így alakítható:

$$K=x^4+4z^4=x^4+4z^4+4x^2z^2-4x^2z^2=\left(x^2+2z^2\right)^2-\left(2xz\right)^2=$$

$$=\left(x^2+2z^2+2xz\right)\left(x^2+2z^2-2xz\right)=\left(\left(x+z\right)^2+z^2\right)\left(\left(x-z\right)^2+z^2\right).$$

Itt az első tényező mindig nagyobb, mint 1, mert mindegyik tagja legalább 1. A második tényező pedig csak akkor lehet 1, ha $x=z=1$. Mivel

$$x=2y+1 \text{ és } z=2^y,$$

így ez abban az esetben következik be, ha $x=1$ és $y=0$. Ekkor

$$x^4+4^x=5,$$

p azonban 5-nél nem nagyobb. Így a feladatban szereplő egyenletnek valóban nincs egész megoldása.

4. Az ABC háromszögben $\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$. Legyen D a C-ből induló szögfelező AB oldalhoz tartozó pontja, O pedig a háromszög köré írható körének középpontja. Mekkorák a háromszög szögei, ha $ODAC$ húrnégyszög?

Megoldás. Mivel $\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$, ezért $\gamma=\frac{180°-\gamma}{2}$, ahonnan $\gamma=60°$. Az AOB háromszögben a kerületi és középponti szögek tétele miatt $AOB\angle=120°$. Mivel az AOB háromszög egyenlő szárú, így

$$ABO\angle=\frac{180°-120°}{2}=30°$$

Mivel $ACOD$ húrnégyszög, ezért $DCO\angle=OAD\angle$, hiszen azonos íven nyugvó kerületi szögek. Azt kaptuk tehát, hogy $DCO\angle=OAD\angle=30°$.

A DCO szöget felírhatjuk másképpen is. Az ACO egyenlő szárú háromszögben a

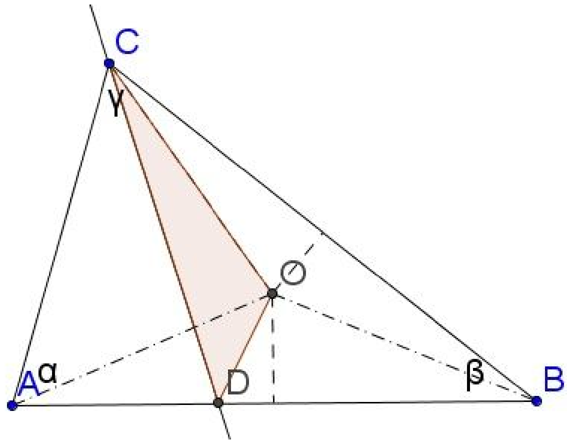
$$COA\angle=2\beta,$$

ugyancsak a kerületi és középponti szögek tétele miatt. Ezért $ACO\angle=90°-\beta$. Ekkor

$$DCO\angle = ACO\angle - ACD\angle = 90° - \beta - 30° = 60° - \beta,$$

hiszen CD szögfelező. Így azt kaptuk, hogy $30° = 60° - \beta$, tehát $\beta = 30°$, akkor pedig $\alpha = 90°$. Az ABC háromszög szögei tehát

$$\alpha = 90°,\ \beta = 30° \text{ és } \gamma = 60°.$$



5. Inflációban gyakran emelik a villamos közlekedési díját. A jegy árát ilyenkor a jegy nélkül utazókra kirótt büntetés mértékére emelik, a büntetés pedig mindig az éppen érvényes jegy árának 10-szerese. Makacs Tamás elvi kérdést csinál abból, hogy ne vegyen jegyet, így már 9-szer büntették meg. Ráadásul az egyik alkalommal fizetés közben elejtett, és így elvesztett egy „nagy értékű" bankót. Így Tamásnak eddig 23650 Ft-ja ment rá a villamosozásra. Hány Ft-os bankót vesztett el Tamás? (Inflációban a „nagy értékű" bankók az 1000, 2000, 5000 és a 10000 Ft-osak.)

Megoldás. Egy szám és a tízszerese is kilenccel osztva ugyanazt a maradékot adja. Ezek szerint a villamosjegy és a büntetések is az infláció során ugyanazt a 9-es maradékot adták, illetve Makacs Tamás által kifizetett kilenc büntetés is mindig ugyanazt a maradékot adta. Legyen ez a maradék k ($0 \le k \le 8$). Ekkor egy büntetés $9a_i + k$ ($i = 1, 2, \ldots, 9$) alakú, a kilenc büntetés összege pedig

$$(9a_1 + k) + (9a_2 + k) + \cdots + (9a_9 + k) = 9(a_1 + a_2 + \cdots + a_9 + k)$$

alakú, azaz a kifizetett büntetések összege kilenccel osztható szám. A felsorolt nagy értékű bankók közül egyedül a 2000-es egészíti ki a 23 650-et 9-cel osztható számra, tehát Tamás egy 2000-es bankót veszített el.

11. évfolyam

1. Két egybevágó, háromoldalú szabályos gúlát alapjuk mentén összeillesztettünk. A keletkező hatlapú test minden lapszöge ugyanakkora. Határozd meg a két háromélű csúcs távolságának és két oldalcsúcs távolságának az arányát!

Megoldás. Ha a szabályos ABC háromszög mentén összeillesztjük az egybevágó $ABCD$ és $ABCE$ gúlákat, a D és E csúcsok a háromszög síkjára a háromszög S középpontjában emelt merőlegesen helyezkednek el. Az összeillesztéssel keletkező test eszerint nemcsak az ABC síkra, hanem például az ADE síkra is szimmetrikus. E szimmetriákból következik, hogy a D és E csúcsokból az AB élre, illetve a B és C csúcsokból az AD egyenesre bocsátott merőlegesek egyenlők, s hogy közös F, illetve G talppontjuk van. Eszerint a $DFE\angle$ az AB él mentén, a $BGC\angle$ pedig az AD él mentén csatlakozó lapok szögét méri. Minthogy e szögek a feltevés szerint egyenlők, a DFE és BGC háromszögek hasonlóak, hiszen egyenlő szárúak és szárszögük egyenlő. A hasonlóságból a megfelelő oldalak aránya fennáll, azaz

$$|DE|:|BC|=|DF|:|BG|.$$

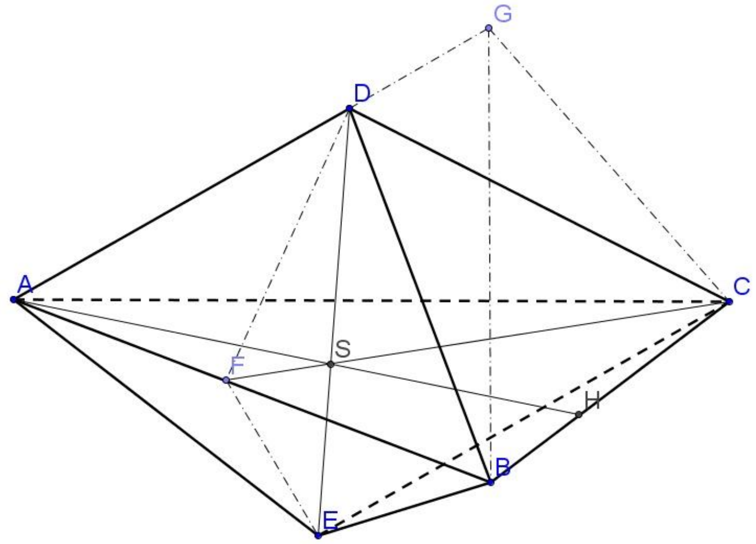
A jobb oldali szakaszok az ABD háromszög magasságai, s ezért fordítva aránylanak, mint a megfelelő oldalak:

$$|DF|:|BG|=|AD|:|AB|.$$

Minthogy $BC=AB$, az aránypárok egybevetéséből $DE=AD$ következik, tehát az is, hogy az ADE háromszög szabályos, és így hasonló az ABC háromszöghöz. Ebből a hasonlóságból az oldalak és magasságok arányára adódik, hogy

$$|DE|:|BC|=|AS|:|AH|.$$

Itt H az A pontból induló magasság talppontja, ami egyben a BC él felezőpontja is. Minthogy az S súlypont harmadolja az AH súlyvonalat, az utolsó arány értéke $\frac{2}{3}$. Ez tehát egyben a $|DE|:|BC|$ arány keresett értéke is.



2. Jelentse a, b és c egy háromszög oldalainak a hosszát. Bizonyítsd be, hogy fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc>a^3+b^3+c^3.$$

Megoldás. A bal oldal harmadik és negyedik tagja így alakítható át:

$$c(a-b)^2+4abc=c(a+b)^2.$$

Vonjuk le ezután a bal oldal egyes tagjaiból a jobb oldal megfelelő tagját, így a különbség szorzattá alakítható:

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a+b)^2-a^3-b^3-c^3>0$$

$$a\left((b-c)^2-a^2\right)+b\left((c-a)^2-b^2\right)+c\left((a+b)^2-c^2\right)>0$$

$$a(b-c-a)(b-c+a)+b(c-a-b)(c-a+b)+c(a+b-c)(a+b+c)>0$$

$$(a+b-c)\left(ab-ac-a^2-bc+ab-b^2+ac+bc+c^2\right)>0$$

$$(a+b-c)\left(c^2-(a-b)^2\right)>0$$

$$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)>0$$

Itt mind a három tényező pozitív, mivel egy háromszög két oldalának összege nagyobb a harmadiknál. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

3. Egy sakktábla minden mezejére kockát helyeztünk. Ezek lapjai a mezőkkel egybevágóak. Minden kockának van fekete lapja. Azt akarjuk elérni, hogy fölül csak fekete lapok legyenek. Bizonyítsd be, hogy ezt el lehet érni, ha kockát csak úgy mozgathatunk el, hogy teljes sorával vagy oszlopával elforgatjuk annak hossztengelye körül!

Megoldás. Ha egy kockának több fekete lapja van, akkor válasszunk ki közülük egyet, és a többit gondoljuk más színűnek.
Azt használjuk fel, hogy egy tengely körül forgatva az arra merőleges lapok nem változtatják helyüket (csak középpontjuk körül forognak). Így elérhetjük célunkat, hogy ha először egyenként minden sor kockáinak felső lapját feketévé tesszük úgy, hogy eközben attól a sortól különböző sort nem mozgatunk ezután elfordítjuk a sort valamelyik irányba $90°$-kal, hogy ezek a fekete lapok a további sorok alakításánál helyben maradjanak. Végül a sorok megfelelő irányú $90°$-os elforgatásával a fekete lapokat felülre hozzuk.
Kitűzött részfeladatunk megoldására válasszunk ki egy sort. Azoknak a kockáknak az oszlopát, amelyeknek az alsó vagy a felső lapja fekete, fordítsuk el valamelyik irányba $90°$-kal, majd a kiszemelt sort fordítsuk el $90°$-kal. Ekkor a sor egyetlen kockájának sem lesz az első vagy hátsó lapja fekete. Most feketévé tesszük a sor felső lapjait, azoknak a kockáknak az oszlopát, amelyeknek a fekete lap oldallapja, alkalmas irányba $90°$-kal forgatva, azokét pedig amelyeknek alul van a fekete lapja, $180°$-kal. Mivel eközben csak a kiszemelt sort forgattuk (egyszer), ezzel megoldottuk részfeladatunkat, s így a kitűzött feladatot is.

4. Bizonyítsd be, hogy ha p 5-nél nagyobb prímszám, akkor az $x^4+4^x=p$ egyenletnek nincs egész megoldása!

Megoldás. Csak pozitív egész x értékek jönnek tekintetbe, mert negatívokra a $K = x^4 + 4^x$ kifejezés nem is egész, 0-ra pedig 1. Pozitív páros x-ekre K osztható 4-gyel, tehát összetett. Ha x pozitív páratlan szám, akkor $2y+1$ alakban írva

$$4^x = 4 \cdot 4^{2y} = 4 \cdot \left(2^y\right)^4, \text{ majd } 2^y = 2^{\frac{x-1}{2}} = z$$

helyettesítéssel kifejezésünk így alakítható:

$$K = x^4 + 4z^4 = x^4 + 4z^4 + 4x^2z^2 - 4x^2z^2 = \left(x^2 + 2z^2\right)^2 - \left(2xz\right)^2 =$$

$$= \left(x^2 + 2z^2 + 2xz\right)\left(x^2 + 2z^2 - 2xz\right) = \left(\left(x+z\right)^2 + z^2\right)\left(\left(x-z\right)^2 + z^2\right).$$

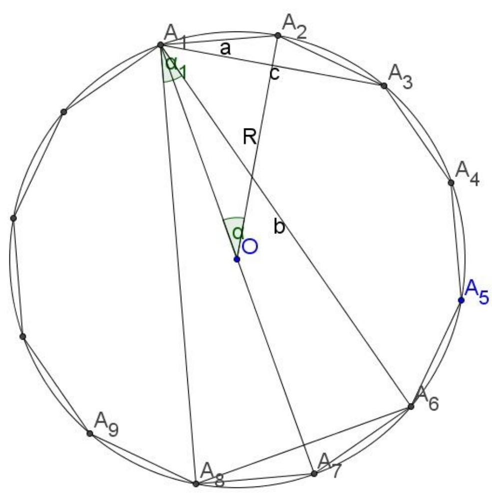
Itt az első tényező mindig nagyobb, mint 1, mert mindegyik tagja legalább 1. A második tényező pedig csak akkor lehet 1, ha $x = z = 1$. Mivel $x = 2y+1$ és $z = 2^y$, így ez akkor következik be, ha $x = 1$ és $y = 0$. Ekkor $x^4 + 4^x = 5$, p azonban 5-nél nem nagyobb. Így a feladatban szereplő egyenletnek valóban nincs egész megoldása.

5. Bizonyítsd be, hogy az $A_1A_2A_3 \ldots A_{12}$ szabályos tizenkétszögben

$$\frac{1}{|A_1A_2|^2} + \frac{1}{|A_1A_6|^2} = \frac{4}{|A_1A_3|^2}.$$

Megoldás. Jelöljük a szabályos tizenkétszög köré írt körének középpontját O-val, sugara pedig legyen R. Legyen $|A_1A_2| = a$, $|A_1A_6| = b$ és $|A_1A_3| = c$. Most a bizonyítandó állítás így alakul: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{4}{c^2}$.

Mivel az A_6A_8 ív éppen kétszerese az A_1A_2 ívnek, ezért az A_6A_8 ívhez tartozó kerületi szög egyenlő az A_1A_2 ívhez tartozó középponti szöggel, azaz $A_6A_1A_8\angle = A_1OA_2\angle$. Ebből következik, hogy az A_1OA_2 és az $A_6A_1A_8$ egyenlő szárú háromszögek hasonlók. A hasonlóság miatt és mivel $A_6A_8 = A_1A_3 = c$, ezért felírhatjuk a következő aránypárt: $\frac{R}{a} = \frac{b}{|A_6A_8|}$, azaz $\frac{R}{a} = \frac{b}{c}$. Az $A_1A_6A_7$ háromszög Thálész tétele miatt nyilván derékszögű, így a Pitagorasz tételt alkalmazva kapjuk, hogy $(2R)^2 = b^2 + |A_6A_7|^2 = b^2 + a^2$, hiszen $|A_6A_7| = |A_1A_2| = a$. Innen $2R = \sqrt{a^2+b^2}$.



A kapott egyenlőséget behelyettesítve az előbb kapott aránypárba kapjuk, hogy $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2a} = \frac{b}{c}$, azaz $\frac{a^2+b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{c^2}$, vagyis $\frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{4}{c^2}$. A kapott egyenlőség bal oldalát felbontva összegre adódik

$$\frac{b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2}{a^2b^2} = \frac{4}{c^2}, \text{ innen pedig } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{4}{c^2}, \text{ ami a bizonyítandó állítás.}$$

12. évfolyam

1. Bizonyítsd be, hogy ha n természetes szám, akkor $\left(5+\sqrt{26}\right)^n$ tizedestört alakjában a tizedesvesszőt követő első n számjegy egyenlő!

Megoldás. Ha az $\left(5+\sqrt{26}\right)^n$ kifejezést tagokra bontjuk, akkor azok a tagok, amelyeknél a $\sqrt{26}$ páros hatványon szerepel, egész számot adnak, amelyekben $\sqrt{26}$ kitevője páratlan, $\sqrt{26}$ egész számszorosát adja, tehát $\left(5+\sqrt{26}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{26}$, azaz a_n és b_n pozitív együtthatók.

Ha az $\left(5-\sqrt{26}\right)^n$ kifejezést tagokra bontjuk, akkor az előbbiekhez képest annyi a változás, hogy azok a tagok, amelyeknél a $\sqrt{26}$ páratlan hatványon szerepel, azok negatívak lesznek, tehát $\left(5-\sqrt{26}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{26}$.

Eszerint $\left(5+\sqrt{26}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{26} = 2a_n - \left(a_n - b_n\sqrt{26}\right) = 2a_n - \left(5-\sqrt{26}\right)^n$.

A kivonandó alapja negatív és $5{,}1^2 = 26{,}01$ folytán $0 < \sqrt{26} - 5 < 0{,}1$ áll fenn.

Ezek szerint $\left(5+\sqrt{26}\right)^n$ páros kitevőre kisebb, de $0{,}1^n$-nél nem kevesebb, egy páros egésznél, tehát a tizedesvessző előtt páratlan szám áll, utána pedig az első n számjegy 9-es; páratlan n esetén viszont a $0{,}1^n$-nél kevesebbel halad meg egy páros egész számot, tehát a tizedesvessző előtt páros egész szám áll, utána pedig n darab 0 következik.

2. Egy könyvtár ki- és bejáratánál egy-egy tábla áll. Minden be-, illetve kilépőnek fel kell írnia a megfelelő táblára, hogy hány embert talált, illetve hagyott a könyvtárban. Bizonyítsd be, hogy egy teljes nap során ugyanazok a számok kerülnek a két táblára, legfeljebb más sorrendben (feltesszük, hogy egyszerre csak egy ember érkezik vagy távozik).

Megoldás. Ha valaki bemegy a könyvtárba, akkor ezután két olyan dolog történhet meg, amely a feladat szempontjából lényeges. Vagy eszébe jut, hogy otthon hagyta az olvasójegyét és távozik, mielőtt egy másik ember bejönne – ekkor nyilvánvaló, hogy ugyanannyi embert hagy ott, mint amennyit talált –, vagy ottmarad, és ez esetben újak érkeznek utána, az olvasók száma nő a polcok között.
A második esetet vizsgáljuk meg közelebbről. Miután az egyes személyek nincsenek kitüntetve, teljesen mindegy, hogy adott pillanatban ki lép be vagy ki hagyja el a termet, ezért megállapodhatunk abban, hogy mindig az menjen el, aki utoljára bejött. Válasszunk ki egy olvasót, legyen ő A. Amikor A bejön, felírja, hogy n számú embert talált az olvasóteremben. Ezután leül, közben jönnek-mennek a többiek. Tegyük fel, hogy k számú olvasó érkezett még. Egyszercsak A feláll és elindul az ajtó felé. Ekkor őt megkérjük, hogy maradjon még, helyette pedig elküldjük azt, aki legutoljára jött be, akinek a száma a belépő tábla legalján van, $n+k$. A feladat szempontjából teljesen mindegy, hogy A ottmarad, hiszen egy fő elment helyette. Ez pedig úgy történt, hogy minden távozó ugyanazt a számot írta a távozási táblára, mint a másikra, amikor bejött. Ha egy idő múlva senki sem jön többé olvasni, akkor

kiengedjük az eddig benn levőket érkezésük fordított sorrendjében. Így sor kerül A-ra is, majd többi társára, míg végül senki sem marad benn. Így tehát minden olvasóhoz egyértelműen hozzárendeltünk egy számpárt. Miután a feladat szempontjából lényeges változást nem tettünk, ugyanazt az eredményt kell kapnunk, mint egyébként, vagyis a két táblán ugyanazok a számok szerepelnek, csak más sorrendben.

3. Milyen n és k természetes számok esetén alkot számtani sorozatot a következő három kifejezés:

$$\binom{n}{k-1},\ \binom{n}{k},\ \binom{n}{k+1}.$$

Megoldás. A feladat követelménye szerint a szomszédos binomiális együtthatópárok különbsége egyenlő kell hogy legyen, vagyis a különbségek különbsége 0:

(1) $$\binom{n}{k-1}-2\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=0.$$

Itt feltesszük, hogy $k-1\geq 0$ és $k+1\leq n$. A három binomiális együttható akkor és csak akkor alkot számtani sorozatot, ha az (1) egyenlőség teljesül.

Szorozzuk be (1) mindkét oldalát $\dfrac{(k+1)!(n-k+1)!}{n!}$-sal. Ez $1\leq k\leq n-1$ folytán létezik és pozitív, így (1) akkor és csakis akkor teljesül, ha

$k(k+1)-2(k+1)(n-k+1)+(n-k+1)(n-k)=0$, azaz $n^2-4nk+4k^2-n-2=0$.

Eszerint $n=(n-2k)^2-2$, azaz n egy egész szám abszolút értékénél 2-vel kisebb. Ha $u=|n-2k|$, u pozitív egész szám, akkor $n=u^2-2$, ahol $u=n-2k$ vagy $u=2k-n$, azaz k-ra a következő értéket kapjuk:

$$k=k_1=\frac{n-u}{2}=\frac{u^2-u}{2}-1=\binom{u}{2}-1 \text{ vagy } k=k_2=\frac{n+u}{2}=\binom{u+1}{2}-1.$$

Az utolsó alakból látható, hogy k-ra egész értéket kapunk.

Itt $u\geq 2$ kell hogy teljesüljön, hogy n pozitív egésznek adódjék. Az $u=2$-höz tartozó két k értékre azonban $1\leq k\leq n-1$ első, illetve második egyenlőtlensége nem teljesül.

Ha $u\geq 3$, akkor

$$k_1=\binom{u}{2}-1\geq 1 \text{ és } k_1=\frac{n-u}{2}<n.$$

Mivel pedig $k_1+k_2=n$ és $k_1<k_2$, így mindkét k érték kielégíti az $1\leq k\leq n-1$ egyenlőtlenséget.

A feladat követelményei teljesülésének szükséges és elégséges feltételéből indultunk ki és ekvivalens átalakításokat végeztünk, így azok az n, k számpárok felelnek meg, amelyeknél valamilyen 2-nél nagyobb u egésszel

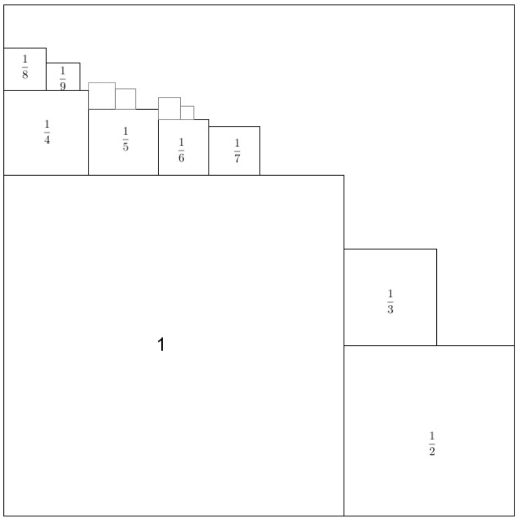
$$n=u^2-2 \text{ és } k=\binom{u}{2}-1 \text{ vagy } k=\binom{u+1}{2}-1.$$

4. Adott négyzeteknek egy végtelen sorozata, ahol az oldalak hossza rendre $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$. Bizonyítsd be, hogy van olyan négyzet, amelyben mindezek a négyzetek átfedés nélkül elhelyezhetők, és keresd meg a legkisebb ilyen négyzetet!

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy négyzeteink elhelyezhetők egy 1,5 oldalhosszúságú négyzetben, azután bebizonyítjuk, hogy kisebb oldalú négyzetben már az 1 és 0,5 oldalhosszúságú négyzet sem helyezhető el átfedés nélkül.

a) *Az összes négyzet elhelyezhető egy 1,5 oldalhosszúságú négyzetben.*

Helyezzük az 1 oldalú négyzet mellé az $\frac{1}{2}$ oldalút és fölé az $\frac{1}{3}$ oldalút, majd az előbbi fölé az $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ és $\frac{1}{7}$ oldalút, a továbbiakban pedig minden négyzetre a fele akkora oldalút és a rá következőt.



Az utóbbi kettő nyilván nem nyúlik túl az alattuk levő négyzeten, és

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}<4\cdot\frac{1}{4}=1$$

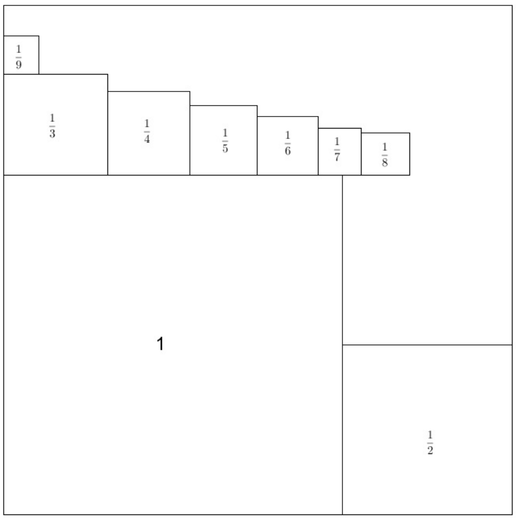
folytán az első négy négyzet sem az 1 oldalú négyzeten.

Az $\frac{1}{k}$ oldalú négyzet ($k=4,5,6,7$) és a ráhelyezettek felfelé nem nyúlnak magasabbra, mint

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{2k}+\frac{1}{4k}+\frac{1}{8k}+\cdots=\frac{2}{k}\le\frac{1}{2},$$

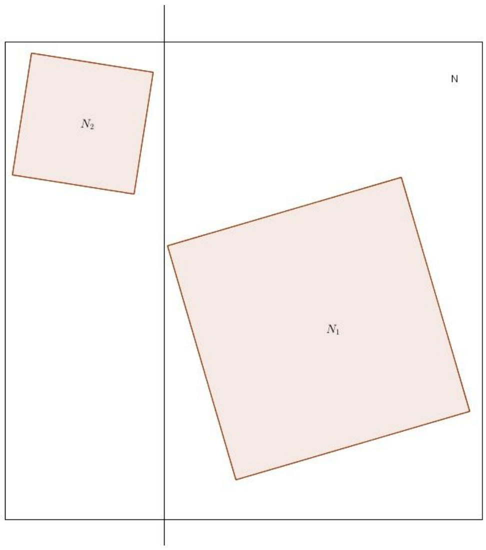
Így négyzeteink valóban elhelyezhetők egy 1,5 oldalhosszúságú négyzetben.

b) *Az 1 és a 0,5 oldalhosszúságú négyzet nem helyezhető el átfedés nélkül 1,5-nél kisebb oldalú négyzetben.*

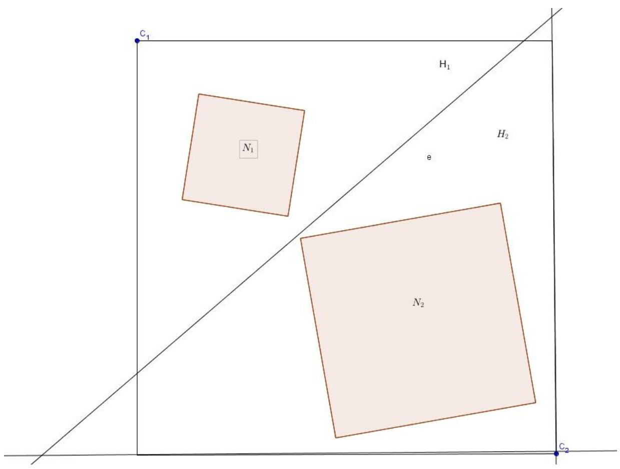


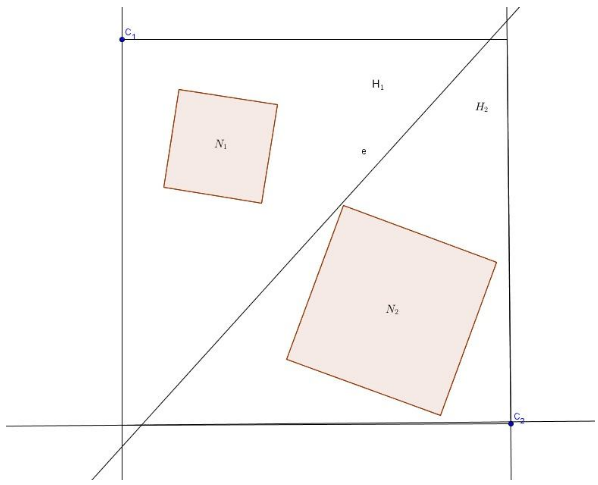
Helyezkedjék el az 1 oldalú N_1 és az $\frac{1}{2}$ oldalú N_2 négyzet egy N négyzetben úgy, hogy ne legyen közös belső pontjuk. Ekkor van olyan e egyenes, amelynek N_1 és N_2 ellenkező oldalán fekszik. Ha e párhuzamos N valamelyik oldalával, akkor két téglalapra bontja azt, és mindegyiknek az e-re merőleges oldala legalább akkora, mint a sávban fekvő négyzet oldala. Ez esetben tehát N oldala legalább akkora, mint N_1 és N_2 oldalának összege.

Ha e metszi N mindegyik oldalegyenesét, akkor vegyük mindkét oldalán N-nek a tőle legtávolabbi C_1, illetve C_2 csúcsát. A C_1-en, illetve C_2-n átmenő oldalegyenesek e-vel egy-egy H_1, illetve H_2 derékszögű háromszöget alkotnak. Ezek egyike N_1-et, másika N_2-t tartalmazza. Állításunk bizonyítására elegendő felhasználni a következő segédtételt: *Egy derékszögű háromszög tartalmazta négyzetek közül az a legnagyobb, amelyiknek két oldala a háromszög befogóin nyugszik, egy csúcsa pedig az átfogón van.*



Valóban, ha ez igaz, akkor a H_1-ben és H_2-ben elhelyezhető legnagyobb négyzetek átlója N-nek a C_1C_2 átlójára esik, és mivel a négyzetek nem fedhetik át egymást, így átlóik összege N átlóját, oldalhosszaik összege tehát N oldalát adja, vagyis igaz a bizonyítandó állítás is.





5. Az ABC háromszög B és C csúcsain átmenő kör az AB oldalt D pontban, az AC oldalt pedig E pontban metszi. A háromszög AF súlyvonala DE-t G pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy ekkor

$$\frac{|GD|}{|GE|}=\frac{|AC|^2}{|AB|^2}.$$

Megoldás. A DGA, illetve az EGA háromszögek területeinek aránya egyenlő a GD, illetve a GE szakaszok arányával, hiszen e háromszögek GD, illetve GE oldalakhoz tartozó magasságvonalai egyenlők. Legyen $BAF\angle = \varphi$ és $FAC\angle = \psi$. Felhasználva a háromszög trigonometrikus területképletét, felírhatjuk, hogy

$$\frac{|DG|}{|GE|} = \frac{T_{DGA}}{T_{GEA}} = \frac{|AD| \cdot |AG| \cdot \sin\varphi}{|AE| \cdot |AG| \cdot \sin\psi}.$$

Mivel F az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja, ezért

$$T_{BFA} = T_{FCA},$$

azaz

$$\frac{|AB| \cdot |AF| \cdot \sin\varphi}{2} = \frac{|AC| \cdot |AF| \cdot \sin\psi}{2},$$

ahonnan

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

A kapott eredményt felhasználva adódik, hogy

$$\frac{|DG|}{|GE|} = \frac{|AD|}{|AE|} \cdot \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Legyen $ABC\angle = \beta$ és $ACB\angle = \gamma$. A $BCED$ négyszög húrnégyszög, ezért

$$DEC\angle = 180° - \beta, \text{ azaz } DEA\angle = \beta.$$

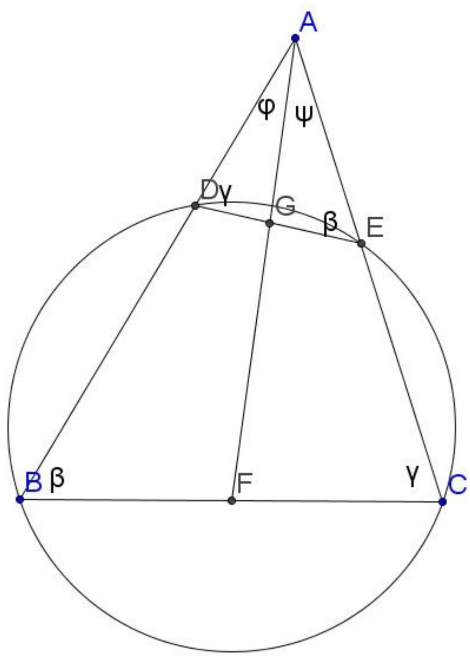
Hasonlóképpen kaphatjuk meg, hogy

$$ADE\angle = \gamma,$$

így az ADE háromszög hasonló az ACB háromszöghöz, amiből következik, hogy

$$\frac{|AD|}{|AE|} = \frac{|AC|}{|AB|}, \text{ illetve } \frac{|GD|}{|GE|} = \frac{|AC|^2}{|AB|^2},$$

és éppen ezt akartuk belátni.



A III. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

9. évfolyam

1. Kanalas Vidor, Matematikai Gimnázium, Belgrád, **I. díj**
2. Homolya Miklós, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
3. Takács Emese, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **II. díj**
4. Bodócsi Endre, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
5. Balog Dániel, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
6. Vidács Vilmos, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
7. Gleszer Erik, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
8. Kovács Ildikó, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
9. Girizd Lóránd, Zentai Gimnázium, Zenta, **III. díj**
10. Sinka Mónika, Zentai Gimnázium, Zenta, **III. díj**

10. évfolyam

1. Csizmadija Laura, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **I. díj**
2. Gombár Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Kalmár Gergely, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Juhász Andor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**

11. évfolyam

1. Fésűs Attila, Jovan Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék, **I. díj**
2. Takács Árpád, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **I. díj**
3. Csizmadia Zsolt, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Varga Dávid, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **II. díj**
5. Kálózi Miklós, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **II. díj**
6. Lakatos Zoltán, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**
7. Sóti Attila, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
8. Borbás Imre, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
9. Döme Zsolt, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
10. Somogyi Huba, Műszaki Középiskola, Szabadka, **III. díj**

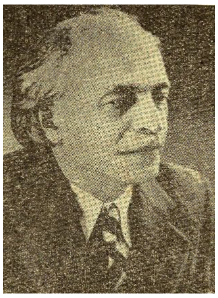
12. évfolyam

1. Sóti Valentin, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **II. díj**
2. Holló Dóra, Dositej Obradović Gimnázium, Topolya, **III. díj**

A IV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Előadó: Boros István, magiszter
Előadás címe: Dominók, tetramínók

A Versenybizottság értékeli a versenyzők kidolgozásait: Csikós Pajor Gizella, Rozsnyik Andrea, Miklós Gyöngyi, Zolnai Irén.



IV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2006. december 9.

<u>9. évfolyam</u>

1. Csaba, András, Béla felesége – nem feltétlenül azonos sorrendben – Edit, Margit, Katalin. E hat személy életkorának összege 153 év. Mindegyik férj 7 évvel idősebb a feleségénél. András 3 évvel idősebb mint Katalin. Margit és András együtt 48 éves. Béla és Margit életkorának összege 52 év. Határozd meg e hat személy életkorát, ha azok mindegyike – években számolva – egész szám.

2. Az $\overline{abcd}$ (tízes számrendszerbeli) négyjegyű számról tudjuk, hogy

$$\overline{abc} + \overline{ab} + a = 219 \text{ és } a + b + c + d = 21.$$

Melyik ez a négyjegyű szám?

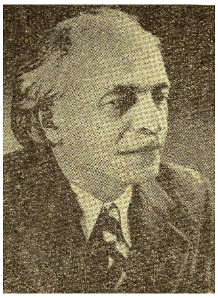
3. Az ABC háromszögben legyen $a = |BC|$, $b = |AC|$ és $c = |AB|$. Igazold, hogy az A csúcsból kiinduló t_a súlyvonal hosszúságára igaz, hogy

$$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

4. Mutasd meg, hogy $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 1003 + 1004 \cdot 1005 \cdot \ldots \cdot 2006$ osztható 2007-tel!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



IV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2006. december 9.

<u>10. évfolyam</u>

1. Két kofa összesen 100 tojást adott el. A tojások darabját egyikük más áron adta mint a másik, de végül a bevételük ugyanannyi volt. Az egyik azt mondta a másiknak: „A te tojásaidért én összesen 45 petákot kaptam volna." Mire a másik azt felelte: „Én meg a tieidért összesen 20 petákot." Ki hány tojást adott el?

2. Határozd meg az $\overline{abcd}$ (tízes számrendszerbeli) négyjegyű számot, ha tudjuk róla, hogy

$$\overline{cda}-\overline{abc}=297 \text{ és } a+b+c=23.$$

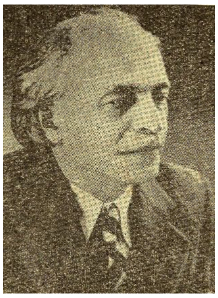
3. Igazold, hogy a, b és c pozitív valós számok esetén fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)\geq 6abc.$$

4. Az $r_1=6$ sugarú k_1 kör és az $r_2=3$ sugarú k_2 kör kívülről érintik egymást, az $r=9$ sugarú k kört pedig mindkettő belülről érinti. A k_1 és k_2 körök közös érintőegyenese a k kört P és Q pontokban metszi. Határozd meg a $|PQ|$ távolságot!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



IV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2006. december 9.

11. évfolyam

1. Bontsd tényezőire az n^4+4 **kifejezést, majd igazold, hogy**

$$\frac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(11^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(12^4+\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{313}.$$

2. Oldd meg a következő egyenletet:

$$\log_{x+8}\left(5-\sqrt{1+2x+x^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

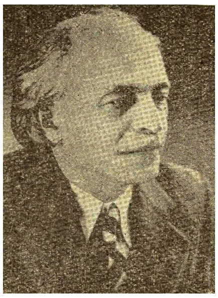
3. Oldd meg a következő egyenletet, ha a **és** b **pozitív valós számok:**

$$\frac{a\sin x+b}{b\cos x+a}=\frac{a\cos x+b}{b\sin x+a}.$$

4. Adott a szabályos $SABC$ **tetraéder. Mekkora szög alatt látszanak az** ABC **alapháromszög élei az** SO **magasság** D **felezőpontjából?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



IV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2006. december 9.

12. évfolyam

1. Határozd meg az

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0 \textbf{ és } x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0$$

körök közös húrjának hosszúságát!

2. Az R sugarú gömb köré írt kúpok közül melyiknek legkisebb a felszíne? Határozd meg ezt a felszínt!

3. Oldd meg a következő egyenletet:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + 6\frac{\cos x}{\sin x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} - 4\sqrt{3}\,.$$

4. Hány olyan számtani sorozat van, amelynek elemei természetes számok és az első 37 elem összege 1998?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

A IV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

9. évfolyam

1. Csaba, András, Béla felesége – nem feltétlenül azonos sorrendben – Edit, Margit, Katalin. E hat személy életkorának összege 153 év. Mindegyik férj 7 évvel idősebb a feleségénél. András 3 évvel idősebb mint Katalin. Margit és András együtt 48 éves. Béla és Margit életkorának összege 52 év. Határozd meg e hat személy életkorát, ha azok mindegyike – években számolva – egész szám!

Megoldás. Ha a férfiak mindegyike 7 évvel idősebb a feleségénél, akkor a házaspárok tagjainak együttesen páratlan sok éve van, ezért Margit férje csak Csaba lehet, továbbá a három férj korának összege 87 év, míg feleségeiké 66 év. Adjuk össze Margit és András, Margit és Béla, valamint Csaba életkorát! A feltételek szerint ez az összeg 48+52+Margit életkora+7 év. Ezek szerint a három férj és Margit életkorának összege 107 év. A férjek együttes kora 87 év, Margit tehát 20 éves és férje Csaba, 27 éves. Ezek után már könnyen nyerjük, hogy András 28 éves és felesége Edit, 21 éves, Béla 32 éves és felesége Katalin, 25 éves.
Ezek az adatok kielégítik a feladatbeli feltételeket.

2. Az $\overline{abcd}$ (tízes számrendszerbeli) négyjegyű számról tudjuk, hogy

$$\overline{abc}+\overline{ab}+a=219 \text{ és } a+b+c+d=21.$$

Melyik ez a négyjegyű szám?

Megoldás. $a=1$ lehet csak, mivel $a=0$-ra a szám nem négyjegyű, $a\geq 2$ esetén pedig az első egyenlőség bal oldala legalább 222 lenne. Ezek után $b=9$, hiszen $b\leq 8$ esetén előbbi egyenletünk bal oldala legfeljebb $189+18+1=208$ lenne.
Az $a=1$ és $b=9$ értékek első egyenletünkből a

$$190+c+19+1=219$$

egyenletre vezetnek, amelyből $c=9$ és ezzel a második egyenletből $d=2$ adódik.
A keresett négyjegyű szám tehát 1992, mivel

$$199+19+1=219 \text{ és } 1+9+9+2=21.$$

3. Az ABC háromszögben legyen $a=|BC|$, $b=|AC|$ és $c=|AB|$. Igazold, hogy az A csúcsból kiinduló t_a súlyvonal hosszúságára igaz, hogy

$$t_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}\,.$$

I.Megoldás. Legyen D a BC oldal felezőpontja, E és F pedig a B és C pontok t_A súlyvonal egyenesére vetett merőleges vetületei. Tegyük fel, hogy a pontok sorrendje $A-E-D-F$. A másik esetben ($A-F-D-E$), illetve az $E=D=F$ elfajuló esetben is a bizonyítás hasonló. A BED és CFD háromszögek egybevágóak. Legyen $|DE|=|DF|=x$ és $|CF|=|BE|=y$. Az ABE és AFC háromszögekben:

$$(t_a - x)^2 + y^2 = c^2 \text{ és } (t_a + x)^2 + y^2 = b^2.$$

Összeadva a fenti két egyenlőséget adódik, hogy

$$2t_a^2 + 2x^2 + 2y^2 = b^2 + c^2.$$

A DFC derékszögű háromszögből kapjuk, hogy $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}a^2$, ebből pedig

$$2t_a^2 + 2\cdot\frac{a^2}{4} = b^2 + c^2$$

következik, ami a kívánt egyenlőséget adja.

II.Megoldás. Jelölje t_a az ABC háromszög A csúcsából kiinduló súlyvonalat, h_a pedig az A csúcshoz tartozó magasságvonalat. Legyen $|DE| = x$, ahol D a súlyvonal BC oldalon nyugvó végpontja, E pedig a h_a magasság talppontja. A továbbiakban tegyük fel, hogy az E pont a C és D pontok közé esik. Fordított esetben, ha az E pont a D és B pontok közé esik, illetve az $E = D$ elfajuló esetben is a megoldás menete hasonló.

Az AED derékszögű háromszögből $t_a^2 = h_a^2 + x^2$, az AEB derékszögű háromszögből $h_a^2 = c^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2$, az AEC derékszögű háromszögből pedig $h_a^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2} + x\right)^2$.

A második és harmadik egyenlőségből adódik, hogy $x = \frac{b^2 - c^2}{2a}$, az első egyenlőségből pedig, hogy $t_a^2 = c^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + x^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$, amiből gyökvonással jön a kívánt egyenlőség.

4. Mutasd meg, hogy $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 1003 + 1004\cdot 1005\cdot\ldots\cdot 2006$ **osztható 2007-tel!**

Megoldás. Az $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 1003 + 1004\cdot 1005\cdot\ldots\cdot 2006$ összeg második tagjának tényezőit felbonthatjuk a következő módon:

$$1004 = 2007 - 1003,$$
$$1005 = 2007 - 1002,$$
$$\vdots$$
$$2006 = 2007 - 1.$$

A szorzásokat elvégezve a tagok egy részében szerepel 2007, így ezek összege osztható 2007-tel. A maradék pedig a $(-1003)\cdot(-1002)\cdot(-1001)\cdot\ldots\cdot(-1)$ szorzat. Mivel a szorzatban páratlan sok tényező szerepel, a szorzat előjele negatív, értéke pedig megegyezik az adott összeg első tagjában szereplő szorzat értékével, így az összegük nulla. Az összeg tehát valóban osztható 2007-tel.

10. évfolyam

1. Két kofa összesen 100 tojást adott el. A tojások darabját egyikük más áron adta mint a másik, de végül a bevételük ugyanannyi volt. Az egyik azt mondta a másiknak: „A te tojásaidért én összesen 45 petákot kaptam volna.” Mire a másik azt felelte: „Én meg a tieidért összesen 20 petákot.” Ki hány tojást adott el?

I.Megoldás. Ha az egyik kofa x db tojást darabonként a petákért, a másik pedig $100-x$ tojást darabonként b petákért adott, akkor egyrészt $ax=(100-x)b$, másrészt $(100-x)a=45$ és $xb=20$. Szorozzuk össze az utolsó két egyenletet. Ebből adódik, hogy $20(100-x)a=45xb$. Ha ezt elosztjuk az első egyenlettel, akkor a következőt kapjuk:

$$\frac{20(100-x)a}{xa}=\frac{45xb}{(100-x)b}$$

A bal, illetve a jobb oldalon álló törtekben az a, illetve b tényezővel egyszerűsítve, majd mindkét oldalt $\frac{x(100-x)}{5}$-tel szorozva, a lehetséges egyszerűsítések után a $4(100-x)^2=9x^2$ egyenlethez jutunk. Vegyük észre, hogy mindkét oldalon négyzetszámok állnak, márpedig két pozitív szám négyzete akkor és csak akkor egyenlő, ha maguk a számok is egyenlők, azaz $2(100-x)=3x$, amibő $200=5x$, tehát $x=40$ kell legyen. Így $b=\frac{1}{2}$ peták és $a=\frac{3}{4}$ peták. Ez valóban megoldás, hiszen ha az egyik kofa 40 tojást adott el darabonként $\frac{3}{4}$ petákért, akkor 30 petákot kapott a tojásaiért, a másik kofa a 60 darab tojásért pedig a 60 felét, tehát 30 petákot, s így valóban azonos bevételre tettek szert. Ha a 40 tojást adták volna egyenként $\frac{1}{2}$ petákért, a 60-at pedig $\frac{3}{4}$ petákért, úgy 20, illetve 45 peták a bevétel.

II.Megoldás. A két kofa által eladott tojások darabszáma arányának a reciproka egyenlő az értük egyenként kért petákok arányával, mivel a két kofa bevétele azonos. Ez azt jelenti, hogy ha a két kofa „árat cserél”, akkor feltételezett bevételük aránya, azaz a $\frac{45}{20}$ egyenlő az általuk eladott darabszámok arányának a négyzetével, hiszen a bevétel a tojások számarányának és a darabárak arányának a szorzata, ám az „árcsere” miatt ez utóbbi arány az előbbivel egyenlő. Mivel $\frac{45}{20}=\frac{9}{4}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$, ezért a kofák a tojásokat $3:2$ arányban birtokolják, ami 100 tojásra $60:40$ arányt jelenti, vagyis egyikük 60, a másikuk 40 tojással kofálkodott.

2. Határozd meg az $\overline{abcd}$ (tízes számrendszerbeli) négyjegyű számot, ha tudjuk róla, hogy

$$\overline{cda} - \overline{abc} = 297 \text{ és } a + b + c = 23.$$

Megoldás. Végezzük el az alábbi ekvivalens átalakításokat:

$$\begin{array}{c} \overline{cda} - \overline{abc} = 297 \\ a + b + c = 23 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 100c + 10d + a - 100a - 10b - c = 297 \\ a + b + c = 23 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 99(c - a) + 10(d - b) = 297 \\ a + b + c = 23 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c} c - a = 3 \quad \wedge \quad b = d \\ a + b + c = 23 \\ \hline \end{array}$$

$$b = d \quad \wedge \quad 2a + b = 20$$

$a = 0$	$b = 20$	nem jó
$a = 1$	$b = 18$	nem jó
$a = 2$	$b = 16$	nem jó
$a = 3$	$b = 14$	nem jó
$a = 4$	$b = 12$	nem jó
$a = 5$	$b = 10$	nem jó
$a = 6$	$b = 8$	$c = 9$ jó
$a = 7$	$b = 6$	nem jó
$a = 8$	$b = 4$	nem jó
$a = 9$	$b = 2$	nem jó

A keresett szám tehát 6898.

3. Igazold, hogy a, b és c pozitív valós számok esetén fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) \geq 6abc.$$

Megoldás. Végezzük el a következő ekvivalens átalakításokat:

$$\begin{aligned} & ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) = \\ & = a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 = \\ & = a(b^2 - 2bc + c^2) + b(a^2 - 2ac + c^2) + c(a^2 - 2ab + b^2) + 6abc = \\ & = a(b-c)^2 + b(a-c)^2 + c(a-b)^2 + 6abc \geq 6abc. \end{aligned}$$

4. Az $r_1 = 6$ sugarú k_1 kör és az $r_2 = 3$ sugarú k_2 kör kívülről érintik egymást, az $r = 9$ sugarú k kört pedig mindkettő belülről érinti. A k_1 és k_2 körök közös érintőegyenese a k kört P és Q pontokban metszi. Határozd meg a $|PQ|$ távolságot!

Megoldás. Ha ez a közös érintő a k_1 és k_2 kört egy közös érintési pontban metszi, akkor legyen ez a pont R, a k kör középpontja pedig O. Mivel ORP háromszög derékszögű, ezért

$$|PQ| = 2|PR| = 2\sqrt{|OP|^2 - |OR|^2} = 2\sqrt{9^2 - 3^2} = 2\sqrt{72} = 12\sqrt{2}\,.$$

Ha a közös érintő nem közös érintési pontban metszi a köröket, akkor legyenek O, O_1 és O_2 rendre a k, k_1 és k_2 körök középpontjai, T, T_1 és T_2 pedig rendre az O, O_1 és O_2 pontok PQ érintőre vetett merőleges vetületei. Az O_2 pontból húzott PQ-val párhuzamos egyenes az N és N_1 pontokban metszi az OT és O_1T_1 szakaszokat. Tudjuk, hogy

$$|O_1N_1| = 3\,,\ |O_1O_2| = 9 \text{ és } |OO_2| = 6\,.$$

Az $O_1O_2N_1$ és OO_2N háromszögek hasonlóságából következik, hogy

$$\frac{|ON|}{|O_1N_1|} = \frac{|OO_2|}{|O_1O_2|}, \text{ ahonnan } |ON| = |O_1N_1| \cdot \frac{|OO_2|}{|O_1O_2|} = 2\,.$$

Mivel $|OT| = |ON| + |NT| = 5$, így a POT háromszögből adódik, hogy

$$|PQ| = 2|PT| = 2\sqrt{|OP|^2 - |OT|^2} = 2\sqrt{9^2 - 5^2} = 4\sqrt{14}\,.$$

11. évfolyam

1. Bontsd tényezőire az n^4+4 kifejezést, majd igazold, hogy

$$\frac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(11^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(12^4+\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{313}.$$

Megoldás. Vegyük észre, hogy

$$n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=(n^2+2)^2-(2n)^2=$$
$$=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)=\left((n-1)^2+1\right)\left((n+1)^2+1\right).$$

Végezzük el az alábbi ekvivalens átalakításokat:

$$\frac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(11^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(12^4+\frac{1}{4}\right)}=$$
$$=\frac{\left(2^4+4\right)\left(6^4+4\right)\left(10^4+4\right)\cdots\left(22^4+4\right)}{\left(4^4+4\right)\left(8^4+4\right)\left(12^4+4\right)\cdots\left(24^4+4\right)}=$$
$$=\frac{\left(1^2+1\right)\left(3^2+1\right)\left(5^2+1\right)\left(7^2+1\right)\cdots\left(21^2+1\right)\left(23^2+1\right)}{\left(3^2+1\right)\left(5^2+1\right)\left(7^2+1\right)\left(9^2+1\right)\cdots\left(23^2+1\right)\left(25^2+1\right)}=\frac{2}{25^2+1}=\frac{1}{313}.$$

2. Oldd meg a következő egyenletet:

$$\log_{x+8}\left(5-\sqrt{1+2x+x^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Megoldás. A logaritmusfüggvény tulajdonságai alapján a kikötések

$$x+8>0 \text{ és } x+8\neq 1,$$

azaz $x>-8$ és $x\neq -7$, valamint

$$5-\sqrt{1+2x+x^2}=5-|x+1|>0,$$

amelynek megoldása $x\in(-6,4)$.

1.eset: $x\in(-6,-1)$

$$\log_{x+8}\left(5-\sqrt{1+2x+x^2}\right)=\frac{1}{2}, \text{ ahonnan } \log_{x+8}\left(5+x+1\right)=\frac{1}{2}, \text{ azaz } 6+x=\sqrt{x+8}.$$

A kapott egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve adódik az $x^2+11x+28=0$ másodfokú egyenlet, amelynek megoldásai $x=-4$ és $x=-7$, de csak az első megoldás van benne a szemlélt értelmezési tartományban.

2.eset: $x\in(-1,4)$

$$\log_{x+8}\left(5-\sqrt{1+2x+x^2}\right)=\frac{1}{2}, \text{ ahonnan } \log_{x+8}\left(5-x-1\right)=\frac{1}{2}, \text{ azaz } 4-x=\sqrt{x+8}.$$

A kapott egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve adódik az $x^2-9x+8=0$ másodfokú egyenlet, amelynek megoldásai $x=1$ és $x=8$, de csak az első megoldás van benne a szemlélt értelmezési tartományban.

Az eredeti logaritmusos egyenlet megoldásai tehát $x=-4$ és $x=1$.

3. Oldd meg a következő egyenletet, ha a és b pozitív valós számok:

$$\frac{a\sin x+b}{b\cos x+a}=\frac{a\cos x+b}{b\sin x+a}.$$

Megoldás. A nevező nem lehet nulla, tehát a kikötések $b\cos x+a\neq 0$ és $b\sin x+a\neq 0$. A fenti egyenletből adódik, hogy

$$(a\sin x+b)(b\sin x+a)=(a\cos x+b)(b\cos x+a),$$

ebből pedig némi rendezés után adódik, hogy

$$(\sin x-\cos x)(a^2+b^2+ab(\sin x+\cos x))=0.$$

Ha $\sin x-\cos x=0$, akkor $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$. Mivel

$$a^2+b^2+ab(\sin x+\cos x)>a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geq 0,$$

így $a^2+b^2+ab(\sin x+\cos x)\neq 0$, tehát ennek az egyenletnek nincs megoldása.

Az eredeti egyenlet megoldása csupán $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$.

4. Adott a szabályos $SABC$ tetraéder. Mekkora szög alatt látszanak az ABC alapháromszög élei az SO magasság D felezőpontjából?

I.Megoldás. Legyen AM súlyvonal és legyen az O pont az ABC alapháromszög súlypontja, az N pont pedig az AO szakasz felezőpontja. Ekkor $DON\Delta\cong DOM\Delta$ (hiszen $|NO|\cong|MO|$, az OD oldal közös, az O pontnál levő szög pedig derékszög), ahonnan következik, hogy $|DN|\cong|DM|$. A DN szakasz az $ASO\Delta$ középvonala. Ebből következik, hogy

$$|DN|=\frac{|SA|}{2}, \text{ tehát } |DM|=\frac{|SA|}{2}=\frac{|BC|}{2},$$

vagyis a DM szakasz a $BCD\Delta$ súlyvonala, M a körülírt körének középpontja, amelyből $BDC\angle=90°$ adódik. A többi alapélre az állítás hasonlóan következik.

II.Megoldás. Az $OBD\Delta\cong OCD\Delta$, így $|BD|\cong|CD|$, azaz a $BCD\Delta$ egyenlő szárú. Mivel $|OB|=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, ahol a-val jelöljük a tetraéder élét és $|OD|=\frac{H}{2}=\frac{a}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$, ezért

$$|BD|^2=|OB|^2+|OD|^2=\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{6}=\frac{a^2}{2}.$$

Innen $|BD|=\frac{a\sqrt{2}}{2}=|CD|$, ezért a $BCD\Delta$ egyenlő szárú és derékszögű, azaz $BCD\angle=90°$.

12. évfolyam

1. Határozd meg az

$$x^2+y^2-2x-4y-4=0 \textbf{ és } x^2+y^2-3x+4y=0$$

körök közös húrjának hosszúságát!

Megoldás. Kivonva egymásból a két köregyenletet kapjuk az $x-8y-4=0$, azaz $x=8y+4$ egyenletet, amelyet behelyettesítve a második köregyenletbe kapjuk a $65y^2+44y+4=0$ másodfokú egyenletet. Ennek megoldásai

$$y_1=\frac{-22-4\sqrt{14}}{65} \text{ és } y_2=\frac{-22+4\sqrt{14}}{65}$$

A másik ismeretlen megfelelő értékei pedig $x_1=\dfrac{84-32\sqrt{14}}{65}$ és $x_2=\dfrac{84+32\sqrt{14}}{65}$.

A metszéspontok koordinátái tehát

$$A\left(\frac{84-32\sqrt{14}}{65},\frac{-22-4\sqrt{14}}{65}\right) \text{ és } B\left(\frac{84+32\sqrt{14}}{65},\frac{-22+4\sqrt{14}}{65}\right),$$

a közöttük levő távolság pedig $|AB|=8\sqrt{\dfrac{14}{65}}$.

2. Az R sugarú gömb köré írt kúpok közül melyiknek legkisebb a felszíne? Határozd meg ezt a felszínt!

Megoldás. Jelölje r a gömb köré írt kúp alapkörének sugarát s pedig a kúp alkotóját.

Mivel $R:(s-r)=r:H$, ezért $HR=rs-r^2$, ahonnan $s=\dfrac{HR+r^2}{r}$.

Mivel $R:(H-R)=r:s$, ezért $sR=rH-rR$, ahonnan $s=\dfrac{rH-rR}{R}$.

Ekkor $\dfrac{HR+r^2}{r}=\dfrac{rH-rR}{R}$, ahonnan $HR^2+r^2R=r^2H-r^2R$, illetve $H=\dfrac{2r^2R}{r^2-R^2}$.

Kiszámítva a kúp felszínét kapjuk, hogy

$$F=r\pi(r+s)=r\pi\left(r+\sqrt{r^2+H^2}\right)=r\pi\left(r+\sqrt{r^2+\frac{4r^4R^2}{(r^2-R^2)^2}}\right)=$$

$$=r\pi\left(r+r\sqrt{\frac{r^4-2r^2R^2+R^4+4r^2R^2}{(r^2-R^2)^2}}\right)=r^2\pi\left(1+\sqrt{\left(\frac{r^2+R^2}{r^2-R^2}\right)^2}\right)=$$

$$=r^2\pi\left(1+\frac{r^2+R^2}{r^2-R^2}\right)=r^2\pi\frac{r^2-R^2+r^2+R^2}{r^2-R^2}=\frac{2r^4\pi}{r^2-R^2}.$$

A kapott függvény deriváltja:

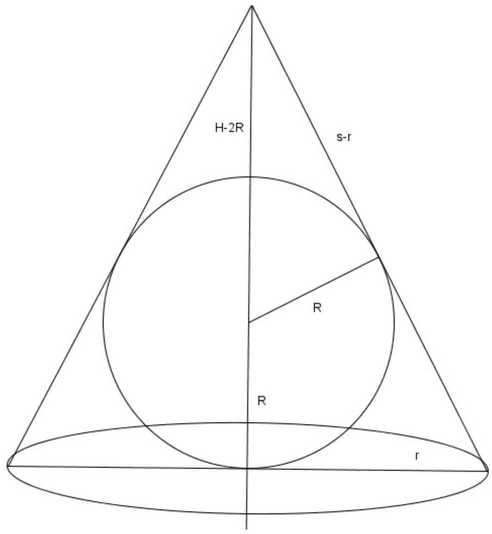
$$F'(r)=\left(\frac{2r^4\pi}{r^2-R^2}\right)'=\frac{8r^3\pi\left(r^2-R^2\right)-2r^4\pi\cdot 2r}{\left(r^2-R^2\right)^2}=4\pi\cdot\frac{r^5-2r^3R^2}{\left(r^2-R^2\right)^2}.$$

Most $F'(r)=0$ akkor és csakis akkor, ha $r^3\left(r^2-2R^2\right)=0$. Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, vagyis ebben az esetben $r=0$ vagy $r=R\sqrt{2}$. Mivel a 0 alapsugarú kúp nem lehet megoldás, így a megoldás $r=R\sqrt{2}$, és

$$F_{\min}\left(R\sqrt{2}\right)=\frac{2\pi\cdot 4R^4}{2R^2-R^2}=8R^2\pi, \text{ mivel}$$

$$F''(r)=4\pi\cdot\frac{r^6-3r^4R^2+6r^2R^4}{\left(r^2-R^2\right)^2} \text{ és}$$

$$F''\left(R\sqrt{2}\right)=4\pi\cdot 8R^3>0.$$



3. Oldd meg a következő egyenletet:

$$\frac{\sin x}{\cos x}+6\frac{\cos x}{\sin x}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}-1}-4\sqrt{3}.$$

Megoldás. Alakítsuk át a gyök alatti mennyiséget:

$$\frac{1}{\cos^2 x}-1=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}^2 x\geq 0.$$

A fenti egyenlet ekvivalens alakja: $\operatorname{tg} x+6\operatorname{ctg} x=|\operatorname{tg} x|-4\sqrt{3}$.

Ha $\operatorname{tg} x>0$, akkor $\operatorname{ctg} x=-\frac{2\sqrt{3}}{3}<0$, amelyből $\operatorname{tg} x<0$ következik. Mivel ez ellentmondást jelent, így ez az eset nem lehetséges.

Ha $\operatorname{tg} x<0$, akkor

$$2\operatorname{tg} x+6\operatorname{ctg} x+4\sqrt{3}=0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x+2\sqrt{3}\operatorname{tg} x+3=0,$$

$$\left(\operatorname{tg} x+\sqrt{3}\right)^2=0,$$

$$\operatorname{tg} x=-\sqrt{3},\ \text{ahonnan } x=\frac{2\pi}{3}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

4. Hány olyan számtani sorozat van, amelynek elemei természetes számok és az első 37 elem összege 1998?

Megoldás. Legyenek $a_1, a_2, a_3, \ldots$ a számtani sorozat elemei, d pedig a számtani sorozat differenciája. A feltételek alapján a sorozat elemei pozitívak.

Legyen $a_{19}=x$. Ekkor

$$(x-18d)+(x-17d)+\cdots+(x-d)+x+(x+d)+\cdots+(x+18d)=1998,$$

amelyből $x=a_{19}=54$. Ebből meghatározható, hogy

$$a_1=x-18d=54-18d=18(3-d).$$

$3-d>0$ miatt csak $d=1$ vagy $d=2$ lehetséges.

Ha $d=1$, akkor $a_1=36$ és $a_n=n+35$. Ha $d=2$, akkor $a_1=18$ és $a_n=2n+16$.

A IV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

9. évfolyam

1. Balassa Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **I. díj**
2. Rakita Marko, Jovan Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék, **I. díj**
3. Ágó Krisztina, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **II. díj**
4. Kovacsics Tóbiás, Műszaki Középiskola, Becse, **II. díj**
5. Dragoljević Milan, Jovan Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék, **II. díj**
6. Kerekes Emese, Dositej Obradović Gimnázium, Topolya, **dicséret**
7. Kecsenovity Egon, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
8. Guzsvány Szandra, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**

10. évfolyam

1. Kanalas Vidor, Matematikai Gimnázium, Belgrád, **I. díj**
2. Bodócsi Endre, Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **II. díj**
3. Bosanac Bojan, Jovan Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék, **II. díj**
4. Takács Emese, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**
5. Kovács Ildikó, Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
6. Drašković Stefan, Jovan Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék, **III. díj**
7. Kasza Ákos, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
8. Gleszer Erik, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
9. Vidács Vilmos, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
10. Róka Gáspár, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**

11. évfolyam

1. Homolya Miklós, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **I. díj**
2. Gombár Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **I. díj**
3. Csizmadija Laura, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **II. díj**
4. Erős Dávid, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **III. díj**
5. Jokić Miloš, Jovan Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
6. Juhász Andor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**

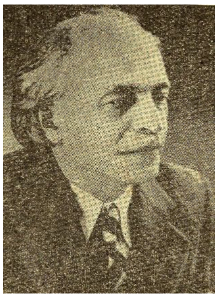
12. évfolyam

1. Stojanov Marica, Jovan Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék, **II. díj**
2. Csizmadia Zsolt, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **II. díj**
3. Lakatos Zoltán, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**
4. Fésűs Attila, Jovan Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
5. Döme Zsolt, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
6. Takács Árpád, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **dicséret**

AZ V. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Előadó: dr. Takács Márta
Előadás címe: Fuzzy logika

Eredményhirdetésre várva. A képen Zolnai Irén, Szabó Magdolna és a versenyzők.



V. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2007. december 15.

9. évfolyam

1. Két házaspár érkezik egy folyóhoz. Az átkeléshez olyan csónak áll rendelkezésre, amelyben legfeljebb két személy részére van hely. A férjek féltékenyek, feleség nem maradhat férfitársaságban a férje jelenléte nélkül sem a folyóparton, sem átkelés közben. Megoldható-e az átkelés, ha mind a négy személy tud evezni?

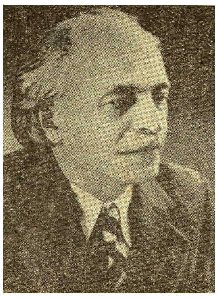
2. Határozd meg az x és y számjegyeket úgy, hogy az $\overline{1984xy}$ szám osztható legyen 72-vel!

3. Mennyivel egyenlő az n természetes szám, ha $n+S(n)=1998$, ahol $S(n)$ jelenti az n számjegyeinek összegét?

4. Az $ABCD$ téglalap B csúcsából húzott szögfelező és a B csúcsból induló átló $15°$-os szöget zár be, a B csúcsból húzott szögfelező az AC átlót P pontban, a CD oldalt pedig E pontban metszi. Jelölje O az $ABCD$ téglalap átlóinak metszéspontját. Igazold, hogy a COE és PEO háromszögek egyenlő szárúak!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



V. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2007. december 15.

10. évfolyam

1. Három házaspár érkezik egy folyóhoz. Az átkeléshez olyan csónak áll rendelkezésre, amelyben legfeljebb két személy részére van hely. A férjek féltékenyek, feleség nem maradhat férfitársaságban a férje jelenléte nélkül sem a folyóparton, sem átkelés közben. Megoldható-e az átkelés, ha mind a hat személy tud evezni?

2. Oldd meg a következő egyenletet:

$$\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}+\sqrt{2x+3-4\sqrt{2x-1}}=3.$$

3. Oldd meg a következő egyenletet az egész számok halmazán:

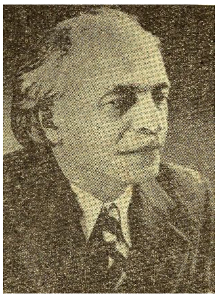
$$x^2+26x+69=5^y.$$

4. Egy kör átmérője az AB szakasz. A körbe olyan AC és BD húrokat húzunk, amelyek a kör belsejében egy P pontban metszik egymást. Igazold, hogy

$$|AC|\cdot|AP|+|BD|\cdot|BP|=|AB|^2.$$

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



V. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2007. december 15.

<u>11. évfolyam</u>

1. 24 liter bor van egy 24 literes edényben. Oszd három egyenlő részre ezt a mennyiséget, ha a huszonnégyliteres edényen kívül van még egy 5, egy 11 és egy 13 literes üres edény!

2. Oldd meg a valós számhármasok halmazán a következő egyenletrendszert:

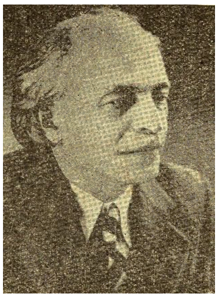
$$x-9z^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2,\ 6y-x^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2,\ 15z-4y^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

3. Bizonyítsd be, hogy ha $n \geq 5$ és n 2-vel osztható, de néggyel nem osztható természetes szám, akkor n^5-20n^3+64n osztható 3840-nel!

4. A négyzet alakú kert oldala 12 méter és 8 méter átmérőjű henger alakú gödröt ástak benne. A kiásott földet egyenletesen lehengerelték. Hány méter mélyre kell ásni, hogy a gödör a lehengerelés után 3 méter mély legyen?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



V. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2007. december 15.

12. évfolyam

1. n **sakkjátékos különleges rendszerű versenyt vívott. Bármely játékos bármelyik társával legfeljebb egyszer játszott, döntetlen mérkőzés nem volt (ha kellett, sorsolással döntöttek arról, hogy ki győzött, ki vesztett). A versenyvezető megállapította, hogy bármely két játékoshoz található egy harmadik, aki mindkettőt legyőzte. Legalább hány résztvevős volt a verseny?**

2. Oldd meg a $\sqrt{\log_2 \frac{3-2x}{1-x}} < 1$ **egyenlőtlenséget!**

3. Ha minden valós x **és** y **valós számra igaz, hogy**

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \text{ és } f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy,$$

akkor határozd meg az $f(x)$ **függvényt!**

4. Egy háromszög oldalai $13\,cm$, $14\,cm$ **és** $15\,cm$. **Mekkora a távolság a háromszög súlypontja és a köré írt kör középpontja között?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

AZ V. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

9. évfolyam

1. Két házaspár érkezik egy folyóhoz. Az átkeléshez olyan csónak áll rendelkezésre, amelyben legfeljebb két személy részére van hely. A férjek féltékenyek, feleség nem maradhat férfitársaságban a férje jelenléte nélkül sem a folyóparton, sem átkelés közben. Megoldható-e az átkelés, ha mind a négy személy tud evezni?

Megoldás. Jelölje F_1, N_1 az első, F_2, N_2 a második házaspárt, férj-nej sorrendben. Az egyik lehetséges megoldás:

		Egyik oldal	**Másik oldal**
I.	Alaphelyzet	F_1, N_1, F_2, N_2	-
II.	N_1 és N_2 átevez	F_1, F_2	N_1, N_2
III.	N_1 visszatér	F_1, F_2, N_1	N_2
IV.	F_1 és F_2 átevez	N_1	F_1, F_2, N_2
V.	N_2 visszatér	N_1, N_2	F_1, F_2
VI.	N_1 és N_2 átevez, az átkelés megtörtént		F_1, N_1, F_2, N_2

2. Határozd meg az x és y számjegyeket úgy, hogy az $\overline{1984xy}$ szám osztható legyen 72-vel!

Megoldás. $\overline{1984xy}$ osztható 72-vel, ha osztható 8-cal és 9-cel. Ahhoz hogy a szám osztható legyen 9-cel, számjegyeinek összege is osztható kell legyen 9-cel. Mivel $1+9+8+4=18+4$, az x és y számjegyekre igaz lesz, hogy $x+y=5$ vagy $x+y=14$. Mivel

$$\overline{1984xy}=198400+10x+y=8\cdot 24800+8x+2x+y,$$

ezért a $8\,|\,(2x+y)$ feltételnek igaznak kell lennie.

1.eset: Legyen $x+y=5$. Ekkor $2x+y=x+x+y=x+5$, amiből az következik, hogy a $8\,|\,(x+5)$ feltételnek kell teljesülnie, amelynek egyetlen megoldása $x=3,\ y=2$.

2.eset: Legyen $x+y=14$. Ekkor $2x+y=x+14=x+6+8$, amiből az következik, hogy a $8\,|\,(x+6)$ feltételnek kell teljesülnie, amiből $x=2$, $y=12$ megoldás következik, de ez lehetetlen, mivel x és y számjegyek, tehát egyik sem lehet 12.
A keresett megoldás tehát egyedül az $x=3,\ y=2$.

3. Mennyivel egyenlő az n természetes szám, ha $n+S(n)=1998$, ahol $S(n)$ jelenti az n számjegyeinek összegét?

Megoldás. $n \le 1998$, így $S(n) \le 1+9+9+8=27$. Ezért $n \ge 1998-27=1971$. Ekkor $S(n) \ge 1+9+7+1=18$, így $n \le 1980$. Tehát $1971 \le n \le 1980$. Mivel n és $S(n)$ 9-cel osztva ugyanazt a maradékot adja és 1998 osztható 9-cel, ezért n is osztható 9-cel. Tehát n csak 1971 vagy 1980 lehet. Ellenőrzés:

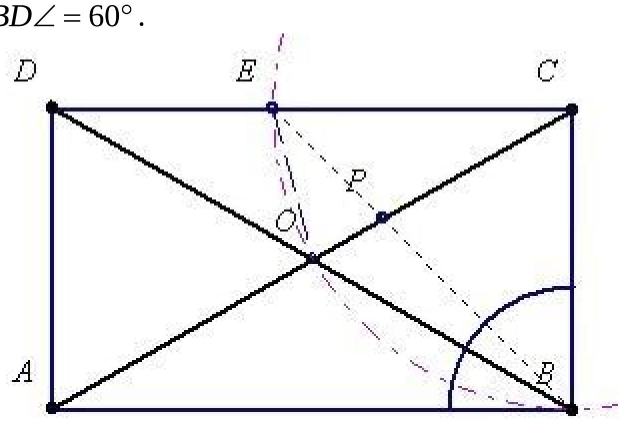
$1971+1+9+7+1=1989$ nem jó,

$1980+1+9+8=1998$ jó.

Tehát $n=1980$ az egyetlen megoldás.

4. Az $ABCD$ téglalap B csúcsából húzott szögfelező és a B csúcsból induló átló $15°$-os szöget zár be, a B csúcsból húzott szögfelező az AC átlót P pontban, a CD oldalt pedig E pontban metszi. Jelölje O az $ABCD$ téglalap átlóinak metszéspontját. Igazold, hogy a COE és PEO háromszögek egyenlő szárúak!

Megoldás. C csúcsból körívet húzunk az O ponton keresztül. Az EB húrhoz tartozó középponti szög $90°$-os, ezért a kör B ponton keresztül húzptt érintője a húrral $45°$-os szöget zár be, vagyis $EBA\angle = 45°$. Ekkor a feladat feltételéből következik, hogy $DBA\angle = 30°$ és $CBD\angle = 60°$.



A BOC háromszög egyenlő oldalú (egyenlő szárú $|BO|=|CO|$ és van $60°$-os szöge), a BCE háromszög egyenlő szárú derékszögű ($ECB\angle$ derékszögű és egyik hegyesszöge $45°$), tehát $|CE|=|BC|=|BO|=|CO|$. Ebből következik, hogy COE háromszög egyenlő szárú, azaz $COE\angle = CEO\angle = 75°$.

Mivel $EPO\angle = BPC\angle = 180°-60°-45°=75°$, így $OPE\angle = EOP\angle = 75°$, vagyis az PEO háromszög is egyenlő szárú.

10. évfolyam

1. Három házaspár érkezik egy folyóhoz. Az átkeléshez olyan csónak áll rendelkezésre, amelyben legfeljebb két személy részére van hely. A férjek féltékenyek, feleség nem maradhat férfitársaságban a férje jelenléte nélkül sem a folyóparton, sem átkelés közben. Megoldható-e az átkelés, ha mind a hat személy tud evezni?

Megoldás. Jelölje F_1, N_1 az első, F_2, N_2 a második, F_3, N_3 a harmadik házaspárt, férj-nej sorrendben. Ekkor a feladat megoldható: N_1 és N_2 átevez, N_1 visszatér, N_1 és N_3 átevez, N_1 visszatér, F_2, F_3 átevez, F_2, N_2 visszatér, F_1, F_2 átevez, N_3 visszatér, N_2 és N_3 átevez, N_2 visszatér, N_1 és N_2 átevez.

2. Oldd meg a következő egyenletet:

$$\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}+\sqrt{2x+3-4\sqrt{2x-1}}=3.$$

Megoldás. A feladat csak $2x-1\geq 0$ esetén értelmezett, azaz $x\geq\frac{1}{2}$ esetén. Az egyenlet átalakítható a következő ekvivalens formára:

$$\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}+\sqrt{2x+3-4\sqrt{2x-1}}=3$$

$$\sqrt{2x-1-2\sqrt{2x-1}+1}+\sqrt{2x-1-4\sqrt{2x-1}+4}=3$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2x-1}-2\right)^2}=3$$

$$\left|\sqrt{2x-1}-1\right|+\left|\sqrt{2x-1}-2\right|=3$$

Vezessük be a $t=\sqrt{2x-1}$ helyettesítést. Mivel a gyök mindig nemnegatív, ezért $t\geq 0$ érvényes. Most az egyenletünk:

$$|t-1|+|t-2|=3.$$

Mivel

$$|t-1|=\begin{cases}1-t, & 0\leq t<1\\ t-1, & t\geq 1\end{cases} \qquad \text{és} \qquad |t-2|=\begin{cases}2-t, & 0\leq t<2\\ t-2, & t\geq 2\end{cases}$$

felírható, ezért három eset lehetséges:

1. Ha $0\leq t<1$, akkor $1-t+2-t=3$, azaz $t=0$. Visszahelyettesítés után adódik, hogy $\sqrt{2x-1}=0$, azaz $2x-1=0$, ahonnan a megoldás $x=\frac{1}{2}$.

2. Ha $1\leq t<2$, akkor $t-1+2-t=3$, ahonnan $1=3$ következik, azaz nincs megoldás.

3. Ha $2\leq t$, akkor $t-1+t-2=3$ adódik, ahonnan $t=3$. Visszahelyettesítés után kapjuk a $\sqrt{2x-1}=3$, illetve $2x-1=9$ egyenletet, amelynek megoldása $x=5$.

A keresett megoldások tehát $x=\frac{1}{2}$ és $x=5$.

3. Oldd meg a következő egyenletet az egész számok halmazán:

$$x^2+26x+69=5^y.$$

Megoldás. Az egyenletet átrendezve adódik $x^2+26x+69-5^y=0$, aminek megoldása $x_{1,2}=-13\pm\sqrt{13^2-69+5^y}=-13\pm\sqrt{100+5^y}$. Mivel $100+5^y$ pozitív négyzetszám, legyen ez a^2, vagyis $100+5^y=a^2$. Ebből adódik, hogy

$$5^y=a^2-100=(a-10)(a+10).$$

Mivel 5^y-nak csak az 5 hatványai lehetnek tényezői, legyen $a+10=5^u$, $a-10=5^v$, ahol $u+v=y$. Most $a=5^u-10$ és $a=5^v+10$, ahonnan $5^u-10=5^v+10$, illetve $5^u-5^v=20$, azaz $5^v(5^{u-v}-1)=5\cdot 4$ következik. Ez csak akkor állhat fenn, ha $v=1$, $u-v=1$, tehát $u=2$, $y=u+v=3$. Ebből $x_{1,2}=-13\pm\sqrt{100+125}=-13\pm 15$.
Így a megoldás $x_1=2$, $x_2=-28$, $y_1=y_2=3$.

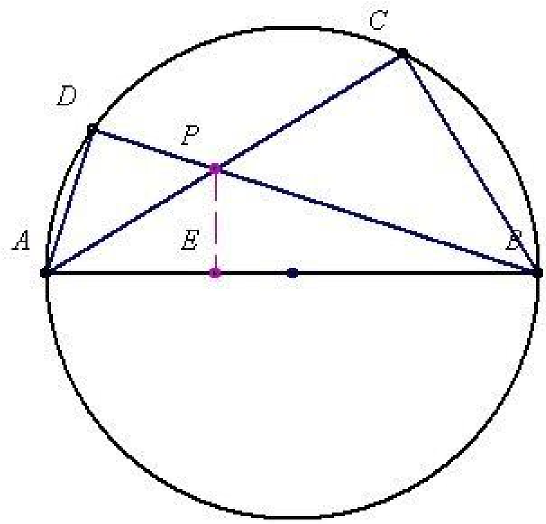
4. Egy kör átmérője az AB szakasz. A körbe olyan AC és BD húrokat húzunk, amelyek a kör belsejében egy P pontban metszik egymást. Igazold, hogy

$$|AC|\cdot|AP|+|BD|\cdot|BP|=|AB|^2.$$

Megoldás. Legyen az E pont a P pont AB szakaszra eső merőleges vetülete. Ekkor az APE és ABC háromszögek hasonlóságából (derékszögűek és van közös szögük az A csúcsnál) következik az oldalaik arányossága: $\frac{|AC|}{|AE|}=\frac{|AB|}{|AP|}$, hasonlóan a PEB és BAD háromszögek hasonlóságából (derékszögűek és van közös szögük a B csúcsnál) következik az oldalaik arányossága: $\frac{|EB|}{|DB|}=\frac{|PB|}{|AB|}$.
Ha átírjuk őket szorzatokként és összeadjuk, akkor

$$\left.\begin{aligned}|AC|\cdot|AP|&=|AB|\cdot|AE|\\ |EB|\cdot|AB|&=|BD|\cdot|PB|\end{aligned}\right\}+$$

Ekkor adódik, hogy $|AC|\cdot|AP|+|DB|\cdot|PB|=|AB|\cdot\left(|AE|+|EB|\right)=|AB|^2$.



11. évfolyam

1. 24 liter bor van egy 24 literes edényben. Oszd három egyenlő részre ezt a mennyiséget, ha a huszonnégyliteres edényen kívül van még egy 5, egy 11 és egy 13 literes üres edény!

Megoldás. A két – legkevesebb lépésből álló – mód:

24	13	11	5
24	0	0	0
0	8	11	5
16	8	0	0
16	0	8	0
3	13	8	0
3	8	8	5
8	8	8	0

24	13	11	5
24	0	0	0
8	0	11	5
8	11	0	5
8	13	0	3
8	13	3	0
8	8	3	5
8	8	8	0

2. Oldd meg a valós számhármasok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$x-9z^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2,\ 6y-x^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2,\ 15z-4y^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

Megoldás. A három egyenletet összeadva és rendezve a következőt kapjuk:

$$x^2-x+\left(\frac{1}{2}\right)^2+4y^2-6y+\left(\frac{3}{2}\right)^2+9z^2-15z+\left(\frac{5}{2}\right)^2=0.$$

teljes négyzetté való átalakítások után kapjuk, hogy

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(2y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(3z-\frac{5}{2}\right)^2=0,$$

ami csak akkor teljesül, ha

$$x=\frac{1}{2},\ y=\frac{3}{4},\ z=\frac{5}{6}.$$

A kapott számhármas nem elégíti ki az eredeti egyenleteket, így az egyenletrendszernek nincs megoldása.

3. Bizonyítsd be, hogy ha $n\ge 5$ és n 2-vel osztható, de néggyel nem osztható természetes szám, akkor n^5-20n^3+64n osztható 3840-nel!

Megoldás. Legyen $A=n^5-20n^3+64n$. Ekkor elemi átalakítással adódik, hogy
$A=n\left(n^4-20n^2+64\right)=n\left(n^2-4\right)\left(n^2-16\right)=n(n-2)(n+2)(n-4)(n+4)$.
Mivel $n\ge 5$ és $2\,|\,n$, de n nem osztható 4-gyel, ezért $n=4k+2$ alakú, ahol $k\in N$.
$A=(4k+2)4k(4k+4)(4k-2)(4k+6)=32(2k-1)2k(2k+1)(2k+2)(2k+3)$.
Mivel $(2k-1)2k(2k+1)(2k+2)(2k+3)$ öt egymást követő természetes szám szorzata, ezért a tényezői között van 5-tel osztható, és van 3-mal osztható is, így $15\,|\,A$. Viszont $A=128k(k+1)(2k-1)(2k+1)(2k+3)$ és $k(k+1)$ mindig páros, tehát $256\,|\,A$. Mivel 15 és 256 relatív prímek, ezért $15\cdot 256=3840\,|\,A$.

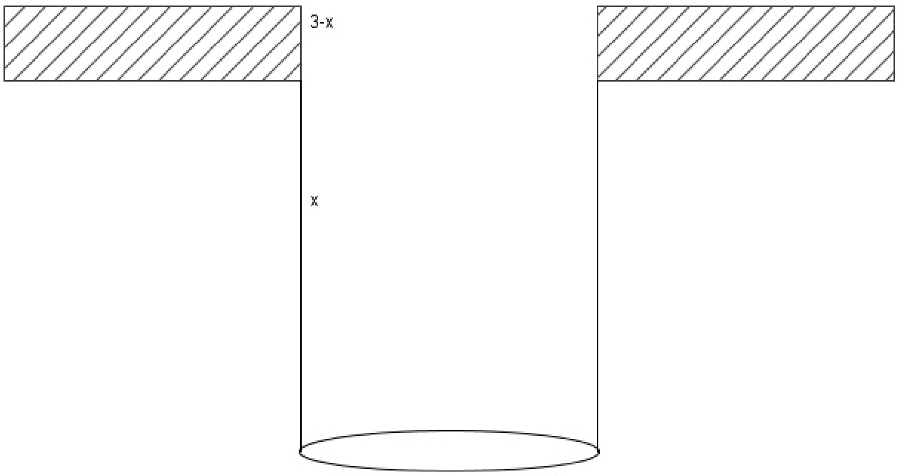
4. A négyzet alakú kert oldala 12 méter és 8 méter átmérőjű henger alakú gödröt ástak benne. A kiásott földet egyenletesen lehengerelték. Hány méter mélyre kell ásni, hogy a gödör a lehengerelés után 3 méter mély legyen?

Megoldás. Legyen a henger alakú gödör kiásott része x magasságú, a henger alapsugara 4 m, az elhengerelt föld magassága pedig $3-x$. Ekkor

$$(12^2-16\pi)\cdot(3-x)=16\pi x,$$

tehát

$$x=\frac{432-48\pi}{144}=1,953 \text{ méter mélyre kell ásni.}$$



<u>12. évfolyam</u>

1. n **sakkjátékos különleges rendszerű versenyt vívott. Bármely játékos bármelyik társával legfeljebb egyszer játszott, döntetlen mérkőzés nem volt (ha kellett, sorsolással döntöttek arról, hogy ki győzött, ki vesztett). A versenyvezető megállapította, hogy bármely két játékoshoz található egy harmadik, aki mindkettőt legyőzte. Legalább hány résztvevős volt a verseny?**

Megoldás. Nyilvánvaló, hogy legalább három játékos volt: A, B és C. Tegyük fel, hogy C A-t és B-t is legyőzte. A-t és C-t nem győzhette le B, az csak az eddigiektől különböző D lehetett. A és D csak B-től kaphatott ki.
Az A játékost B, C, D mindegyike legyőzte; szimmetria alapján A akármelyik játékos lehetett, így bármelyik játékosnak legalább három veresége volt. Ennek alapján k versenyző esetén legalább $3k$ mérkőzés volt. Mivel minden versenyző minden versenyzővel legfeljebb egyszer mérkőzött, fennáll a

$$3k \le \frac{k(k-1)}{2}$$

egyenlőtlenség. $k \ge 7$, a versenyen legalább 7 játékos volt.
Konstruktív módon bizonyítjuk, hogy 7 versenyzővel meg is oldható a probléma. Sorok szerint a – jel a vereséget, a + jel pedig a győzelmet jelenti.

	A	B	C	D	E	F	G
A	o	–	–	–	+	+	+
B	+	o	–	+	–	–	+
C	+	+	o	–	–	+	–
D	+	–	+	o	+	–	–
E	–	+	+	–	o	–	+
F	–	+	–	+	+	o	–
G	–	–	+	+	–	+	o

2. Oldd meg a $\sqrt{\log_2 \frac{3-2x}{1-x}} < 1$ **egyenlőtlenséget!**

Megoldás. Az egyenlőtlenség értelmezett, ha

$$\frac{3-2x}{1-x} > 0 \quad \text{és} \quad \log_2 \frac{3-2x}{1-x} \ge 0, \text{ azaz } \frac{3-2x}{1-x} \ge 1, \text{ amiből adódik, hogy}$$

$$\frac{2-x}{1-x} \ge 0. \tag{1}$$

Ugyanakkor

$$\log_2 \frac{3-2x}{1-x} < 1, \text{ amiből következik, hogy } \frac{3-2x}{1-x} < 2, \text{ azaz}$$

$$\frac{1}{1-x} < 0. \tag{2}$$

(1) és (2) egyenlőtlenség közös megoldása adja az eredeti egyenlőtlenség megoldását:

$$x \ge 2.$$

3. Ha minden valós x és y valós számra igaz, hogy

$$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y) \text{ és } f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy,$$

akkor határozd meg az $f(x)$ függvényt!

Megoldás. Legyen az $y=0$, ekkor a második egyenletből kapjuk, hogy:

$f(x+0)=f(x)+f(0)+2x\cdot 0$, illetve $f(x)=f(x)+f(0)$, ahonnan $f(0)=0$.

$0=f(0)=f(-1+1)=f(-1)+f(1)+2(-1)1$, ahonnan $f(-1)+f(1)=2$.

$0=f(0)=f(-x+x)=f(-x)+f(x)+2(-x)x$, ahonnan $f(-x)+f(x)=2x^2$.

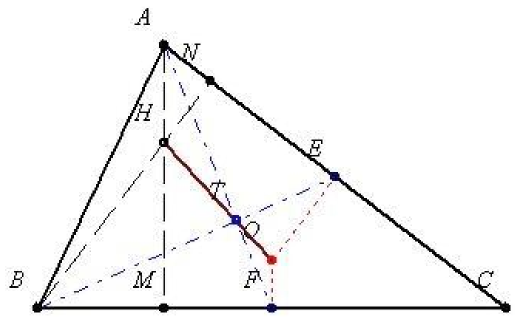
$f(-1\cdot x)+f(1\cdot x)=2x^2$, vagyis $f(-1)\cdot f(x)+f(1)\cdot f(x)=2x^2$, ahonnan

$f(x)\left[f(-1)+f(1)\right]=2x^2$, illetve $2f(x)=2x^2$, amelyből $f(x)=x^2$.

Könnyen leellenőrizhető, hogy az $f(x)=x^2$ függvényre fennállnak a fenti összefüggések.

4. Egy háromszög oldalai 13 cm, 14 cm és 15 cm. Mekkora a távolság a háromszög súlypontja és a köré írt kör középpontja között?

I.Megoldás:



A Stewart-képlet következménye: $|OT|^2=R^2-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$,

tehát $|OT|^2=\left(\dfrac{65}{8}\right)^2-\dfrac{13^2+14^2+15^2}{9}=\dfrac{265}{576}$, amelyből $|TO|=\dfrac{\sqrt{265}}{24}\approx 0.6783$.

II.Megoldás: Az AF súlyvonal kiszámítható a következő módon:

$$|AF|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2\cdot 13^2+2\cdot 14^2-15^2}=\frac{1}{2}\sqrt{505}.$$

Ekkor $|AT|=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{505}=\dfrac{\sqrt{505}}{3}$. Vizsgáljuk az AHO háromszöget, amelyben az AT szakaszra alkalmazhatjuk a Stewart képletet, vagyis

$$|AH|^2\cdot|TO|+|AO|^2\cdot|HT|=|AT|^2\cdot|HO|+|HT|\cdot|TO|\cdot|HO|.$$

Legyen $x=|TO|$. Ekkor $|HT|=2x$, ezért

$\left(\dfrac{25}{4}\right)^2\cdot x+\left(\dfrac{65}{8}\right)^2\cdot 2x=\left(\dfrac{\sqrt{505}}{3}\right)^2\cdot 3x+2x\cdot x\cdot 3x$, ebből pedig $x^2=\dfrac{265}{576}$, azaz

$$x=|TO|=\frac{\sqrt{265}}{24}\approx 0.6783.$$

III.Megoldás: Legyen az adott ABC háromszögben $|AB|=13\text{ cm}$, $|AC|=14\text{ cm}$, $|BC|=15\text{ cm}$. O a köré írt kör középpontja, T a háromszög súlypontja, H a magasságpontja. Ha a háromszöget egy T középpontú és $k=-2$ arányú homotéciával leképezzük, akkor minden oldal a vele párhuzamos és a szemben fekvő csúcson áthaladó oldalba képeződik le, melynek felezőpontja az adott háromszög csúcsa lesz. De ekkor az oldalfelező merőlegesek O metszéspontja a H magasságpontba képeződik le, miközben $|TH|=2\cdot|TO|$. Kiszámítjuk a HO távolságot, annak harmada lesz a keresett távolság.

A háromszög területe Heron képletéből: $t_{\Delta}=\sqrt{21\cdot 6\cdot 7\cdot 8}=84$.

A köré írt kör sugara $R=\dfrac{abc}{4\cdot t_{\Delta}}=\dfrac{13\cdot 14\cdot 15}{4\cdot 84}=\dfrac{65}{8}$.

Az AM magasság tulajdonsága alapján $|AM|=\dfrac{2\cdot t_{\Delta}}{a}=\dfrac{2\cdot 84}{15}=\dfrac{56}{5}$.

Az AMB háromszögben: $|BM|=\sqrt{13^2-\left(\dfrac{56}{5}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1089}{25}}=\dfrac{33}{5}$.

Az $OPFM$ téglalapban $|OP|=|FM|=\dfrac{15}{2}-\dfrac{33}{5}=\dfrac{9}{10}$.

Az OFC derékszögű háromszögben

$|OF|^2=|OC|^2-|FC|^2=\left(\dfrac{65}{8}\right)^2-\left(\dfrac{15}{2}\right)^2=\dfrac{625}{64}$, ahonnan $|OF|=\dfrac{25}{8}$.

Mivel a homotécia alapján: $|AH|=2\cdot|OF|$, ezért $|AH|=\dfrac{25}{4}$.

Ezután $|HP|=|AM|-|AH|-|PM|=\dfrac{56}{5}-\dfrac{25}{4}-\dfrac{25}{8}=\dfrac{73}{40}$.

Most a HPO derékszögű háromszögből:

$$|HO|=\sqrt{\left(\frac{73}{40}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^2}=\sqrt{\frac{6625}{1600}}=\frac{5\cdot\sqrt{265}}{40}=\frac{\sqrt{265}}{8}.$$

Végül $|TO|=\dfrac{\sqrt{265}}{24}\approx 0.6783$.

AZ V. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

9. évfolyam

1. Kovacsics Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **I. díj**
2. Fésűs Árpád, Jovan Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék, **II. díj**
3. Vrbaski Iván, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **II. díj**
4. Dóka Ádám, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
5. Kopasz Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
6. Horvát Zoltán, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
7. Anitics Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
8. Gyorgyevics Katalin, Bolyai Tehetséggondozó Gimn. és Koll., Zenta, **dicséret**
9. Fejdi Emma, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
10. Kecskeméti Árpád, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
11. Erdélyi Ádám, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
12. Guberina Krisztina, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
13. Farkas Laura, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**

10. évfolyam

1. Kecsenovity Egon, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **I. díj**
2. Balassa Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **I. díj**
3. Tóth Szabolcs, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **II. díj**
4. Ágó Krisztina, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **II. díj**
5. Orosz Csaba, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
6. Guzsvány Szandra, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
7. Kovacsics Tóbiás, Műszaki Középiskola, Becse, **III. díj**
8. Majláth Dániel, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
9. Gulyás Oldal Lénárd, Bolyai Tehetséggondozó Gimn. és Koll., Zenta, **dicséret**
10. Bozsik Zoltán, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
11. Sarok Emma, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
12. Muzsika Tót Tímea, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
13. Kerekes Emese, Dositej Obradović Gimnázium, Topolya, **dicséret**

11. évfolyam

1. Kanalas Vidor, Matematikai Gimnázium, Belgrád, **I. díj**
2. Farkas Gabriella, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **II. díj**
3. Takács Emese, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**
4. Körmöczi Arnold, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
5. Vidács Vilmos, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
6. Kasza Ákos, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
7. Gimpel Ákos, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
8. Kovács Ildikó, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
9. Répási Diana, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
10. Róka Gáspár, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
11. Vickó Krisztina, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
12. Bodócsi Endre, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
13. Sárkány Rita, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
14. Harangozó Edina, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
15. Kecskés Szanella, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
16. Gleszer Erik, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
17. Balog Dániel, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**

12. évfolyam

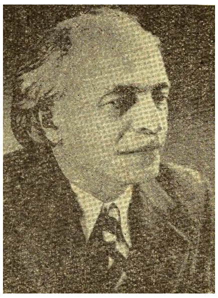
1. Csizmadija Laura, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **I. díj**
2. Homolya Miklós, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **II. díj**
3. Gombár Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
4. Juhász Andor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
5. Erős Dávid, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**

Díjátadás: Homolya Miklós

A VI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Előadó: Bagi Márk
Előadás címe: Csillagászati előadás és kvíz

A versenyzők feladatmegoldásokon törik a fejüket.



VI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2008. december 13.

9. évfolyam

1. Sün Balázs és testvérei erdei sétára indultak bogyó-, falevél-, kavics-, illetve termésgyűjteményeiket gazdagítani. Mindegyiküknek van legalább egy gyűjteménye. Azok, akik bogyókat vagy terméseket gyűjtenek, azok faleveleket is gyűjtenek. Azok, akik kavicsokat gyűjtenek, azok terméseket is gyűjtenek. Azok, akik faleveleket és kavicsokat gyűjtenek, azok bogyókat is gyűjtenek. Melyik fajta gyűjteményből van a legtöbb és melyikből a legkevesebb Sün Balázséknál?

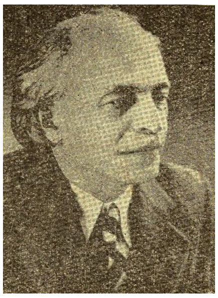
2. „Képzeld, tegnap csupán 5, 50, 500 és 5000 dinárosok felhasználásával fizettem ki 500000 dinárt.” – mondja Gazdag Géza. „És hány darabot használtál fel?” – kérdezi Okos Berci. „A négyféle címletű pénzből együttesen 500 darabot.” – válszolja Géza. „Ez lehetetlen!” – mondja nyomban Berci. Kinek volt igaza és miért?

3. Az 1, 3, 4, 5 és egy tetszés szerint választott számjeggyel írd fel azt a legnagyobb ötjegyű számot, amelyik 12-vel osztható!

4. Ha az $ABCD$ téglalap és az AQB, valamint APD szabályos háromszögek megegyező körüljárásúak, igazold, hogy a PQ szakasz egybevágó a téglalap átlójával!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



VI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2008. december 13.

10. évfolyam

1. „Képzeld, tegnap csupán 5, 50, 500 és 5000 dinárosok felhasználásával fizettem ki 500000 dinárt." – mondja Gazdag Géza. „És hány darabot használtál fel?" – kérdezi Okos Berci. „A négyféle címletű pénzből együttesen 500 darabot." – válszolja Géza. „Ez lehetetlen!" – mondja nyomban Berci. Kinek volt igaza és miért?

2. Határozd meg mindazokat az $n \in Z$ számokat, amelyekre az

$$x^3 - nx^2 + nx - (n^2 + 1) = 0$$

egyenletnek egész megoldásai vannak ($x \in Z$).

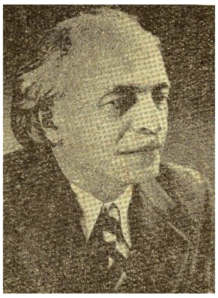
3. Egy táblára felírták az összes pozitív egész számot 1-gyel kezdve és 2008-cal bezárólag. A felírt számjegyek hány százaléka az 5-ös számjegy?

4. Az AC szakasz az $ABCD$ paralelogramma hosszabbik átlója. Húzd a $CE \perp AB$ és $CF \perp AD$ szakaszokat, vagyis a C csúcsból a nem szomszédos oldalakra húzott merőlegeseket, $F \in AD$ és $E \in AB$. Bizonyítsd be, hogy ekkor

$$|AB| \cdot |AE| + |AD| \cdot |AF| = |AC|^2 .$$

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



VI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2008. december 13.

11. évfolyam

1. Egy kis erdei tavat egy forrás táplál friss vízzel. Egyszer megjelent egy 183 tagú elefántcsorda és egy nap alatt kiitta a tó vizét. Később, mikor újra megtelt a tó, egy 37 tagú csorda 5 nap alatt itta ki a vizet. Egy elefánt hány nap alatt inná ki a tó vizét?

2. Igazold, hogy az

$$x^{\log_{2007} x}\sqrt{2007} = x^{2007}$$

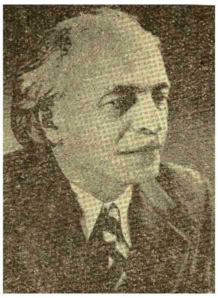
egyenlet megoldásainak szorzata természetes szám, majd határozd meg ennek a szorzatnak az utolsó két számjegyét!

3. Oldd meg a valós számok halmazán az $(x+1)^4+(x+3)^4=16$ egyenletet!

4. Számítsd ki a háromoldalú gúla térfogatát, ha alapja derékszögű háromszög 8 *cm* és 15 *cm* befogókkal, oldalélei pedig $60°$-os szögben hajlanak az alaplap síkjához!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



VI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2008. december 13.

12. évfolyam

1. Egy nemzetközi labdarugó tornán minden csapat minden csapattal pontosan egyszer játszott. Győzelemért 3, döntetlenért 1, vereségért 0 pont járt. A bajnokság végén a csapatok pontszámainak összege 15 pont volt. Az utolsó helyezett 1 pontot gyűjtött, az utolsó előtti egyszer sem kapott ki. Hány pontot gyűjtött a második helyen végzett csapat?

2. Igazold, hogy az

$$x^{\log_{2007} x}\sqrt{2007} = x^{2007}$$

egyenlet megoldásainak szorzata természetes szám, majd határozd meg ennek a szorzatnak az utolsó két számjegyét!

3. Oldd meg a $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ intervallumon a következő trigonometrikus egyenletet:

$$\cos^3 3x + \cos^3 5x = 8\cos^3 4x \cdot \cos^3 x \text{ .}$$

4. Egy henger alakú edényt, amelynek alapátmérője $4\ dm$ és a mélysége $3\ dm$, teletöltöttük vízzel. Mennyi víz marad benne, ha az alap síkjához viszonyítva $30°$-os szögben megdöntjük?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

A VI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

9. évfolyam

1. Sün Balázs és testvérei erdei sétára indultak bogyó-, falevél-, kavics-, illetve terméskgyűjteményeiket gazdagítani. Mindegyiküknek van legalább egy gyűjteménye. Azok, akik bogyókat vagy terméseket gyűjtenek, azok faleveleket is gyűjtenek. Azok, akik kavicsokat gyűjtenek, azok terméseket is gyűjtenek. Azok, akik faleveleket és kavicsokat gyűjtenek, azok bogyókat is gyűjtenek. Melyik fajta gyűjteményből van a legtöbb és melyikből a legkevesebb Sün Balázséknál?

Megoldás. Legyen S_1 a bogyókat gyűjtők, S_2 a faleveleket gyűjtők, S_3 a kavicsokat gyűjtők, S_4 pedig a terméseket gyűjtők halmaza. Ekkor érvényesek az alábbi relációk:

(1) $S_1 \cup S_4 \subset S_2$,

(2) $S_3 \subset S_4$,

(3) $S_2 \cap S_3 \subset S_1$.

(1)-ből és (2)-ből következik, hogy $S_3 \subset S_2$, valamint $S_3 \cap S_2 = S_3 \subset S_1$, amiből $S_1 \cup S_3 \cup S_4 \subset S_2$ következik, miszerint legtöbben faleveleket gyűjtenek.

Mivel $S_3 \subset S_1 \cap S_2 \cap S_4$, ebből adódik, hogy legkevesebben kavicsokat gyűjtenek.

2. „Képzeld, tegnap csupán 5, 50, 500 és 5000 dinárosok felhasználásával fizettem ki 500000 dinárt.” – mondja Gazdag Géza. „És hány darabot használtál fel?” – kérdezi Okos Berci. „A négyféle címletű pénzből együttesen 500 darabot.” – válszolja Géza. „Ez lehetetlen!” – mondja nyomban Berci. Kinek volt igaza és miért?

Megoldás. Jelölje a az ötezresek, b az ötszázasok, c az ötvenesek és d az ötösök számát, akkor ezekkel egyrészt

$$5000a + 500b + 50c + 5d = 500000,$$

másrészt

$$a + b + c + d = 500.$$

Ha az első egyenletet 5-tel elosztjuk és ebből kivonjuk a másodikat, akkor a

$$999a + 99b + 9c = 99500$$

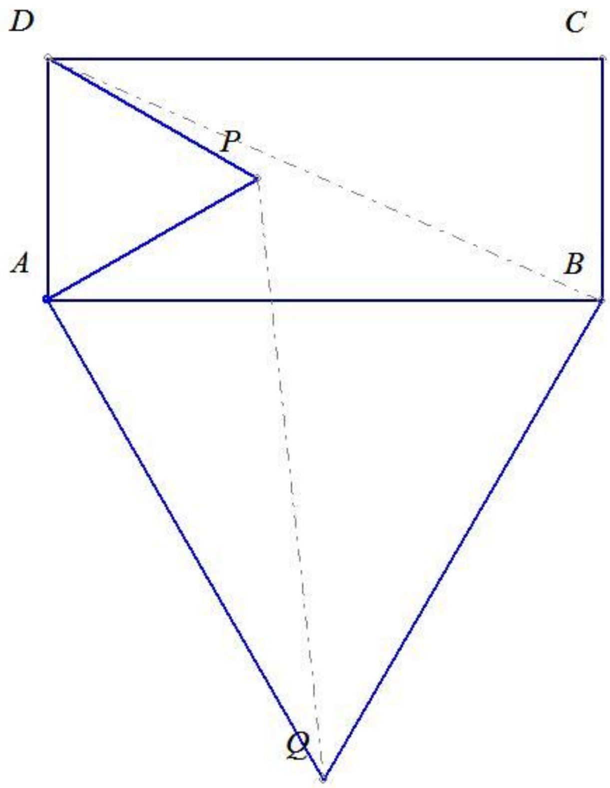
egyenletet kapjuk. Ennek az egyenletnek a bal oldalán csupa 9-cel osztható tag van, tehát összegük is 9-nek többszöröse. A jobb oldalon álló 99500 azonban nem osztható 9-cel. Gazdag Géza által közöltek ellentmondásra vezetnek ezért Bercinek van igaza.

3. Az 1, 3, 4, 5 és egy tetszés szerint választott számjeggyel írd fel azt a legnagyobb ötjegyű számot, amelyik 12-vel osztható!

Megoldás. Egy szám 12-vel pontosan akkor osztható, ha osztható 3-mal is és 4-gyel is. Ötjegyű számunk 3-mal akkor és csak akkor osztható, ha számjegyeinek összege is 3-nak többszöröse. Mivel az ismert négy számjegy összege 13, ezért az ötödik jegy a 2, az 5 vagy a 8 lehet csak.
A néggyel való oszthatóság szükséges és elégséges feltétele az, hogy az ötjegyű szám utolsó két jegyéből álló kétjegyű legyen a 4-nek többszöröse. Ebből persze az is adódik, hogy az utolsó jegy páros kell, hogy legyen.
Ha az ötödik jegy az 5 lenne, akkor a 14, 34, 54 valamelyike lenne ötjegyű számunk utolsó két jegyéből álló kétjegyű szám, ám ezek egyike sem osztható 4-gyel, így ez az eset nem lehetséges.
Ha a hiányzó ötödik jegy a 2, úgy az 1, 2, 3, 4, 5 jegyekből építhető 12 többszörösei között az 54312 a legnagyobb.
Ha a hiányzó ötödik jegy a 8, úgy az 1, 3, 4, 5 és 8 számjegyekből építhető 12 többszörösei között az 53184 a legnagyobb.
A lehetséges esetekből az első, az 54312 a legnagyobb. Ez tehát a megoldás.

4. Ha az $ABCD$ téglalap és az AQB, valamint APD szabályos háromszögek megegyező körüljárásúak, igazold, hogy a PQ szakasz egybevágó a téglalap átlójával!

Megoldás. Az ABD és APQ háromszögek egybevágóak a SzOSz tétel alapján, mert $|AD|=|AP|$, $|AB|=|AQ|$ és $DAB\angle \cong PAQ\angle \cong 90°$, tehát harmadik oldaluk is egyenlő, azaz $|DB|=|PQ|$.



10. évfolyam

1. „Képzeld, tegnap csupán 5, 50, 500 és 5000 dinárosok felhasználásával fizettem ki 500000 dinárt.” – mondja Gazdag Géza. „És hány darabot használtál fel?” – kérdezi Okos Berci. „A négyféle címletű pénzből együttesen 500 darabot.” – válszolja Géza. „Ez lehetetlen!” – mondja nyomban Berci. Kinek volt igaza és miért?

Megoldás. Jelölje a az ötezresek, b az ötszázasok, c az ötvenesek és d az ötösök számát, akkor ezekkel egyrészt

$$5000a + 500b + 50c + 5d = 500000,$$

másrészt

$$a + b + c + d = 500.$$

Ha az első egyenletet 5-tel elosztjuk és ebből kivonjuk a másodikat, akkor a

$$999a + 99b + 9c = 99500$$

egyenletet kapjuk. Ennek az egyenletnek a bal oldalán csupa 9-cel osztható tag van, tehát összegük is 9-nek többszöröse. A jobb oldalon álló 99500 azonban nem osztható 9-cel. Gazdag Géza által közöltek ellentmondásra vezetnek ezért Bercinek van igaza.

2. Határozd meg mindazokat az $n \in Z$ számokat, amelyekre az

$$x^3 - nx^2 + nx - (n^2 + 1) = 0$$

egyenletnek egész megoldásai vannak ($x \in Z$).

Megoldás. Legyen p az adott egyenlet egész megoldása ($p \in Z$).

Ekkor $p^3 - np^2 + np - n^2 = 1$, azaz $(p^2 + n)(p - n) = 1$.

Egész p és n esetén ez csak úgy lehetséges, hogy $1 \cdot 1 = 1$ vagy $(-1) \cdot (-1) = 1$.

(i) Legyen $p^2 + n = p - n = -1$.

Ebből $n = p + 1$ és $-1 = p^2 + (p + 1)$, amiből $p^2 + p + 2 = 0$ következik, amely egyenletnek nincs egész megoldása.

(ii) Legyen most $p^2 + n = p - n = 1$.

Ebből $n = p - 1$ és $1 = p^2 + (p - 1)$, amiből $p^2 + p - 2 = (p - 1)(p + 2) = 0$ következik, ahonnan $p = 1$ és $p = -2$ az egyenlet egész megoldásai.

Az eredeti egyenletnek tehát akkor lesznek egész megoldásai, ha $n = 0$ vagy $n = -3$, azaz, ha $n \in \{0, -3\}$.

3. Egy táblára felírták az összes pozitív egész számot 1-gyel kezdve és 2008-cal bezárólag. A felírt számjegyek hány százaléka az 5-ös számjegy?

Megoldás. Az egyjegyű számok leírásánál 1 db 5-ös számjegy található.
A kétjegyű számok leírásánál 19 db 5-ös számjegy található, az első helyen 10 és a második helyen 9 db.
A háromjegyű számok leírásánál összesen 280 db 5-ös számjegyet használunk fel, az első helyen 100, a második helyen $9\cdot 10=90$, a harmadik, az egyesek helyén pedig szintén $9\cdot 10=90$ db 5-ös számjegyet.
Az 1-gyel kezdődő négyjegyű számok leírásánál $1+19+280=300$ db 5-ös számjegyet írtunk le, míg 2000-től 2008-ig még 1 db 5-ös számjegyet használunk fel, tehát a négyjegyű számokat felírva 1000-től 2008-ig összesen 301 db 5-ös számjegyet használunk fel. Ezek szerint 1-től 2008-ig az egész számokat felírva összesen $1+19+280+301=601$ db 5-ös számjegyet írtunk fel.
Az összes leírt számjegyek száma: az egyjegyűeknél 9, a kétjegyűeknél $90\cdot 2=180$, a háromjegyűeknél $900\cdot 3=2700$, a négyjegyűeknél $1009\cdot 4=4036$, tehát összesen 6925 számjegyet írtunk fel a táblára.
A keresett százalék: $6925:601=100:x$, ahonnan $x=\frac{60100}{6925}\approx 8,68\%$.

4. Az AC szakasz az $ABCD$ paralelogramma hosszabbik átlója. Húzd a $CE\perp AB$ és $CF\perp AD$ szakaszokat, vagyis a C csúcsból a nem szomszédos oldalakra húzott merőlegeseket, $F\in AD$ és $E\in AB$. Bizonyítsd be, hogy ekkor

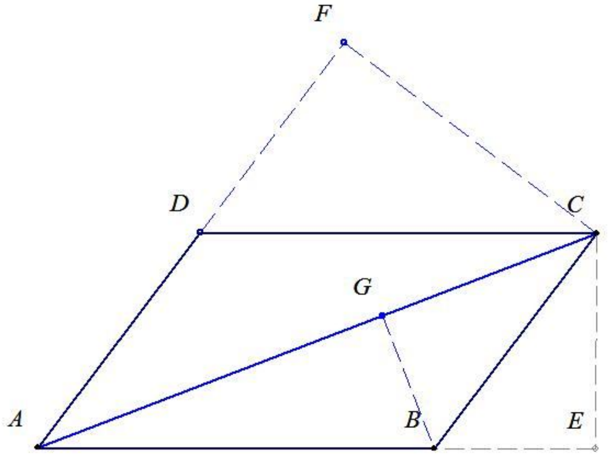
$$|AB|\cdot|AE|+|AD|\cdot|AF|=|AC|^2.$$

Megoldás. Legyen G pont a B csúcs merőleges vetülete az AC átlóra, ekkor érvényes, hogy $AEC\Delta\sim AGB\Delta$, valamint $AFC\Delta\sim CGB\Delta$.
Ebből következik, hogy $\frac{|AC|}{|AE|}=\frac{|BA|}{|AG|}$ és $\frac{|AC|}{|AF|}=\frac{|BC|}{|CG|}$.
Innen $|AB|\cdot|AE|=|AC|\cdot|AG|$ és $|BC|\cdot|AF|=|AC|\cdot|CG|$.
Adjuk össze a két egyenletet. Ekkor

$$|AB|\cdot|AE|+|BC|\cdot|AF|=|AC|\cdot|AG|+|AC|\cdot|CG|$$

Adódik, ebből pedig

$$|AB|\cdot|AE|+|AD|\cdot|AF|=|AC|\cdot\left(|AG|+|GC|\right)=|AC|^2.$$



11. évfolyam

1. Egy kis erdei tavat egy forrás táplál friss vízzel. Egyszer megjelent egy 183 tagú elefántcsorda és egy nap alatt kiitta a tó vizét. Később, mikor újra megtelt a tó, egy 37 tagú csorda 5 nap alatt itta ki a vizet. Egy elefánt hány nap alatt inná ki a tó vizét?

Megoldás. Legyen a teli tó víztartalma S **l**, az egy napi növekmény a forrásokból n **l**. Mivel 183 elefánt 1 nap alatt issza ki a tó vizét, ez azt jelenti, hogy kiissza a már meglevő S litert és az egy nap alatt még hozzá befolyó n litert. Azaz 183 elefánt egy nap alatt $S+n$ liter vizet iszik meg. Ekkor, feltételezve, hogy minden elefánt egyenlő mennyiséget iszik meg, egy nap alatt egy elefánt $\frac{S+n}{183}$ liter vizet iszik meg.

A másik feltételből 37 elefánt 5 nap alatt $S+5n$ litert iszik meg, ezért egy elefánt egy nap alatt $\frac{S+5n}{37\cdot 5}=\frac{S+5n}{185}$ litert. Ebből adódik, hogy $\frac{S+n}{183}=\frac{S+5n}{185}$, ahonnan $S=365n$. Tehát 183 elefánt egy nap folyamán $365n+n=366n$ liter vizet iszik meg, amiből viszont az is következik, hogy egy elefánt egy nap alatt pontosan $2n$ litert iszik meg. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy $1n$ litert fogyaszt el a teli tó vizéből és plussz azt az $1n$ litert, ami a nap folyamán befolyik a tóba. Mivel a teli tó tartalma $365n$ liter, ezért pontosan a 365-ik nap végére ürül ki teljesen a tó, ha csak egy elefánt iszik belőle.

2. Igazold, hogy az

$$x^{\log_{2007} x}\sqrt{2007}=x^{2007}$$

egyenlet megoldásainak szorzata természetes szám, majd határozd meg ennek a szorzatnak az utolsó két számjegyét!

Megoldás. Az egyenlet mindkét oldalának logaritmálása után kapjuk a

$$\log_{2007} x\cdot\log_{2007} x+\log_{2007} 2007^{\frac{1}{2}}=2007\log_{2007} x$$

egyenletet. Vezessük be az $a=\log_{2007} x$ helyettesítést.

Most az egyenlet ekvivalens az $a^2-2007a+\frac{1}{2}=0$ másodfokú egyenlettel.

A Viete szabály alapján a kapott másodfokú egyenlet a_1 és a_2 megoldásainak összege: $a_1+a_2=2007$.

Ekkor az eredeti egyenlet megoldásai $x_1=2007^{a_1}$ és $x_2=2007^{a_2}$, a szorzatuk pedig $x_1\cdot x_2=2007^{a_1}\cdot 2007^{a_2}=2007^{a_1+a_2}=2007^{2007}$, tehát természetes szám.

Hátra van még a kapott szorzat utolsó két számjegyének meghatározása, azaz a szorzat 100-zal való osztásakor keletkezett maradék maghatározása. Mivel $7^1=7$, $7^2=49$, $7^3=343$, $7^4=2401$, $7^5=16807$,..., belátható, hogy az utolsó két számjegy ciklikusan ismétlődik: 07, 49, 43, 01, ahol a ciklus hosszúsága 4. Mivel $2007=4\cdot 501+3$, adódik, hogy a 2007^{2007} szám utolsó két számjegye 43.

3. Oldd meg a valós számok halmazán az $(x+1)^4+(x+3)^4=16$ egyenletet!

Megoldás. Legyen $y=x+2$, ekkor $x+1=y-1$ és $x+3=y+1$, az egyenletünk pedig a következőképen alakul:

$(y-1)^4+(y+1)^4=16$

$y^4-4y^3+6y^2-4y+1+y^4+4y^3+6y^2+4y+1=16$

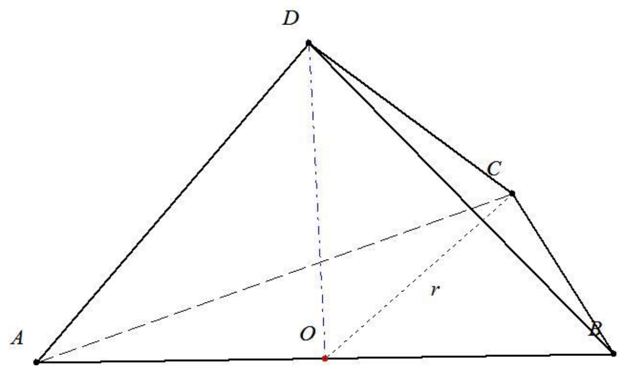
$2y^4+12y^2+2=16$

$y^4+6y^2-7=0$, ahonnan $y^2=1$ vagy $y^2=-7$, amelyek közül csak az $y^2=1$ egyenletnek vannak valós megoldásai, és ezek az $y_1=-1$ illetve az $y_2=1$. Ha tudjuk, hogy $y=x+2$, akkor $x_1=-3$ és $x_2=-1$, vagyis a megoldáshalmaz $M=\{-3,-1\}$.

4. Számítsd ki a háromoldalú gúla térfogatát, ha alapja derékszögű háromszög 8 *cm* és 15 *cm* befogókkal, oldalélei pedig $60°$-os szögben hajlanak az alaplap síkjához!

Megoldás. Legyen O pont az $ABCD$ háromoldalú gúla D csúcsának az ABC alapháromszögre vetített merőleges vetülete. Ekkor az $OAD\Delta$, $OBD\Delta$ és $OCD\Delta$ egybevágóak, mert derékszögűek és $60°$-os hegyesszögük szemben fekszik a közös OD magassággal. Tehát $|OA|\cong|OB|\cong|OC|$, vagyis az O pont az ABC háromszög körülírt körének középpontja, azaz ebben az esetben az átfogó felezőpontja. Ezért kiszámíthatjuk az alap átfogóját, $c=\sqrt{8^2+15^2}=17cm$, vagyis $r=\frac{17}{2}$. A test magassága DO valójában a DAB egyenlő oldalú háromszög magassága, ahonnan $H=|DO|=\frac{17\sqrt{3}}{2}$. A gúla térfogata

$$V=\frac{t_{ABC}\cdot H}{3}=170\sqrt{3}cm^3.$$



12. évfolyam

1. Egy nemzetközi labdarugó tornán minden csapat minden csapattal pontosan egyszer játszott. Győzelemért 3, döntetlenért 1, vereségért 0 pont járt. A bajnokság végén a csapatok pontszámainak összege 15 pont volt. Az utolsó helyezett 1 pontot gyűjtött, az utolsó előtti egyszer sem kapott ki. Hány pontot gyűjtött a második helyen végzett csapat?

Megoldás. Ha egy mérkőzés eldől, akkor 3, ha döntetlen lesz, akkor 2 pontot osztanak el a csapatok között. Tehát annál kevesebb a csapatok pontjainak összege, minél több a döntetlen. Először állapítsuk meg a csapatok számát. ha csak 3 csapat lenne, akkor 3 mérkőzésen maximum 9 lehetne a pontszámösszeg, ha pedig 5 csapat lenne, akkor 10 meccsen minimum 20 pont kerülne kiosztásra. Így a csapatok száma 4. Ha 4 csapat van, és nincs döntetlen, a pontszámok összege 6 meccsen 18 pont. Itt a csapatok 15 pontot gyűjtöttek, és mivel minden döntetlen 1-gyel csökkenti a pontszámösszeget, ezen a tornán 3 mérkőzés végződött döntetlenre. Az utolsó előtti, azaz a harmadik helyezett csapat egy meccset sem vesztett. Ha nyert volna legalább egy meccset, akkor legalább 5 pontja lenne. De akkor az előtte végzett két csapatnak is legalább 5-5 pontja lenne, ekkor azonban a csapatok összpontszáma már legalább 16 lenne. Ezek szerint a harmadik helyezett csapat minden meccse döntetlenre végződött.
Az első két csapat tehát megverte az utolsót és döntetlent játszott a harmadikkal. Mivel több döntetlen nem volt, az első helyezett legyőzte a másodikat, vagyis a második helyen végzett csapat 4 pontot gyűjtött.

2. Igazold, hogy az

$$x^{\log_{2007} x}\sqrt{2007} = x^{2007}$$

egyenlet megoldásainak szorzata természetes szám, majd határozd meg ennek a szorzatnak az utolsó két számjegyét!

Megoldás. Az egyenlet mindkét oldalának logaritmálása után kapjuk a

$$\log_{2007} x \cdot \log_{2007} x + \log_{2007} 2007^{\frac{1}{2}} = 2007 \log_{2007} x$$

egyenletet.
Vezessük be az $a = \log_{2007} x$ helyettesítést.

Most az egyenlet ekvivalens az $a^2 - 2007a + \frac{1}{2} = 0$ másodfokú egyenlettel.

A Viete szabály alapján a kapott másodfokú egyenlet a_1 és a_2 megoldásainak összege: $a_1 + a_2 = 2007$.

Ekkor az eredeti egyenlet megoldásai $x_1 = 2007^{a_1}$ és $x_2 = 2007^{a_2}$, a szorzatuk pedig $x_1 \cdot x_2 = 2007^{2007}$, tehát természetes szám.
Hátra van még a kapott szorzat utolsó két számjegyének meghatározása, azaz a szorzat 100-zal való osztásakor keletkezett maradék maghatározása. Mivel $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$, $7^5 = 16807$,..., belátható, hogy az utolsó két számjegy ciklikusan ismétlődik: 07, 49, 43, 01, ahol a ciklus hosszúsága 4. Mivel $2007 = 4 \cdot 501 + 3$, adódik, hogy a 2007^{2007} szám utolsó két számjegye 43.

3. Oldjuk meg a $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ intervallumon a következő trigonometrikus egyenletet:

$$\cos^3 3x+\cos^3 5x=8\cos^3 4x\cdot\cos^3 x\,.$$

Megoldás. Ha tudjuk, hogy $\cos 3x+\cos 5x=2\cos 4x\cdot\cos x$, akkor az adott egyenlet a következőképpen alakítható:

$\cos^3 3x+\cos^3 5x=8\cos^3 4x\cdot\cos^3 x$

$\cos^3 3x+\cos^3 5x=(2\cos 3x\cos x)^3$

$\cos^3 3x+\cos^3 5x=(\cos 5x+\cos 3x)^3$

$\cos^3 3x+\cos^3 5x=\cos^3 5x+3\cos^2 5x\cos 3x+3\cos 5x\cos^2 3x+\cos^3 3x$

$0=3\cos^2 5x\cos 3x+3\cos 5x\cos^2 3x$

$3\cos 5x\cos 3x(\cos 5x+\cos 3x)=0$

$\cos 5x=0 \quad\vee\quad \cos 3x=0 \quad\vee\quad \cos 5x+\cos 3x=0$

Ha $\cos 5x=0$, akkor $5x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, vagyis $x=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}=18^\circ+k\cdot 36^\circ$. Innen az adott intervallumba eső megoldások a 126° és a 162°.

Ha $\cos 3x=0$, akkor $3x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, azaz $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}=30^\circ+k\cdot 60^\circ$. Innen az adott intervallumba eső megoldás a 150°.

Ha $\cos 3x+\cos 5x=0$, akkor $2\cos 4x\cos x=0$, ahonnan $\cos 4x=0$ vagy $\cos x=0$.

Ha $\cos x=0$, akkor $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, amely esetben egy megoldás sem esik az adott intervallumba.

Ha $\cos 4x=0$, akkor $4x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, ahonnan $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}=22{,}5^\circ=k\cdot 45^\circ$.

Innen az adott intervallumba eső megoldások a $112{,}5^\circ$ és a $157{,}5^\circ$.

Összefoglalva a keresett megoldások: $112{,}5^\circ$; 126°; 150°; $157{,}5^\circ$; 162°.

4. Egy henger alakú edényt, amelynek alapátmérője $4\,dm$ és a mélysége $3\,dm$, teletöltöttük vízzel. Mennyi víz marad benne, ha az alap síkjához viszonyítva 30°-os szögben megdöntjük?

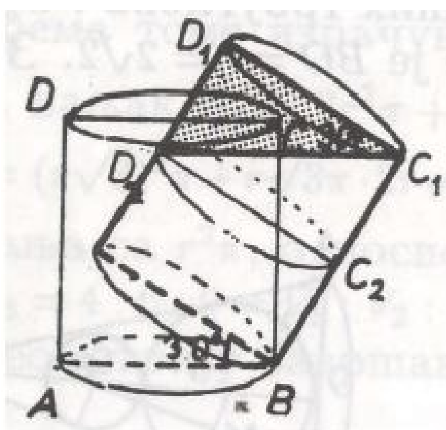
Megoldás. A megdöntés után a víz egy része kifolyt, majd vízszintes helyzetet vesz fel újból. A kiömlött víz térfogata fele annak a henger térfogatának, amelyet az ábrán látunk. Az edény térfogata $(r=2\,dm,\ H=3\,dm)$ V=12π dm^3,

a kifolyt vízé $\left(r=2\,dm,\ H_1=\frac{4}{\sqrt{3}}\,dm\right)$

$\frac{1}{2}V_1=\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi\ dm^3$,

tehát a maradék

$V-\frac{1}{2}V_1=\left(12-\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)\pi\,dm^3\approx 23{,}19\ liter$.



A VI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

9. évfolyam

1. Piri Annamária, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **I. díj**
2. Ripcó Ákos, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Kőrösi Balázs, Műszaki Középiskola, Ada, **II. díj**
4. Gyarmati Dénes, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
5. Horvát Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
6. Körmöczi Andor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
7. Nagygyörgy Kristóf, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
8. Simonyi Máté, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
9. Milinszki Hajnalka, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
10. Pusin Igor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
11. Kiss Csaba, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
12. Brusznyai Borisz, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
13. Hajnal Andor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**

10. évfolyam

1. Kovacsics Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **I. díj**
2. Bálind Árpád, Műszaki Középiskola, Ada, **II. díj**
3. Berec Alexandra, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
4. Vrbaski Iván, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**

11. évfolyam

1. Ágó Krisztina, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **I. díj**
2. Kecsenovity Egon, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **II. díj**
3. Kovacsics Tóbiás, Műszaki Középiskola, Óbecse, **III. díj**
4. Balassa Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
5. Tóth Szabolcs, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**

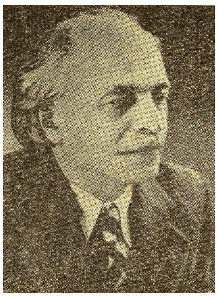
12. évfolyam

1. Kanalas Vidor, Matematikai Gimnázium, Belgrád, **I. díj**
2. Takács Emese, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **II. díj**
3. Róka Gáspár, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
4. Bodócsi Endre, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
5. Kasza Ákos, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
6. Farkas Gabriella, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
7. Gimpel Ákos, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**

A VII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Előadó: dr. Kincses János
Előadás címe: Érdekes matematikai problémák

Verseny előtti megbeszélés (Pap Zoltán, Pap Horváth Erika, Péics Hajnalka, Miklós Gyöngyi, Csikós Pajor Gizella, Meoželj Sonja, Zolnai Irén, Ripcó Sipos Elvira, Rozsnyik Andrea, Szűcs Emese, Boros István).



VII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2009. november 28.

8. évfolyam

1. A VI. Fekete Mihály Emlékverseny első fordulója után továbbjutott a versenyzők $\frac{1}{5}$ része. A második fordulón résztvevők $\frac{2}{7}$ része került a döntőbe. Ha az első forduló után jutott volna tovább a versenyzők $\frac{2}{7}$ része, és a második fordulón résztvevők $\frac{1}{5}$ része került volna a döntőbe, akkor a három fordulón összesen 12-vel több dolgozatot kellett volna javítani. Hányan indultak a VI. Fekete Mihály Emlékverseny első fordulóján?

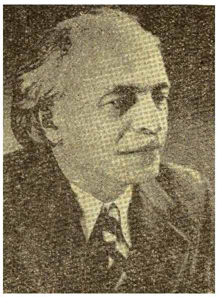
2. Melyek azok a kétjegyű természetes számok, amelyekre igaz, hogy maga a szám 17-tel nagyobb, mint számjegyeinek szorzata?

3. Egy különböző számjegyekből álló hatjegyű szám számjegyei (valamilyen sorrendben) 1, 2, 3, 4, 5, 6. Az első két számjegyből álló kétjegyű szám osztható 2-vel, az első három számjegyből álló háromjegyű szám osztható 3-mal és így tovább, maga a szám osztható 6-tal. Melyik ez a szám?

4. Jelölje egy háromszög csúcsait A, B és C. Legyen az AC oldal felezőpontja E, a BC oldal B-hez közeli harmadoló pontja D. Az AD és BE egyenesek metszéspontját jelölje F. Mekkora a BDF háromszög és az $FDCE$ négyszög területének aránya?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



VII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2009. november 28.

9. évfolyam

1. Precíz Peti felírta a számokat 1-től 10000-ig. Először aláhúzta pirossal azokat a számokat, amelyek oszthatók 4-gyel, majd aláhúzta zölddel azokat, amelyek oszthatók 5-tel, végül aláhúzta kékkel az összes 6-tal oszthatót. Hány szám lett így aláhúzva pontosan két színnel?

2. Melyek azok a kétjegyű természetes számok, amelyekre igaz, hogy maga a szám 17-tel nagyobb, mint számjegyeinek szorzata?

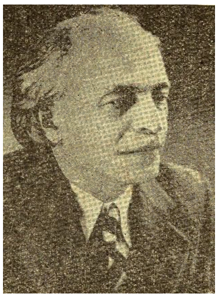
3. Egy számsorozat valamely tagját jobbminimálisnak nevezzük, ha tőle jobbra nem található nála kisebb szám. Például a (2; 1; 4; 6; 3; 7; 8; 5) sorozatban jobbminimális számok az 1 és a 3 (a jobbszélső 5-öst nem tekintjük annak). Ezek alapján az említett sorozatban a második és az ötödik helyen áll jobbminimális szám. Hány olyan sorrendje (permutációja) van az 1, 2, …, 8 számoknak, amelyekben a második és az ötödik helyen (és esetleg másutt is) jobbminimális számok állnak?

4. Legyenek x_a, x_b és x_c az ABC hegyesszögű háromszög tetszőleges P belső pontjának rendre az a, b és c oldalaktól mért távolságai. Jelölje m_a, m_b és m_c a megfelelő oldalakhoz tartozó magasságokat. Igazold, hogy

$$\frac{x_a}{m_a}+\frac{x_b}{m_b}+\frac{x_c}{m_c}=1.$$

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



VII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2009. november 28.

10. évfolyam

1. A gödényházi sörivó versenyen hárman kerültek a döntőbe: a tűzoltóparancsnok, a kántor és a harangozó. A kijelölt idő alatt a tűzoltóparancsnok és a kántor együtt kétszer annyi sört ivott meg, mint a harangozó. A tűzoltóparancsnok és a harangozó együttes teljesítménye viszont háromszor annyi, mint a kántoré. Ki nyerte a versenyt?

2. Egy kétjegyű szám számjegyei közé írtunk egy számjegyet. Az így kapott háromjegyű szám és az eredeti kétjegyű szám számtani közepe egyenlő az eredeti kétjegyű szám számjegyeinek felcserélésével kapott kétjegyű számmal. Mi volt az eredeti szám?

3. Az AB és CD egy O középpontú körnek két, egymásra merőleges átmérője. Az OD szakaszt felező E ponton halad az AF húr, az AB és CF szakaszok metszéspontja a G pont. Igazold, hogy az $|OB| = 3 \cdot |OG|$ és a $|CF| = 3 \cdot |DF|$.

4. Legyenek $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2009}$ pozitív valós számok.
Bizonyítsd be a következőket:

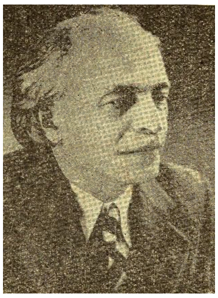
a) Minden pozitív x valós számra igaz, hogy $x(1-x) \le \frac{1}{4}$.

b) Egyidőben nem teljesülhet a következő egyenlőtlenségek mindegyike:

$x_1(1-x_2) \le \frac{1}{4}$, $x_2(1-x_3) \le \frac{1}{4}$, ..., $x_{2008}(1-x_{2009}) \le \frac{1}{4}$, $x_{2009}(1-x_1) \le \frac{1}{4}$.

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



VII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2009. november 28.

11. évfolyam

1. A gödényházi sörivó versenyen hárman kerültek a döntőbe: a tűzoltóparancsnok, a kántor és a harangozó. A kijelölt idő alatt a tűzoltóparancsnok és a kántor együtt kétszer annyi sört ivott meg, mint a harangozó. A tűzoltóparancsnok és a harangozó együttes teljesítménye viszont háromszor annyi, mint a kántoré. Ki nyerte a versenyt?

2. Felírtuk egy táblára 1-től 2009-ig a számokat, majd valamelyik két szomszédost letöröltük, és helyettük felírtuk a különbségüket (a nagyobból kivonva a kisebbet). Ezt az eljárást addig ismételgettük, míg végül csak egy szám maradt a táblán.
a) Mutassuk meg, hogy utolsó számként nem jöhet ki az 1000.
b) Adjunk egy eljárást, amely utolsó számként az 1001-et eredményezi!

3. Adott az $ABCD$ **érintőnégyszög, amelynek az alapon fekvő szögei** α **és** β**.**
Igazold, hogy $\frac{|AB|}{|CD|} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$**.**

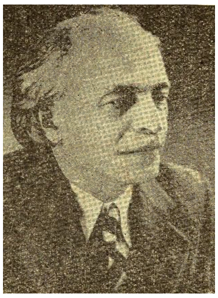
4. Bizonyítsd be, hogy az

$$x^2 - \frac{n^2+1}{n}x - \frac{n^2+1}{2n} = 0$$

egyenlet gyökei valósak és irracionális számok minden n **természetes számra!**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



VII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2009. november 28.

12. évfolyam

1. Egy bank páncélszekrényén több különböző zár van. Kulcsaikat úgy osztották szét a bank négy pénztárosa között, hogy a páncélszekrény kinyitásához legalább hármuknak jelen kell lenni, de mind a négynek nem, hogy a náluk levő kulcsokkal ki lehessen nyitni az összes zárat. (Egy zárhoz többüknél is lehet kulcs, és egy embernél többféle kulcs is lehet.) Legkevesebb hány zár van a páncélszekrényen?

2. Határozd meg a $\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{1+\sqrt{2}\sin x}=\dfrac{\sin^4 x-\cos^4 x}{1+\sqrt{2}\sin x}$ **egyenlet valós megoldásait!**

3. Az $y=(x-1)^2+2$ **parabola** P_1 **és** P_2 **pontjából az** $A(1,2)$ **és** $B(1,6)$ **pontok által meghatározott szakasz derékszögben látszik. Mekkora az** AP_1BP_2 **négyszög területe?**

4. Határozd meg azt a pozitív x **számot, melyre az**

$$f(x)=\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6-\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)-2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}$$

függvény a lehető legkisebb értékét veszi fel! Határozd is meg ezt a legkisebb értéket!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

A VII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

8. évfolyam

1. A VI. Fekete Mihály Emlékverseny első fordulója után továbbjutott a versenyzők $\frac{1}{5}$ része. A második fordulón résztvevők $\frac{2}{7}$ része került a döntőbe. Ha az első forduló után jutott volna tovább a versenyzők $\frac{2}{7}$ része, és a második fordulón résztvevők $\frac{1}{5}$ része került volna a döntőbe, akkor a három fordulón összesen 12-vel több dolgozatot kellett volna javítani. Hányan indultak a VI. Fekete Mihály Emlékverseny első fordulóján?

Megoldás. Foglaljuk táblázatba a feltételeket! Mivel (még) nem ismerjük a versenyen indulók számát, jelöljük ezt x-szel.

	A versenyzők száma a valóságban	A versenyzők száma a „mi lett volna” esetén
1. fordulóban	x	x
2. fordulóban	$\frac{x}{5}$	$\frac{2x}{7}$
A döntőben	$\frac{2}{7}\cdot\frac{x}{5}$	$\frac{1}{5}\cdot\frac{2x}{7}$
A dolgozatok száma	$x+\frac{x}{5}+\frac{2x}{35}$	$x+\frac{2x}{7}+\frac{2x}{35}$

A „mi lett volna” esetén 12 dolgozattal több lenne, tehát $x+\frac{x}{5}+\frac{2x}{35}+12=x+\frac{2x}{7}+\frac{2x}{35}$. Az egyenlet mindkét oldalából $x+\frac{2x}{35}$-öt levonva $\frac{x}{5}+12=\frac{2x}{7}$ adódik. Szorozzuk meg ennek az egyenletnek mindkét oldalát 35-tel, és a szorzás során lehetséges egyszerűsítéseket végrehajtva nyerjük, hogy $7x+12\cdot 35=10x$. Most a $7x$ kerül levonásra, majd 3-mal egyszerűsíthetünk, s adódik: $3x=12\cdot 35$, azaz $x=4\cdot 35=140$. Ezt az eredményt természetesen a feladatszöveggel egybevetve ellenőriznünk kell! A 140 induló ötöde 28, ennek $\frac{2}{7}$-e 8 és ez $140+28+8=176$ dolgozatot jelent. A 140-nek a $\frac{2}{7}$-e 40, ennek ötöde 8, és a dolgozatok száma $140+40+8=188$ valóban 12-vel több az előbbi dolgozatszámnál. A versenyen tehát 140 induló volt az első fordulóban.

2. Melyek azok a kétjegyű természetes számok, amelyekre igaz, hogy maga a szám 17-tel nagyobb, mint számjegyeinek szorzata?

I.Megoldás. Ha a kétjegyű szám tizeseinek számát x, egyeseinek számát pedig y jelöli, akkor a feltételek szerint kétjegyű számnkra $10x + y = xy + 17$, ahol $x \geq 1$ és $0 \leq y \leq 9$. Tegyük a fenti egyenletbe x helyére rendre a pozitív egyjegyűeket:

$$10 + y = y + 17,\ 20 + y = 2y + 17,\ 30 + y = 3y + 17,$$
$$40 + y = 4y + 17,\ 50 + y = 5y + 17,\ 60 + y = 6y + 17,$$
$$70 + y = 7y + 17,\ 80 + y = 8y + 17,\ 90 + y = 9y + 17.$$

A fenti egyenletek közül az elsőnek nincs megoldása, a másodikat követő ötnek és az utolsónak egész megoldása nincs. A másodikat az $y = 3$, míg az utolsó előttit az $y = 9$ elégíti ki, tehát két olyan kétjegyű szám lehet, amely a feltételeket kielégíti, a 23 és a 89. Mivel $2 \cdot 3 + 17 = 23$ és $8 \cdot 9 + 17 = 89$, a 23 és a 89 valóban megoldások.

II. Megoldás: Előbbi jelölésünket megtartva a $10x + y = xy + 17$ egyenletet alakítjuk át a következőképpen: $0 = xy - 10x - y + 10 + 7$. Tettük ezt azért, hogy a jobb oldal első négy tagját szorzattá alakíthassuk, mint $0 = (x-1)(y-10) + 7$, amiből $(x-1)(y-10) = -7$. Most már látható, hogy az $x \geq 1$ és $y \leq 9$ egészek miatt a bal oldal mindkét tényezője egész szám, mégpedig az első tényező a pozitív, a második negatív. Ilyen egészek szorzata csak úgy lehet -7, ha

$$x - 1 = 1 \text{ és } y - 10 = -7$$

vagy

$$x - 1 = 7 \text{ és } y - 10 = -1.$$

Az első lehetőség az $x = 2$, $y = 3$, a második az $x = 8$, $y = 9$ megoldásokat adja.

3. Egy különböző számjegyekből álló hatjegyű szám számjegyei (valamilyen sorrendben) 1, 2, 3, 4, 5, 6. Az első két számjegyből álló kétjegyű szám osztható 2-vel, az első három számjegyből álló háromjegyű szám osztható 3-mal és így tovább, maga a szám osztható 6-tal. Melyik ez a szám?

Megoldás. A hatjegyű szám második, negyedik és hatodik jegye a 2-vel, 4-gyel és 6-tal való oszthatóság miatt páros kell legyen, és az ötödik jegy az 5-tel oszthatóság miatt csak 5 lehet. Az első és a harmadik jegy tehát csakis az 1 és a 3 lehet valamely sorrendben. A hárommal oszthatóság miatt a második jegy csak a 2 lehet, hiszen $1 + 4 + 3$ illetve az $1 + 6 + 3$ egyike sem többszöröse a 3-nak. Így ha számunk első három jegye sorrendben az 123, úgy a 4-gyel oszthatóság miatt a negyedik jegy csak a 6 lehet, mivel 34 nem osztható 4-gyel, ekkor tehát a hatjegyű szám a 123654. Ha pedig számunk első három jegye rendre a 321, úgy a negyedik jegy ismét csak a 6, hiszen a 14 nem nem többszöröse a 4-nek, számunk tehát most a 321654. Mindkét esetben a 6-tal oszthatóságot a szám párossága és jegyei összegének (1+2+3+4+5+6=21) 3-mal való oszthatósága biztosítja.

4. Jelölje egy háromszög csúcsait A, B és C. Legyen az AC oldal felezőpontja E, a BC oldal B-hez közeli harmadoló pontja D. Az AD és BE egyenesek metszéspontját jelölje F. Mekkora a BDF háromszög és az $FDCE$ négyszög területének aránya?

I.Megoldás. Húzzunk az E ponton át egy, az AD-vel párhuzamos egyenest. Messe ez BC-t a G-ben (ábra). Mivel az $ACD\Delta$-ben E felezőpont és $EG \parallel AD$, ezért EG e háromszög egyik középvonala és ennélfogva G felezi a DC-t, G tehát a BC-nek C-hez közelebbi harmadolópontja. Most tekintsük a $BEG\Delta$-et. Ebben D a BG-nek felezőpontja és $FD \parallel EG$, tehát FD középvonala a háromszögnek, azaz F felezi a BE-t. A $CDE\Delta$ területe a $BEC\Delta$ területének $\frac{2}{3}$-a, hiszen $CD = \frac{2}{3}CB$ és ezekhez az oldalakhoz tartozó magasságaik azonosak. Így a $BDE\Delta$ területe pedig a $BEC\Delta$ területének $\frac{1}{3}$-a. Mivel F felezi a BE-t, ezért a $BDF\Delta$ területe és az $EFD\Delta$ területe egyenlő, éspedig a $BEC\Delta$ területének $\frac{1}{6}$-ával. A $CDFE$ négyszög területére tehát a $BEC\Delta$ területének $\frac{5}{6}$-a jut, és így a keresett területarány $1:5$.

II.Megoldás: Fektessünk az E ponton át egy, az CB-vel párhuzamos egyenest. Messe ez az AD-t a H pontban. Az EH középvonala az $ACD\Delta$-nek, hiszen E felezőpont és $EH \parallel CD$. Ennélfogva $EH = \frac{1}{2}DC$. Ám a D harmadolópontja BC-nek, vagyis $BD = \frac{1}{2}DC$, tehát $EH = BD$, amiből következik, hogy az $EHBD$ négyszög paralelogramma, mert van két párhuzamos és egyenlő oldala. A paralelogrammát átlói (a BE és a DH szakaszok) négy egyenlő területű háromszögre darabolják, tehát $T_{BDF\Delta} = T_{DEF\Delta}$, ám a $BDE\Delta$ területe a $BCE\Delta$ területének $\frac{1}{3}$-a, vagyis, $T_{BDF\Delta} = \frac{1}{6}T_{BCE\Delta}$ és ezért $T_{CDFE} = \frac{5}{6}T_{BCE\Delta}$. A keresett arány tehát $1:5$.

III.Megoldás: Húzzunk a B, a C és az E pontokon át AD-vel párhuzamos egyenest. Az E-re fektetett ilyen egyenes a DC szakaszt felezi, mert az $ACD\Delta$-ben ez az egyenes középvonal. Húzzunk most a C, a D és az utóbb nyert G (a DC felezőpontja, azaz a BC másik harmadolópontja) pontokon át a BE-vel párhuzamost. Így az összehasonlításra váró két sokszöget egy paralelogramma-rácsba helyeztük, amelynek „rácsszemei” egybevágóak, tehát egyenlő területűek is. A 9 egybevágó lapból a $BEC\Delta$ 3 lapnyit tölt ki, hiszen a $BHC\Delta$ területe 4.5 lapnyi, a $CEH\Delta$ területe pedig 1.5 lapnyi. A $BFD\Delta$ területe 0.5 lapnyi, tehát a keresett arány $0.5:2.5$, ami éppen az $1:5$ aránnyal egyenlő.

9. évfolyam

1. Precíz Peti felírta a számokat 1-től 10000-ig. Először aláhúzta pirossal azokat a számokat, amelyek oszthatók 4-gyel, majd aláhúzta zölddel azokat, amelyek oszthatók 5-tel, végül aláhúzta kékkel az összes 6-tal oszthatót. Hány szám lett így aláhúzva pontosan két színnel?

Megoldás. Piros és zöld színnel összesen 500 szám van aláhúzva, ugyanis ennyiszer van meg a 10000-ben a 4 és 5 legkisebb közös többszöröse. Zölddel és 833 szám van aláhúzva, pirossal és kékkel pedig 333. Mindegyik összegben szerepelnek azok a számok is, amelyek háromszor lettel aláhúzva. Ezek száma 166. A keresett számosságot a következő számolás adja:

$$500+833+333-3\cdot 166=1666-498=1168.$$

2. Melyek azok a kétjegyű természetes számok, amelyekre igaz, hogy maga a szám 17-tel nagyobb, mint számjegyeinek szorzata?

I.Megoldás. Ha a kétjegyű szám tizeseinek számát x, egyeseinek számát pedig y jelöli, akkor a feltételek szerint kétjegyű számnkra $10x+y=xy+17$, ahol $x\geq 1$ és $0\leq y\leq 9$. Tegyük a fenti egyenletbe x helyére rendre a pozitív egyjegyűeket:

$$10+y=y+17,\ 20+y=2y+17,\ 30+y=3y+17,$$
$$40+y=4y+17,\ 50+y=5y+17,\ 60+y=6y+17,$$
$$70+y=7y+17,\ 80+y=8y+17,\ 90+y=9y+17.$$

A fenti egyenletek közül az elsőnek nincs megoldása, a másodikat követő ötnek és az utolsónak egész megoldása nincs. A másodikat az $y=3$, míg az utolsó előttit az $y=9$ elégíti ki, tehát két olyan kétjegyű szám lehet, amely a feltételeket kielégíti, a 23 és a 89. Mivel $2\cdot 3+17=23$ és $8\cdot 9+17=89$, a 23 és a 89 valóban megoldások.

II. Megoldás: Előbbi jelölésünket megtartva a $10x+y=xy+17$ egyenletet alakítjuk át a következőképpen: $0=xy-10x-y+10+7$. Tettük ezt azért, hogy a jobb oldal első négy tagját szorzattá alakíthassuk, mint $0=(x-1)(y-10)+7$, amiből $(x-1)(y-10)=-7$. Most már látható, hogy az $x\geq 1$ és $y\leq 9$ egészek miatt a bal oldal mindkét tényezője egész szám, mégpedig az első tényező a pozitív, a második negatív. Ilyen egészek szorzata csak úgy lehet -7, ha

$$x-1=1 \text{ és } y-10=-7$$

vagy

$$x-1=7 \text{ és } y-10=-1.$$

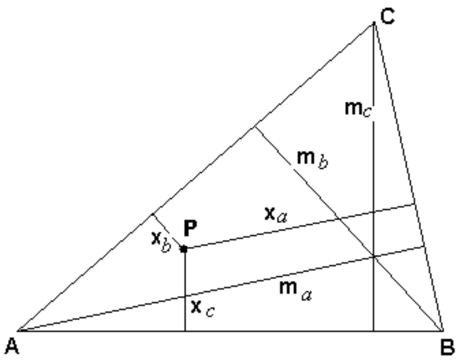
Az első lehetőség az $x=2$, $y=3$, a második az $x=8$, $y=9$ megoldásokat adja.

3. Egy számsorozat valamely tagját jobbminimálisnak nevezzük, ha tőle jobbra nem található nála kisebb szám. Például a (2; 1; 4; 6; 3; 7; 8; 5) sorozatban jobbminimális számok az 1 és a 3 (a jobbszélső 5-öst nem tekintjük annak). Ezek alapján az említett sorozatban a második és az ötödik helyen áll jobbminimális szám. Hány olyan sorrendje (permutációja) van az 1, 2, …, 8 számoknak, amelyekben a második és az ötödik helyen (és esetleg másutt is) jobbminimális számok állnak?

Megoldás. Állítsuk össze a keresett permutációt balról jobbra haladva. Az első helyen a 8 szám közül bármelyik állhat. A második szám egyértelműen meghatározott, hiszen csak akkor lehet jobbminimális, ha a megmaradt számok közül a legkisebbet választjuk. A harmadik és a negyedik szám a megmaradtak közül bármelyik lehet. Az ötödik szám ismét kizárólag a még fel nem használt 4 szám közül a legkisebb lehet. A megmaradt 3 számot beírhatjuk tetszőleges sorrendben. Ez összesen 8·6·5·3·2·1 = 1440 lehetséges sorrendet ad.

4. Legyenek x_a, x_b és x_c az ABC hegyesszögű háromszög tetszőleges P belső pontjának rendre az a, b és c oldalaktól mért távolságai. Jelölje m_a, m_b és m_c a megfelelő oldalakhoz tartozó magasságokat. Igazold, hogy

$$\frac{x_a}{m_a}+\frac{x_b}{m_b}+\frac{x_c}{m_c}=1.$$



Megoldás. Mivel

$$Ter(BCP)+Ter(CAP)+Ter(ABP)=Ter(ABC),$$

így elosztva mindkét oldalt $Ter(ABC)$-vel adódik:

$$\frac{Ter(BCP)}{Ter(ABC)}+\frac{Ter(CAP)}{Ter(ABC)}+\frac{Ter(ABP)}{Ter(ABC)}=1.$$

Behelyettesítve sorban a megfelelő háromszögek területeit kapjuk, hogy

$$\frac{\frac{a\cdot x_a}{2}}{\frac{a\cdot m_a}{2}}+\frac{\frac{b\cdot x_b}{2}}{\frac{b\cdot m_b}{2}}+\frac{\frac{c\cdot x_c}{2}}{\frac{c\cdot m_c}{2}}=1.$$

Elvégezve az egyszerűsítéseket megkapjuk a keresett egyenlőséget, azaz hogy

$$\frac{x_a}{m_a}+\frac{x_b}{m_b}+\frac{x_c}{m_c}=1.$$

10. évfolyam

1. A gödényházi sörivó versenyen hárman kerültek a döntőbe: a tűzoltóparancsnok, a kántor és a harangozó. A kijelölt idő alatt a tűzoltóparancsnok és a kántor együtt kétszer annyi sört ivott meg, mint a harangozó. A tűzoltóparancsnok és a harangozó együttes teljesítménye viszont háromszor annyi, mint a kántoré. Ki nyerte a versenyt?

I.Megoldás. Jelöljük a tűzoltóparancsnok, a kántor és a harangozó által elfogyasztott sörmennyiséget rendre t-vel, k-val és h-val. Ekkor

$$t+k=2h \text{ és } t+h=3k.$$

A két egyenletet kivonva adódik, hogy $k-h=2h-3k$, azaz $4k-3h$, ahonnan belátható, hogy $h>k$.
Megállapíthatjuk tehát, hogy a kántor nem nyerhetett, ezért most már elegendő a tűzoltóparancsnok és a harangozó teljesítményét összehasonlítani. Ehhez a fenti egyenletrendszert úgy alakítjuk, hogy k essen ki belőle (3-mal szorozzuk az elsőt és hozzáadjuk a másodikhoz), azaz $4t+3k+h=6h+3k$, ahonnan $4t=5h$, vagyis $t>h$.
Tehát a tűzoltóparancsnok nyert.

II.Megoldás. A tűzoltóparancsnok olyan vödröt készíttetett, amelynek térfogata pontosan az ő általa elfogyasztott sör mennyiségével egyezett meg. Így az ő teljesítménye 1 *vödör* volt. Jelöljük továbbra is a kántor és a harangozó által elfogyasztott sörmennyiséget rendre k-val és h-val. Ekkor a verseny jegyzőkönyve alapján tapasztaltakat már felírhatjuk kétismeretlenes egyenletrendszerrel:

$$1+k=2h \text{ és } 1+h=3k.$$

Az első egyenletből $k=2h-1$, ezt a második egyenletbe helyettesítve $1+h=3(2h-1)$ adódik. Ebből

$$h=\frac{4}{5} \textbf{ és } k=2h-1=2\cdot\frac{4}{5}-1=\frac{3}{5}.$$

Mivel k és h kisebb 1-nél, ezért a tűzoltóparancsnok nyert.

III.Megoldás.
A tűzoltóparancsnok és a kántor együtt kétszer annyi sört ivott meg, mint a harangozó.
Eszerint a harangozó teljesítménye átlagos.
Vagy van nála jobb és gyengébb, vagy mindhárom egyforma.

A tűzoltóparancsnok és a harangozó együttes teljesítménye háromszor annyi, mint a kántoré.
Eszerint viszont, ha a kántor helyére a harangozó kerül a kétfős csapatba, akkor a kétfős csapat teljesítménye javul a kimaradt egy főhöz képest, tehát a harangozó teljesítménye nagyobb a kántorénál.

A fentiekből belátható, hogy a sorrend: tűzoltóparancsnok, kántor,harangozó.

2. Egy kétjegyű szám számjegyei közé írtunk egy számjegyet. Az így kapott háromjegyű szám és az eredeti kétjegyű szám számtani közepe egyenlő az eredeti kétjegyű szám számjegyeinek felcserélésével kapott kétjegyű számmal. Mi volt az eredeti szám?

Megoldás. Legyen az $\overline{ab}$ kétjegyű szám, k pedig a számjegyei közé írt harmadik számjegy. A feltételek alapján $\frac{\overline{ab}+\overline{akb}}{2}=\overline{ba}$, vagyis a háromjegyű szám kisebb 200-nál (másképpen a számtani közép is háromjegyű). Tehát az $a=1$ és akkor $10+b+100+10k+b=20b+2$, amely alapján $108+10k=18b$, azaz $5k=9(b-6)$, tehát 9 osztója az $5k$-nak, így a $k=0$ vagy $k=9$. Ha $k=0$, akkor az eredeti szám 16. Ha $k=9$, akkor $54+45=9b$, $b=11$ pedig nem lehetséges.

3. Az AB és CD egy O középpontú körnek két, egymásra merőleges átmérője. Az OD szakaszt felező E ponton halad az AF húr, az AB és CF szakaszok metszéspontja a G pont. Igazold, hogy az $|OB|=3\cdot|OG|$ és a $|CF|=3\cdot|DF|$.

Megoldás. Jelölje r a kör sugarát. Az $AOE\Delta \approx AFB\Delta$, mert két megfelelő szögük egyenlő. Ugyanakkor $BFC\angle = CFA\angle = AFD\angle$ (azonos hosszúságú ívekhez tartozó kerületi szögek), ezért GF szögfelező az $AFB\Delta$-ben, tehát $\frac{|AG|}{|GB|}=\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{2}{1}$, amiből $|OG|=r-\frac{2}{3}r=\frac{1}{3}r=\frac{1}{3}|OB|$, azaz $|OB|=3\cdot|OG|$. Mivel $|DE|=\frac{1}{2}r$ és $|CE|=\frac{3}{2}r$, ezért mivel EF szögfelező a $CFD\Delta$-ben, így $\frac{|DF|}{|CF|}=\frac{|DE|}{|CE|}=\frac{1}{3}$, azaz $|CF|=3\cdot|DF|$.

4. Legyenek $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2009}$ pozitív valós számok.
Bizonyítsd be a következőket:

a) Minden pozitív x valós számra igaz, hogy $x(1-x)\le\frac{1}{4}$.

b) Egyidőben nem teljesülhet a következő egyenlőtlenségek mindegyike:
$x_1(1-x_2)>\frac{1}{4}$, $x_2(1-x_3)>\frac{1}{4}$, ..., $x_{2008}(1-x_{2009})>\frac{1}{4}$, $x_{2009}(1-x_1)>\frac{1}{4}$.

Megoldás. a)
$x(1-x)\le\frac{1}{4}$, ebből $x^2-x\le\frac{1}{4}$, ahonnan $4x^2-4x\le 1$, azaz $(2x+1)^2\ge 0$.

b) Tegyük fel, hogy léteznek az állításban szereplő olyan $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2009}$ pozitív valós számok, amelyekre egyidőben teljesülnek a fenti egyenlőtlenségek. Ekkor összeszorozva az egyenlőtlenségeket azt kapjuk, hogy

$$x_1(1-x_1)\cdot x_2(1-x_2)\cdot\ldots\cdot x_{2009}(1-x_{2009})>\frac{1}{4^{2009}}$$

Mivel $x(1-x)\le\frac{1}{4}$ minden x pozitív valós szám esetén, így

$$x_1(1-x_1)\cdot x_2(1-x_2)\cdot\ldots\cdot x_{2009}(1-x_{2009})\le\frac{1}{4^{2009}}$$

adódik, ami ellentmondást eredményez, tehát a b) állítás igaz.

11. évfolyam

1. A gödényházi sörivó versenyen hárman kerültek a döntőbe: a tűzoltóparancsnok, a kántor és a harangozó. A kijelölt idő alatt a tűzoltóparancsnok és a kántor együtt kétszer annyi sört ivott meg, mint a harangozó. A tűzoltóparancsnok és a harangozó együttes teljesítménye viszont háromszor annyi, mint a kántoré. Ki nyerte a versenyt?

I.Megoldás. Jelöljük a tűzoltóparancsnok, a kántor és a harangozó által elfogyasztott sörmennyiséget rendre t-vel, k-val és h-val. Ekkor

$$t+k=2h \text{ és } t+h=3k.$$

A két egyenletet kivonva adódik, hogy $k-h=2h-3k$, azaz $4k-3h$, ahonnan belátható, hogy $h>k$.
Megállapíthatjuk tehát, hogy a kántor nem nyerhetett, ezért most már elegendő a tűzoltóparancsnok és a harangozó teljesítményét összehasonlítani. Ehhez a fenti egyenletrendszert úgy alakítjuk, hogy k essen ki belőle (3-mal szorozzuk az elsőt és hozzáadjuk a másodikhoz), azaz $4t+3k+h=6h+3k$, ahonnan $4t=5h$, vagyis $t>h$.
Tehát a tűzoltóparancsnok nyert.

II.Megoldás. A tűzoltóparancsnok olyan vödröt készíttetett, amelynek térfogata pontosan az ő általa elfogyasztott sör mennyiségével egyezett meg. Így az ő teljesítménye 1 *vödör* volt. Jelöljük továbbra is a kántor és a harangozó által elfogyasztott sörmennyiséget rendre k-val és h-val. Ekkor a verseny jegyzőkönyve alapján tapasztaltakat már felírhatjuk kétismeretlenes egyenletrendszerrel:

$$1+k=2h \text{ és } 1+h=3k.$$

Az első egyenletből $k=2h-1$, ezt a második egyenletbe helyettesítve $1+h=3(2h-1)$ adódik. Ebből

$$h=\frac{4}{5} \textbf{ és } k=2h-1=2\cdot\frac{4}{5}-1=\frac{3}{5}.$$

Mivel k és h kisebb 1-nél, ezért a tűzoltóparancsnok nyert.

III.Megoldás.
A tűzoltóparancsnok és a kántor együtt kétszer annyi sört ivott meg, mint a harangozó.
Eszerint a harangozó teljesítménye átlagos.
Vagy van nála jobb és gyengébb, vagy mindhárom egyforma.

A tűzoltóparancsnok és a harangozó együttes teljesítménye háromszor annyi, mint a kántoré.
Eszerint viszont, ha a kántor helyére a harangozó kerül a kétfős csapatba, akkor a kétfős csapat teljesítménye javul a kimaradt egy főhöz képest, tehát a harangozó teljesítménye nagyobb a kántorénál.

A fentiekből belátható, hogy a sorrend: tűzoltóparancsnok, kántor,harangozó.

2. Felírtuk egy táblára 1-től 2009-ig a számokat, majd valamelyik két szomszédost letöröltük, és helyettük felírtuk a különbségüket (a nagyobból kivonva a kisebbet). Ezt az eljárást addig ismételgettük, míg végül csak egy szám maradt a táblán.
a) Mutassuk meg, hogy utolsó számként nem jöhet ki az 1000.
b) Adjunk egy eljárást, amely utolsó számként az 1001-et eredményezi!

Megoldás: a) Ha a számsorozatból kihúzok két számot és helyükbe írom a különbségüket (a nagyobból kivonva a kisebbet), akkor a és b szám esetén ($a < b$) a számsorozat tagjainak az összege

$$-a-b+(b-a)=-2a$$

szerint változik, vagyis a kisebb szám kétszeresével csökken. Ezek szerint az összeg paritása nem változik. A természetes számokat összegezve 2009-ig páratlan számot kapunk, mert négy szomszédos szám (két páratlan és két páros szám) összege mindig páros. 2008-ig a számok felbonthatók ilyen szomszédos számok alkotta számnégyesekre, tehát összegük is páros. Ehhez hozzáadva a 2009-et páratlan számot kapunk.
A fentiek alapján 1000-et nem kaphatunk végeredményként, mivel páros szám, a kiindulásul vett számsorozat tagjainak összege pedig páratlan.
b) Az előző rész fejtegetése alapján nem lehetetlen, hogy találjunk egy ilyen eljárást.
Figyeljük ismét a szomszédos számokból képzett számnégyeseket. A zárójelbe tett számokat cseréljük ki a különbségükre:

$$a, a+1, a+2, a+3$$
$$(a, a+1),\ (a+2, a+3)$$
$$1, \qquad 1$$
$$(1, \qquad 1)$$
$$0$$

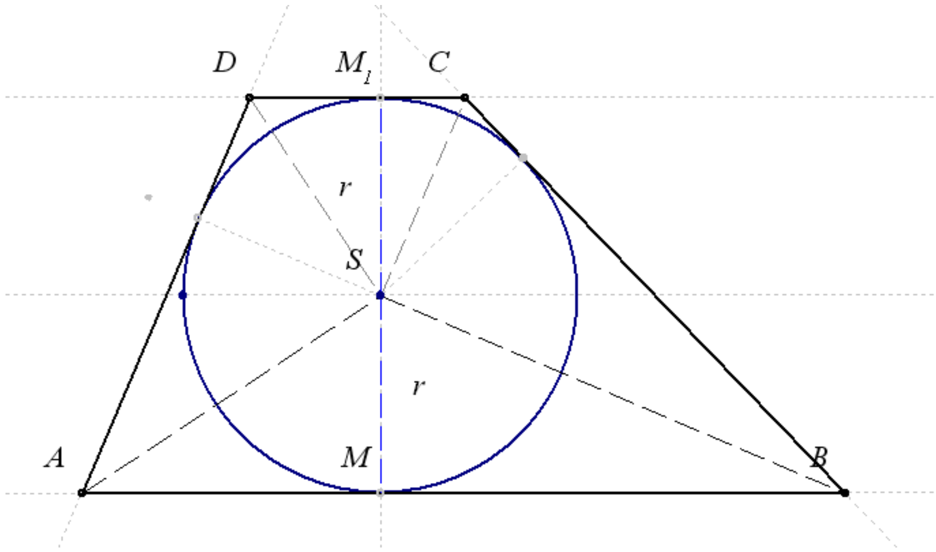
vagyis szomszédos számokból álló számnégyesek nullára cserélhetők. Könnyen belátható, hogy tetszőleges számú 0 sorozatos cserékkel egyetlen 0-ra cserélhető. Ezek alapján:

$$1,2,3,4,\ \ 5,6,7,8,\ \ \ldots,\ \ 997,998,999,1000,\ \ 1001,$$
$$1002,1003,1004,1005,\ \ \ldots,\ \ 2006,2007,2008,2009$$
$$(1,2,3,4),\ \ldots,\ (997,998,999,1000),\ 1001,\ (1002,1003,1004,1005),\ \ldots,\ (2006,2007,2008,2009)$$
$$0,\ \ldots,\ \ 0,\ \ 1001,\ \ 0,\ \ldots,\ \ 0$$
$$0,\ 1001,\ 0$$
$$1001,\ 0$$
$$(1001,\ 0)$$
$$1001$$

Más megfelelő eljárás is létezik.

3. Legyen az $ABCD$ trapéz érintőnégyszög, amelynek az alapon fekvő szögei α és β. Igazold, hogy $\dfrac{|AB|}{|CD|}=\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}$.

Megoldás. Legyen S az $ABCD$ trapéz beírt körének középpontja, és jelölje a beírt kör érintési pontjait az AB és CD oldalakkal rendre M és M_1. Ekkor



$AM = MS \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$ és $BM = MS \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}$, $MS = r$ a beírt kör sugara, ezért

$$AB = AM + MB = MS \cdot (\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}) = r \cdot \left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right).$$

Mivel $SDM_1\angle = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}$ és $SCM_1\angle = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\beta}{2}$, ezért

$$DM_1 = M_1S \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \text{ és } CM_1 = M_1S \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2},$$

ebből következik, hogy

$$CD = CM_1 + DM_1 = M_1S \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) = r \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right),$$

vagyis

$$\frac{AB}{CD} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}.$$

4. Bizonyítsd be, hogy az

$$x^2 - \frac{n^2+1}{n}x - \frac{n^2+1}{2n} = 0$$

egyenlet gyökei valósak és irracionális számok minden n természetes számra!

Megoldás. A egyenlet gyökei valósak, ha a determináns $D \geq 0$ és ha a D nem teljes négyzetszám, akkor azok irracionálisak. Igazoljuk, hogy nincs olyan k egész szám, amelyre teljesül: $D = \left(\dfrac{n^2+1}{n}\right)^2 + 4\left(\dfrac{n^2+1}{2n}\right) = k^2$, azaz $\dfrac{n^4+2n^3+2n^2+2n+1}{n^2} = k^2$.

Elégséges tehát igazolni, hogy $a = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ nem négyzetszám.

Mivel $(n^2+n)^2 = n^4 + 2n^3 + n^2 < a$ és $(n^2+n+1)^2 = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1 > a$, a vizsgált összeg két négyzetszám között van, így az nem négyzetszám.

12. évfolyam

1. Egy bank páncélszekrényén több különböző zár van. Kulcsaikat úgy osztották szét a bank négy pénztárosa között, hogy a páncélszekrény kinyitásához legalább hármuknak jelen kell lenni, de mind a négynek nem, hogy a náluk levő kulcsokkal ki lehessen nyitni az összes zárat. (Egy zárhoz többüknél is lehet kulcs, és egy embernél többféle kulcs is lehet.) Legkevesebb hány zár van a páncélszekrényen?

Megoldás. Megmutatjuk, hogy legalább 6 zár van a páncélszekrényen. Mivel két pénztáros jelenléte kevés a nyitáshoz, ezért bármelyik két pénztáros együttes kulcskészletéből legalább egy zár kulcsa hiányzik. Bármelyik pénztáros párosnak más-más kulcsa hiányzik a szekrény kinyitásához, mivel ha volna két páros, akikkel ugyanannak a kulcsnak a hiánya miatt nem lehet a páncélszekrényt kinyitni, akkor a párosokból való három pénztáros nem tudná kinyitni, holott a feltétel szerint ennyi pénztáros erre mindig képes. A négy pénztárosból hatféleképpen választható ki kettő, tehát a fentiek miatt legalább ennyi zár van.
Ha a pénztárosokat A, B, C és D jelöli, a zárakat, illetve a hozzájuk tartozó kulcsokat az 1, 2, 3, 4, 5 és 6, akkor az alábbi táblázat mutatja, hogy 6 zárra teljesülhet valamennyi feltétel (a + jelenti a pénztárosnál levő kulcsot):

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
A	+	+	+			
B	+			+	+	
C		+		+		+
D			+		+	+

2. Határozd meg a $\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{1+\sqrt{2}\sin x}=\dfrac{\sin^4 x-\cos^4 x}{1+\sqrt{2}\sin x}$ **egyenlet valós megoldásait!**

Megoldás. Szorozzuk meg az egyenletet $1+\sqrt{2}\sin x$-el, ekkor $1+\sqrt{2}\sin x\neq 0$, ahonnan $\sin x\neq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, vagyis $x\neq \dfrac{5\pi}{4}+2k\pi$ és $x\neq \dfrac{7\pi}{4}+2k\pi$. Ekkor az egyenlet így alakul:

$$\sin^3 x+\cos^3 x=\sin^4 x-\cos^4 x$$
$$(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)=(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)$$
$$(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)\cdot 1$$
$$(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)-(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)=0$$
$$(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x-\sin x+\cos x)=0$$
$$(\sin x+\cos x)=0 \quad\vee\quad (1-\sin x\cos x-\sin x+\cos x)=0$$
$$(1-\sin x)(1+\cos x)=0$$
$$1-\sin x=0 \ \vee\ 1+\cos x=0$$

$$x_1 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \qquad \sin x = 1 \qquad \cos x = -1$$

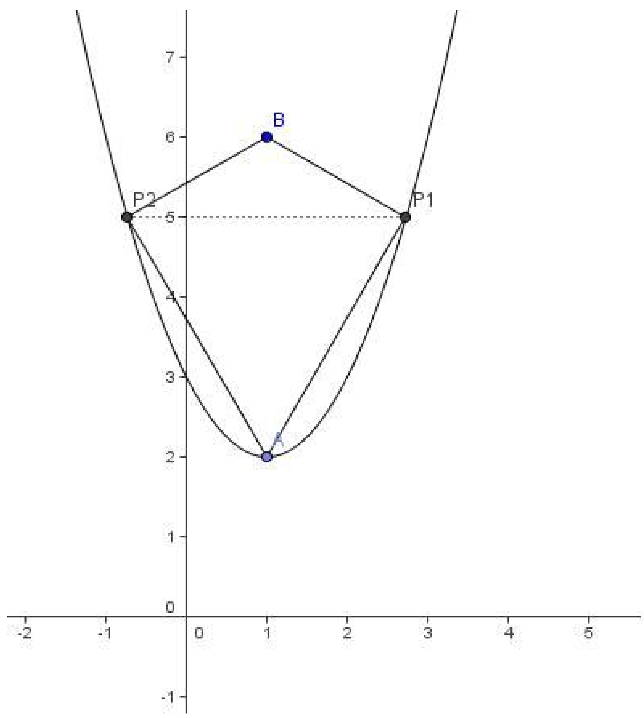
$$x_2 = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \qquad x_3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad x_4 = \pi + 2k\pi$$

Mivel $x_2 = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ értéket kizártuk, így az adott trigonometrikus egyenlet megoldása az $M = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ \pi + 2k\pi \right\}$ halmaz.

3. Az $y = (x-1)^2 + 2$ parabola P_1 és P_2 pontjából az $A(1,2)$ és $B(1,6)$ pontok által meghatározott szakasz derékszögben látszik. Mekkora az AP_1BP_2 négyszög területe?

Megoldás. Mivel a P_1 és P_2 pontokból az AB szakasz derékszögben látszik, ezért P_1 és P_2 illeszkedik az AB szakasz Thálesz-körére, amelynek középpontja a $C(1,4)$ pont, sugara 2, az egyenlete tehát $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$. Mivel P_1 és P_2 illeszkedik a parabolára is, így $y = (x-1)^2 + 2$-től a kör egyenletébe helyettesítve $(x-1)^2 + \left[(x-1)^2 + 2 - 4\right]^2 = 4$. Ennek az egyenletnek a megoldásai $x_1 = 1,\ x_2 = 1-\sqrt{3},\ x_3 = 1+\sqrt{3}$. $x_1 = 1$ az A, B pontokat adják, a másik kettőből $y = 5$.

Így az AP_1BP_2 négyszög deltoid, területe $t = \frac{AB \cdot P_1P_2}{2} = 4\sqrt{3}$.



4. Határozd meg azt a pozitív x számot, melyre az

$$f(x)=\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6-\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)-2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}$$

függvény a lehető legkisebb értékét veszi fel! Határozd is meg ezt a legkisebb értéket!

Megoldás. Vezessük be az $x+\frac{1}{x}=t$ helyettesítést. Ekkor

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\right)=t\left(t^2-3\right)$$

$$x^6+\frac{1}{x^6}+2=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2=t^2\cdot\left(t^2-3\right)^2$$

ezért

$$f(x)=\frac{t^6-t^2\left(t^2-3\right)^2}{t^3+t\left(t^2-3\right)}=\frac{6t^4-9t^2}{2t^3-3t}=3t$$

mivel $t\geq 2$, ezért $f(x)\geq 6$, tehát f legkisebb értéke 6, ha $x=1$.

A VII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

8. évfolyam
1. Bíró Dominik, Kizúr István Általános Iskola, Szabadka, **I. díj**
2. Horti Krisztina, Stevan Sremac Általános Iskola – Emlékiskola, Zenta, **I. díj**
3. Pósa Vivien, Kis Ferenc Általános Iskola, Orom, **III. díj**
4. Pataki Zsóka, Stevan Sremac Általános Iskola – November 11, Zenta, **dicséret**
5. Vörös Friderika, Stevan Sremac Általános Iskola – November 11, Zenta, **dicséret**

9. évfolyam
1. Nagy Henrietta, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
2. Gyorgyevics Elvira, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
3. Kiskároly Tímea, Dositej Obradović Gimnázium, Topolya, **III. díj**
4. Pletikoszity Johanna, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **dicséret**
5. Somogyi Hunor, Műszaki Iskola, Szabadka, **dicséret**

10. évfolyam
1. Piri Annamária, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **I. díj**
2. Ripcó Ákos, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Körmöczi Andor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Pusin Igor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
5. Gyarmati Dénes, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
6. Kőrösi Balázs, Műszaki Középiskola, Ada, **III. díj**

11. évfolyam
1. Kovacsics Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Bálind Árpád, Műszaki Középiskola, Ada, **I. díj**
3. Farkas Laura, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **II. díj**
4. Vrbaski Iván, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

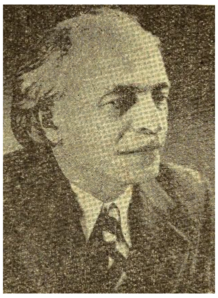
12. évfolyam
1. Kecsenovics Egon, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **I. díj**
2. Balassa Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
3. Tóth Szabolcs, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
4. Ágó Krisztina, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
5, Kovacsics Tóbiás, Műszaki Középiskola, Óbecse, **III. díj**
6. Berec Alexandra, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
7. Guzsvány Szandra, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**

Díjazottak

A VIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Előadó: dr. Klukovits Lajos
Előadás címe: Egy művészetből született tudomány, a projektív geometria

Készülődés a versenyre.



VIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2010. december 4.

8. évfolyam

1. A nyáron egy kis faluban volt az osztály kirándulni. Az egyetlen bolt árukészlete minden reggel ugyanaz volt. Mi voltunk az első vásárlók és a kiflik felét, a zsemlék negyedét, a tej egy ötödét elvittük, és ezért 1800 dinárt fizettünk. Másnap az előző napival azonos árukészletből a kifliknek és a zsemléknek is a harmadát, a tejnek negyedét vittük el és most 1500 dinárt fizettünk. Harmadnap megint másként rendeltek az osztálytársak, és most a kiflik hatodát, a zsemlék öt tizenketted részét, a tejnek három tized részét vittük el. Mennyit fizettünk a harmadik napon?

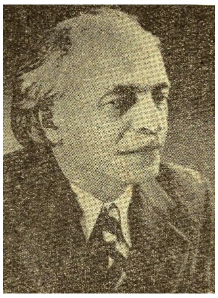
2. Egy dobozban 23 piros, 15 kék, 20 fehér és valahány zöld sapka van. Ezek csak a színükben különböznek. A dobozból csukott szemmel találomra vehetünk ki sapkákat. Adott az alábbi három igaz állítás:
(1) Ha kiveszünk 63 sapkát, biztosan van köztük fehér.
(2) Legalább 59 sapkát kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük zöld.
(3) Legfeljebb 53 sapkát vehetünk ki úgy, hogy ne legyen köztük piros.
El lehet-e dönteni a fenti állításokból, hogy pontosan hány zöld sapka van a dobozban? Indokold!

3. Add meg az $x^2y + x^2 = 180$ egyenlet pozitív egész megoldásait!

4. Az ABC háromszögben $\alpha = \beta + 90°$. Tükrözzük a háromszöget a C csúcsból induló magasságvonalra. Így kapjuk az $A'B'C'$ háromszöget. Bizonyítsd be, hogy a BCA' háromszög derékszögű!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



VIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2010. december 4.

9. évfolyam

1. Egy matematika teszt megírásában egy középiskola 100 tanulója vett részt, és az átlagpontszámuk 100 pont volt. Az alsóévesek száma 50%-kal több, mint a felsőéveseké, a felsőévesek átlaga pedig 50%-kal több, mint az alsóéveseké. Mennyi a felsőévesek átlagpontszáma?

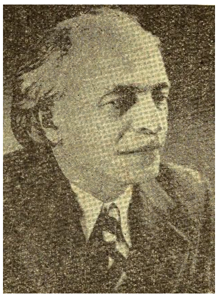
2. Melyik az a legnagyobb természetes szám, amely kisebb a számjegyei négyzetösszegénél?

3. Az ABC egyenlőszárú háromszögben ($|AC|=|BC|$) a B csúcsnál lévő belső szög szögfelezője a szemközti oldalt egy P pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy $|BP|<2|AP|$.

4. Egy dobozban 23 piros, 15 kék, 20 fehér és valahány zöld sapka van. Ezek csak a színükben különböznek. A dobozból csukott szemmel találomra vehetünk ki sapkákat. A következő négy állításból pontosan három igaz.
(1) Ha kiveszünk 63 sapkát, biztosan van köztük fehér.
(2) Legalább 59 sapkát kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük zöld.
(3) Ha kiveszünk 46 sapkát, lehet, hogy nincs köztük sem piros, sem kék.
(4) Legfeljebb 53 sapkát vehetünk ki úgy, hogy ne legyen köztük piros.
Hány zöld sapka van a dobozban?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



VIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2010. december 4.

10. évfolyam

1. Ha a és b valós számok és $ab \in [-1,1]$, akkor igazold, hogy

$$(a+b+2)^2 \geq 4(a+b)(ab+1).$$

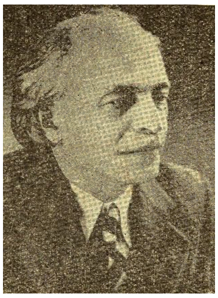
2. Egy szöcske ugrál a kör kerületén az óramutató járásával megegyező irányba. Az első ugrásnak egy $1°$-os középponti szög felel meg, a második ugrásnak egy $2°$-os középponti szög felel meg, és általában a k-adik ugrásának egy $k°$-os középponti szög felel meg. Hányadik ugrásával kerül először olyan pontra, ahol már járt?

3. Az ABC háromszög oldalain adottak az $M \in BC$, $N \in AC$ és $P \in AB$ pontok úgy, hogy AM, BN és CP egyenesek egy pontban Q-ban metszik egymást. Határozd meg a háromszög A és B szögeinek mértékét, ha $BAM\angle = 20°$, $ABN\angle = 30°$, $BCP\angle = 20°$ és $ACP\angle = 30°$.

4. Egy dobozban 23 piros, 15 kék, 20 fehér és valahány zöld sapka van. Ezek csak a színükben különböznek. A dobozból csukott szemmel találomra vehetünk ki sapkákat. A következő négy állításból pontosan három igaz.
(1) Ha kiveszünk 63 sapkát, biztosan van köztük fehér.
(2) Legalább 59 sapkát kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük zöld.
(3) Ha kiveszünk 46 sapkát, lehet, hogy nincs köztük sem piros, sem kék.
(4) Legfeljebb 53 sapkát vehetünk ki úgy, hogy ne legyen köztük piros.
Hány zöld sapka van a dobozban?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



VIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2010. december 4.

<u>11. évfolyam</u>

1. Egy szöcske ugrál a kör kerületén az óramutató járásával megegyező irányba. Az első ugrásnak egy $1°$-os középponti szög felel meg, a második ugrásnak egy $2°$-os középponti szög felel meg, és általában a k-adik ugrásának egy $k°$-os középponti szög felel meg. Hányadik ugrásával kerül először olyan pontra, ahol már járt?

2. Igazold, hogy nem léteznek olyan m és n pozitív egész számok, amelyekre m^2+4n és n^2+4m is négyzetszám!

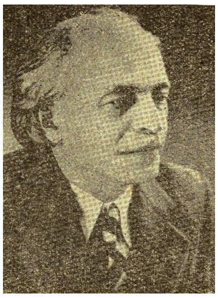
3. Bizonyítsd be, hogy:

$$\frac{1}{\cos x}+2\frac{\cos x}{\cos 2x}+4\frac{\cos 3x}{\cos 4x}+8\frac{\cos 7x}{\cos 8x}=16\frac{\sin 15x}{\sin 16x}.$$

4. Melyik a nagyobb, $\log_{2011} 2010$ vagy $\log_{2012} 2011$?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



VIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2010. december 4.

12. évfolyam

1. Oldd meg az adott egyenletrendszert:

$$x^6 + y^6 = 65,$$
$$x^4 - x^2y^2 + y^4 = 13.$$

2. Melyik a nagyobb, $\log_{2011} 2010$ **vagy** $\log_{2012} 2011$**?**

3. AB **átmérőjű félkörbe beírtunk egy** $ABCD$ **konvex négyszöget (**C **és** D **egy félkörön vannak). Legyen** P **a** CD **oldal egy tetszőleges pontja, valamint** Q **a** P **merőleges vetülete az** AB**-re. Igazold, hogy:**

$$|QA|\cdot|QB| - |PC|\cdot|PD| = |PQ|^2.$$

4. Az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ **pozitív számok számtani (aritmetikai) sorozatot alkotnak. Igazold, hogy:**

$$\frac{1}{a_1a_n} + \frac{1}{a_2a_{n-1}} + \cdots + \frac{1}{a_na_1} = \frac{2}{a_1 + a_n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right).$$

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

A VIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

8. évfolyam

1. A nyáron egy kis faluban volt az osztály kirándulni. Az egyetlen bolt árukészlete minden reggel ugyanaz volt. Mi voltunk az első vásárlók és a kiflik felét, a zsemlék negyedét, a tej egy ötödét elvittük, és ezért 1800 dinárt fizettünk. Másnap az előző napival azonos árukészletből a kifliknek és a zsemléknek is a harmadát, a tejnek negyedét vittük el és most 1500 dinárt fizettünk. Harmadnap megint másként rendeltek az osztálytársak, és most a kiflik hatodát, a zsemlék öt tizenketted részét, a tejnek három tized részét vittük el. Mennyit fizettünk a harmadik napon?
(A megoldásban jelöljük a kiflik, a zsemlék és a tej teljes napi árukészletének árát k, z és t betűkkel.)

Megoldás. Ha a kiflik, a zsemlék és a tej teljes napi árukészletének árát k, z és t betűkkel jelöljük, akkor

$$\frac{k}{2}+\frac{z}{3}+\frac{t}{4}=900 \text{ és } \frac{k}{3}+\frac{z}{4}+\frac{t}{5}=660.$$

Arra vagyunk kíváncsiak, hogy mennyi $\frac{k}{6}+\frac{z}{12}+\frac{t}{20}$ értéke.
Az első két feltételből nem tudjuk meghatározni k, z és t értékét.
Mégis milyen összefüggés lehet a három törtkifejezés között?
Némi próbálgatás után rájöhetünk, hogy ha az első egyenletből kivonjuk az második egyenletet, akkor megkapjuk a keresett értéket. Valóban,

$$\frac{k}{2}-\frac{k}{3}=\frac{k}{6},\ \frac{\mathrm{z}}{3}-\frac{z}{4}=\frac{z}{12},\ \frac{\mathrm{t}}{4}-\frac{t}{5}=\frac{t}{20}.$$

Eszerint a harmadik napon 900–660 = 240 dinárt fizettünk.

2. Egy dobozban 23 piros, 15 kék, 20 fehér és valahány zöld sapka van. Ezek csak a színükben különböznek. A dobozból csukott szemmel találomra vehetünk ki sapkákat. Adott az alábbi három igaz állítás:
(1) Ha kiveszünk 63 sapkát, biztosan van köztük fehér.
(2) Legalább 59 sapkát kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük zöld.
(3) Legfeljebb 53 sapkát vehetünk ki úgy, hogy ne legyen köztük piros.
El lehet-e dönteni a fenti állításokból, hogy pontosan hány zöld sapka van a dobozban? Indokold!

Megoldás. Vizsgáljuk meg sorban, melyik állításból milyen következtetést vonhatunk le a zöld sapkák számáról.
(1) Legfeljebb 62 nem fehér sapka van, így zöldből $62-23-15=24$-nél nem lehet több. (Az állításból nem következik, hogy pontosan 24 zöld van, hiszen lehet, hogy már 60 kihúzott sapka között is van zöld.)
(2) Összesen $23+15+20=58$ nem zöld sapkánk van, így ez az állítás mindig igaz.
(3) A nem piros sapkák száma 53, azaz $53-15-20=18$ zöld sapka van a dobozban.

3. Add meg az $x^2y + x^2 = 180$ egyenlet pozitív egész megoldásait!

I.Megoldás. Használjuk fel az $x^2y + x^2 = x^2(y+1)$ azonosságot. Mivel $y+1$ egész, ezért x^2 a 180 osztója. Ki kell keresni a 180 osztói közül a négyzetszámokat. A $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ prímtényezős felbontásából a megfelelő osztók az 1, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $2^2 \cdot 3^2 = 36$. A megoldást adó (x, y) párok tehát: $(1{,}179)$, $(2{,}44)$, $(3{,}19)$, $(6{,}4)$.

II.Megoldás: x^2 és x^2y is pozitív egész, így kisebb 180-nál. x^2 nem nagyobb x^2y-nál, így legfeljebb $\frac{180}{2} = 90$. Soroljuk fel a 90-nél nem nagyobb négyzetszámokat, és számoljuk ki mindegyik esetben $\frac{180 - x^2}{x^2}$ értékét. Ha egészet kapunk hányadosként, akkor megoldást találtunk. Ha a hányados nem egész, akkor az x érték nem ad megoldást.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
x^2	1	4	9	16	25	36	49	64
$y = \frac{180 - x^2}{x^2}$	179	44	19	$\frac{41}{4}$	$\frac{31}{5}$	4	$\frac{131}{49}$	$\frac{29}{2}$

A megoldások: $x = 1$, $y = 179$, $x = 2$, $y = 44$, $x = 3$, $y = 19$ és $x = 6$, $y = 4$.

4. Az ABC háromszögben $\alpha = \beta + 90°$. Tükrözzük a háromszöget a C csúcsból induló magasságvonalra. Így kapjuk az $A'B'C'$ háromszöget. Bizonyítsd be, hogy a BCA' háromszög derékszögű!

Megoldás. Az $\alpha > 90°$, vagyis tompaszög a feltétel szerint. Ezért a C csúcsból induló magasság T talppontja az AB szakaszon kívül van.

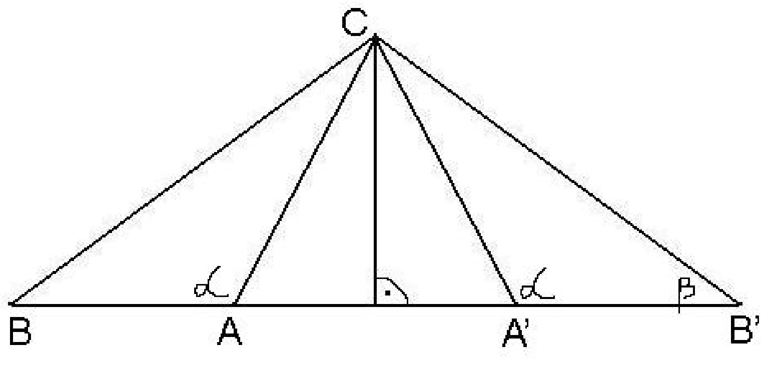
A CT egyenesre való tükrözés miatt $\alpha = CA'B'\angle$, ez az $A'BC\Delta$ külső szöge is, ezért

$$\alpha = BCA'\angle + \beta ,$$

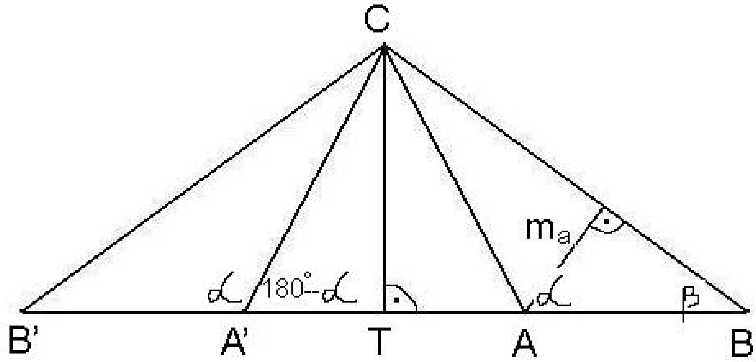
ami az $\alpha = 90° + \beta$ feltétellel egybevetve a

$$BCA'\angle = 90°$$

azonosságot adja.



II.Megoldás: Az állítás igazolására elég megmutatnunk, hogy $A'C \parallel m_a$.

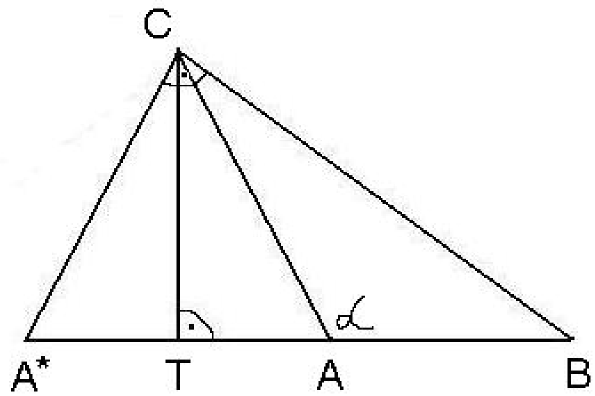


Az m_a az AB félegyenessel $90° - \beta$ szöget zár be, míg a CA' ugyanezzel a félegyenessel

$$180° - \alpha = 180° - (\beta + 90°) = 90° - \beta$$

szöget. A két egyenes $A'C$ és m_a valóban párhuzamosak, és ezt kellett igazolni.

III.Megoldás:



Emeljünk a C pontban a BC-re merőlegest. Ez a merőleges messe az AB egyenest az A^* pontban. A^* különbözik az A ponttól, mivel $BCA\angle < 90°$. Ha belátjuk, hogy

$$CA^*A\angle = CAA^*\angle,$$

akkor beláttuk, hogy az A-nak a CT-re vonatkozó tükörképe az A^*, és ezzel bebizonyítottuk a feladatbeli állítást. Az $A^*CB\Delta$ derékszögű, tehát

$$CAA^*\angle = 90° - \beta.$$

A feltételek miatt

$$CAA^*\angle = 180° - \alpha = 180° - (90° + \beta) = 90° - \beta,$$

és éppen ezeket kellett belátnunk.

<u>**9. évfolyam**</u>

1. Egy matematika teszt megírásában egy középiskola 100 tanulója vett részt, és az átlagpontszámuk 100 pont volt. Az alsóévesek száma 50%-kal több, mint a felsőéveseké, a felsőévesek átlaga pedig 50%-kal több, mint az alsóéveseké. Mennyi a felsőévesek átlagpontszáma?

Megoldás. Ha a felsőéves tanulók létszámát $2t$-vel jelöljük, akkor az alsóévesek száma $3t$. Mivel a kettő összege, az $5t$ éppen 100, ezért $t = 20$, amiből következik, hogy 60 alsóéves és 40 felsőéves vett részt a tesztelésen.
Az alsóévesek átlagpontszámát jelöljük $2a$-val. Ekkor a felsőévesek átlagpontszáma $3a$. Az egész iskola átlagpontszáma: $\frac{(60 \cdot 2a + 40 \cdot 3a)}{100} = \frac{240a}{100} = 2{,}4a$. Mivel ez a szám 100-zal egyenlő, így $a = \frac{100}{2{,}4} = \frac{125}{3}$. A felsőévesek pontszámának átlaga ennek a háromszorosa, azaz 125.

2. Melyik az a legnagyobb természetes szám, amely kisebb a számjegyei négyzetösszegénél?

Megoldás. A keresett számot jelölje $N = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$. Ekkor

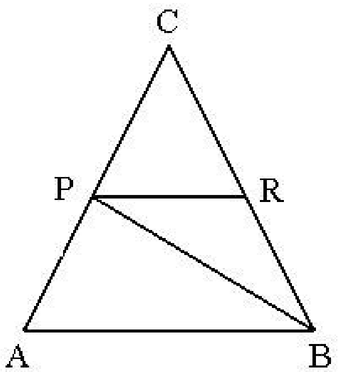
$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^n + ... + a_1 \cdot 10 + a_0 < a_n^2 + a_{n-1}^2 + ... + a_1^2 + a_0^2.$$

Átrendezés után kapjuk az

(*) $$a_n\left(10^n - a_n\right) + a_{n-1}\left(10^{n-1} - a_{n-1}\right) + ... + a_1\left(10 - a_1\right) + a_0\left(1 - a_0\right) < 0$$

egyenlőtlenséget, amelynek csak az utolsó tagja lehet negatív. Az utolsó tag minimális értéke $9 \cdot (1 - 9) = -72$. Ha $k \geq 2$ és $a_k \neq 0$, akkor $a_k\left(10^k - a_k\right) > 1 \cdot \left(10^k - 9\right) > 90$. Ebben az esetben a (*) egyenlőtlenség baloldala nem lehet negatív, így az $a_k = 0$, vagyis a szám legfeljebb kétjegyű. A kétjegyű számok közül a 99-re teljesül a feladat feltétele, így ez a keresett szám.

3. Az ABC egyenlőszárú háromszögben ($|AC| = |BC|$) a B csúcsnál lévő belső szög szögfelezője a szemközti oldalt egy P pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy $|BP| < 2|AP|$.



Megoldás. Az R pont illeszkedjen a BC oldalra úgy, hogy a PR szakasz párhuzamos legyen az alappal. Ekkor az $ABRP$ négyszög egyenlőszárú trapéz, mert van párhuzamos oldalpárja, és az alapon fekvő szögei egyenlők. Továbbá

$ABP\angle = BPR\angle$, mert váltószögek,

$ABP\angle = RBP\angle$, mert PB szögfelező, tehát

$$BPR\angle = RBP\angle.$$

$|PR| = |RB|$, mert a BPR háromszög azonos nagyságú szögeivel szemben fekszenek.

A háromszög-egyenlőtlenségből kiindulva a fenti megfigyeléseink alapján $|BP| < |PR| + |RB| = 2|RB| = 2|AP|$.

4. Egy dobozban 23 piros, 15 kék, 20 fehér és valahány zöld sapka van. Ezek csak a színükben különböznek. A dobozból csukott szemmel találomra vehetünk ki sapkákat. A következő négy állításból pontosan három igaz.
(1) Ha kiveszünk 63 sapkát, biztosan van köztük fehér.
(2) Legalább 59 sapkát kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük zöld.
(3) Ha kiveszünk 46 sapkát, lehet, hogy nincs köztük sem piros, sem kék.
(4) Legfeljebb 53 sapkát vehetünk ki úgy, hogy ne legyen köztük piros.
Hány zöld sapka van a dobozban?

Megoldás. Vizsgáljuk meg sorban, melyik állításból milyen következtetést vonhatunk le a zöld sapkák számáról.
(1) Legfeljebb 62 nem fehér sapka van, így zöldből $62-23-15=24$-nél nem lehet több. (Az állításból nem következik, hogy pontosan 24 zöld van, hiszen lehet, hogy már 60 kihúzott sapka között is van zöld.)
(2) Összesen $23+15+20=58$ nem zöld sapkánk van, így ez az állítás mindig igaz.
(3) A fehér és a zöld sapkák száma legalább 46, tehát zöldből legalább 26 van.
(4) A nem piros sapkák száma 53, azaz $53-15-20=18$ zöld sapka van a dobozban.
Az (1) és a (3) egymásnak ellentmondó állítások, tehát közülük az egyik hamis. Emiatt a (4) igaz kell legyen, ezt összevetve az előző feltételekkel azt kapjuk, hogy a (3) a hamis állítás, és 18 zöld sapka van a dobozban.

10. évfolyam

1. Ha a és b valós számok és $ab \in [-1,1]$, akkor igazold, hogy

$$(a+b+2)^2 \geq 4(a+b)(ab+1).$$

Megoldás. Az egyenlőtlenség ekvivalens az

$$(a+b)^2 + 4(a+b) + 4 \geq 4(a+b)ab + 4(a+b)$$

egyenlőtlenséggel. Mivel ebből

$$(a+b)^2 - 4(a+b)ab + 4 \geq 0,$$

majd hozzáadva és kivonva $4a^2b^2$-et adódik, hogy

$$(a+b)^2 - 4(a+b)ab + 4a^2b^2 + 4(1-a^2b^2) \geq 0.$$

Ebből adódik, hogy

$$(a+b-2ab)^2 + 4(1-a^2b^2) \geq 0,$$

mert mindkét tag nemnegatív.

2. Egy szöcske ugrál a kör kerületén az óramutató járásával megegyező irányba. Az első ugrásnak egy $1°$-os középponti szög felel meg, a második ugrásnak egy $2°$-os középponti szög felel meg, és általában a k-adik ugrásának egy $k°$-os középponti szög felel meg. Hányadik ugrásával kerül először olyan pontra, ahol már járt?

Megoldás. A k-adik ugrás után a szöcske helyzetét jellemző középponti szög mértéke

$$1+2+3+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2},$$

így ha $m > k$, a k-adik és m-edik lépés után pontosan akkor kerül a szöcske ugyanabba a pontba ha

$$\frac{m(m+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} = 360n$$

ahol $n \in N$. Innen

$$m^2 - k^2 + m - k = 720n,$$

illetve

$$(m-k)(m+k+1) = 720n = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot n\ .$$

Mivel az $m-k$ és $m+k+1$ paritása nem azonos, az előbbi egyenlet csak akkor teljesülhet, ha

$$16|(m-k) \quad \text{vagy} \quad 16|(m+k+1).$$

Mivel $m > k$, és a legkisebb megoldást keressük így feltételezzük hogy $n = 1$, ezért az alábbi egyenletrendszereket vizsgáljuk:

$$\frac{\begin{array}{l} m-k=15 \\ m+k+1=48 \end{array}}{} \quad \text{és} \quad \frac{\begin{array}{l} m-k=16 \\ m+k+1=45 \end{array}}{}.$$

Az első esetben $m = 30$ és $k = 14$, míg a másodikban $m = 31$ és $k = 16$. Látható, hogy $m = 30$ a kisebb megoldás, tehát a szöcske 30 ugrás után kerül először olyan pontba, ahol már korábban is járt.

3. Az ABC háromszög oldalain adottak az $M \in BC$, $N \in AC$ és $P \in AB$ pontok úgy, hogy AM, BN és CP egyenesek egy pontban Q-ban metszik egymást. Határozd meg a háromszög A és B szögeinek mértékét, ha $BAM\angle = 20°$, $ABN\angle = 30°$, $BCP\angle = 20°$ és $ACP\angle = 30°$.

Megoldás. $PBN\angle = PCN\angle$, ezért a $PBCN$ húrnégyszög, amiből következik, hogy $PNB\angle = PCB\angle = 20°$. Ennek alapján $PNQ\angle = PAQ\angle$, ezért a $PANQ$ húrnégyszög. $APQ\angle + ANQ\angle = 180°$, ugyanakkor $APQ\angle = ANQ\angle$, mert az ABN és APC háromszögek hasonlóak. Tehát a BN, CP és AM a háromszög magasságvonalai. Ebből adódik, hogy $MAC\angle = 90° - ACM\angle = 40°$, továbbá hogy $BAC\angle = 60°$ és az $ABC\angle = 180° - (50° + 60°) = 70°$.

4. Egy dobozban 23 piros, 15 kék, 20 fehér és valahány zöld sapka van. Ezek csak a színükben különböznek. A dobozból csukott szemmel találomra vehetünk ki sapkákat. A következő négy állításból pontosan három igaz.
(1) Ha kiveszünk 63 sapkát, biztosan van köztük fehér.
(2) Legalább 59 sapkát kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük zöld.
(3) Ha kiveszünk 46 sapkát, lehet, hogy nincs köztük sem piros, sem kék.
(4) Legfeljebb 53 sapkát vehetünk ki úgy, hogy ne legyen köztük piros.
Hány zöld sapka van a dobozban?

Megoldás. Vizsgáljuk meg sorban, melyik állításból milyen következtetést vonhatunk le a zöld sapkák számáról.
(1) Legfeljebb 62 nem fehér sapka van, így zöldből $62 - 23 - 15 = 24$-nél nem lehet több. (Az állításból nem következik, hogy pontosan 24 zöld van, hiszen lehet, hogy már 60 kihúzott sapka között is van zöld.)
(2) Összesen $23 + 15 + 20 = 58$ nem zöld sapkánk van, így ez az állítás mindig igaz.
(3) A fehér és a zöld sapkák száma legalább 46, tehát zöldből legalább 26 van.
(4) A nem piros sapkák száma 53, azaz $53 - 15 - 20 = 18$ zöld sapka van a dobozban.
Az (1) és a (3) egymásnak ellentmondó állítások, tehát közülük az egyik hamis. Emiatt a (4) igaz kell legyen, ezt összevetve az előző feltételekkel azt kapjuk, hogy a (3) a hamis állítás, és 18 zöld sapka van a dobozban.

11. évfolyam

1. Egy szöcske ugrál a kör kerületén az óramutató járásával megegyező irányba. Az első ugrásnak egy $1°$-os középponti szög felel meg, a második ugrásnak egy $2°$-os középponti szög felel meg, és általában a k-adik ugrásának egy $k°$-os középponti szög felel meg. Hányadik ugrásával kerül először olyan pontra, ahol már járt?

Megoldás. A k-adik ugrás után a szöcske helyzetét jellemző középponti szög mértéke

$$1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2},$$

így ha $m>k$, a k-adik és m-edik lépés után pontosan akkor kerül a szöcske ugyanabba a pontba ha

$$\frac{m(m+1)}{2}-\frac{k(k+1)}{2}=360n$$

ahol $n\in N$. Innen

$$m^2-k^2+m-k=720n,$$

illetve

$$(m-k)(m+k+1)=720n=2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot n\ .$$

Mivel az $m-k$ és $m+k+1$ paritása nem azonos, az előbbi egyenlet csak akkor teljesülhet, ha

$$16|(m-k) \quad \text{vagy} \quad 16|(m+k+1).$$

Mivel $m>k$, és a legkisebb megoldást keressük így feltételezzük hogy $n=1$, ezért az alábbi egyenletrendszereket vizsgáljuk:

$$\underline{\begin{aligned} m-k&=15\\ m+k+1&=48\end{aligned}} \qquad \text{és} \qquad \underline{\begin{aligned} m-k&=16\\ m+k+1&=45\end{aligned}}.$$

Az első esetben $m=30$ és $k=14$, míg a másodikban $m=31$ és $k=16$. Látható, hogy $m=30$ a kisebb megoldás, tehát a szöcske 30 ugrás után kerül először olyan pontba, ahol már korábban is járt.

2. Igazold, hogy nem léteznek olyan m és n pozitív egész számok, amelyekre m^2+4n és n^2+4m is négyzetszám!

Megoldás. Feltételezzük, hogy léteznek ilyen m és n számok, amelyekre m^2+4n és n^2+4m is négyzetszámok. A két kifejezésben n és m „szimmetrikusan” helyezkednek el, ezért az általánosságra való kihatás nélkül feltételezhetjük, hogy például $m\le n$. Ekkor

$$n^2<n^2+4m\le n^2+4n<n^2+4n+4=(n+2)^2.$$

Ha

$$n^2+4m<(n+2)^2$$

és n^2+4m négyzetszám, akkor csakis $n^2+4m=(n+1)^2$ teljesülhet. Ebből viszont $4m=2n+1$ ami ellentmondás, mivel $4m$ páros $2n+1$ pedig páratlan szám. Így a feltételezésünk helytelen, vagyis nem léteznek ilyen m és n számok.

3. Bizonyítsd be, hogy:

$$\frac{1}{\cos x}+2\frac{\cos x}{\cos 2x}+4\frac{\cos 3x}{\cos 4x}+8\frac{\cos 7x}{\cos 8x}=16\frac{\sin 15x}{\sin 16x}.$$

Megoldás. Mivel

$$\frac{1}{\cos x}=\frac{2\sin x}{2\sin x\cos x}=\frac{2\sin x}{\sin 2x},$$

így

$$\frac{2\sin x}{\sin 2x}+\frac{2\cos x}{\cos 2x}=\frac{2\cdot 2(\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x)}{2\sin 2x\cos 2x}=\frac{4\sin 3x}{\sin 4x},$$

$$\frac{4\sin 3x}{\sin 4x}+\frac{4\cos 3x}{\cos 4x}=\frac{2\cdot 4(\sin 3x+\cos 4x+\cos 3x\sin 4x)}{2\sin 4x\cos 4x}=\frac{8\sin 7x}{\sin 8x},$$

$$\frac{8\sin 7x}{\sin 8x}+\frac{8\cos 7x}{\cos 8x}=\frac{2\cdot 8(\sin 7x\cos 8x+\cos 7x\sin 8x)}{2\sin 8x\cos 8x}=\frac{16\sin 15x}{\sin 16x}.$$

4. Melyik a nagyobb, $\log_{2011} 2010$ vagy $\log_{2012} 2011$?

Megoldás. Az a kérdés, hogy milyen reláció a ρ, ha $\log_{2011} 2010\ \rho\ \log_{2012} 2011$?
Ha $\log_{2011} 2010\ \rho\ \log_{2012} 2011$ relációt kell meghatározni, akkor valójában a

$$\frac{\log 2010}{\log 2011}\ \rho\ \frac{\log 2011}{\log 2012}$$

reláció a kérdés. Mivel ezek a logaritmus értékek mind pozitívak, ezért az előbbi reláció ekvivalens a $\log 2010\cdot\log 2012\ \rho\ \log^2 2011$ relációval. A számtani és a mértani közepek közötti ismert $G\le A$ egyenlőtlenség alapján

$$\sqrt{\log 2010\cdot\log 2012}\le\frac{\log 2010+\log 2012}{2},$$

illetve ezek négyzeteire érvényes, hogy:

$$\log 2010\cdot\log 2012\le\left(\frac{\log 2010+\log 2012}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\cdot\log(2010\cdot 2012)\right)^2=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\log(2011-1)(20100+1)\right)^2=\left(\frac{1}{2}\cdot\log\left(2011^2-1\right)\right)^2=\left(\log\sqrt{2011^2-1}\right)^2<$$

$$<\left(\log\sqrt{2011^2}\right)^2=\log^2 2011.$$

A keresett ρ reláció tehát a „kisebb” reláció, vagyis $\log_{2011} 2010<\log_{2012} 2011$.

12. évfolyam

1. Oldd meg az adott egyenletrendszert:

$$x^6 + y^6 = 65,$$
$$x^4 - x^2y^2 + y^4 = 13.$$

Megoldás. Vezessük be az $x^2 = u,\quad y^2 = v$ helyettesítést. Ekkor a második egyenlet alakja $u^2 - uv + v^2 = 13$, az első pedig $u^3 + v^3 = 65$. A köbök összegének felbontása után:

$$(u+v)(u^2 - uv + v^2) = 65,$$

illetve

$$13(u+v) = 65 \quad \Rightarrow \quad u+v = 5 \quad \Rightarrow \quad v = 5-u.$$

Ekkor az első egyenletbe helyettesítve

$$u^2 - u(5-u) + (5-u)^2 = 13,$$

rendezés után pedig

$$3u^2 - 15u + 25 = 13,$$

ahonnan az

$$u^2 - 5u + 4 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek megoldásai

$$u_1 = 1 = x^2 \text{ és } u_2 = 4 = x^2 \quad \text{illetve} \quad v_1 = 4 = y^2 \text{ és } v_2 = 1 = y^2.$$

Ezekből kapjuk az eredeti egyenletünk megoldásait:

$$M = \{(1,2),(1,-2),(-1,2),(-1,-2),(2,1),(2,-1),(-2,1),(-2,-1)\}.$$

2. Melyik a nagyobb, $\log_{2011} 2010$ **vagy** $\log_{2012} 2011$**?**

Megoldás. Az a kérdés, hogy milyen reláció a ρ, ha $\log_{2011} 2010 \,\rho\, \log_{2012} 2011$?
Ha $\log_{2011} 2010 \;\rho\; \log_{2012} 2011$ relációt kell meghatározni, akkor valójában a

$$\frac{\log 2010}{\log 2011} \;\rho\; \frac{\log 2011}{\log 2012}$$

reláció a kérdés. Mivel ezek a logaritmus értékek mind pozitívak, ezért az előbbi reláció ekvivalens a $\log 2010 \cdot \log 2012 \;\rho\; \log^2 2011$ relációval. A számtani és a mértani közepek közötti ismert $G \le A$ egyenlőtlenség alapján

$$\sqrt{\log 2010 \cdot \log 2012} \le \frac{\log 2010 + \log 2012}{2},$$

illetve ezek négyzeteire érvényes, hogy:

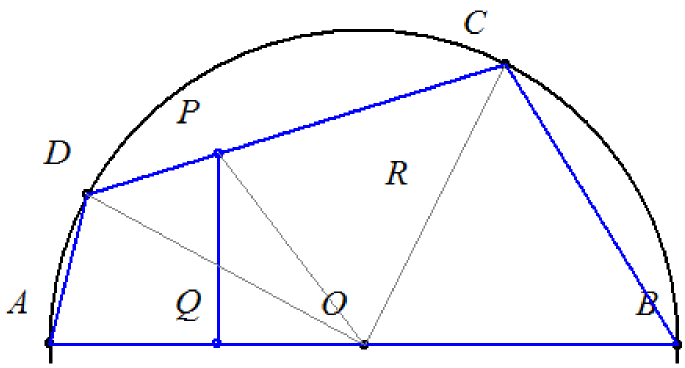
$$\log 2010 \cdot \log 2012 \le \left(\frac{\log 2010 + \log 2012}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \log(2010 \cdot 2012)\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{1}{2} \cdot \log(2011-1)(20100+1)\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \log(2011^2 - 1)\right)^2 = \left(\log \sqrt{2011^2 - 1}\right)^2 <$$
$$< \left(\log \sqrt{2011^2}\right)^2 = \log^2 2011.$$

A keresett ρ reláció tehát a „kisebb” reláció, vagyis $\log_{2011} 2010 < \log_{2012} 2011$.

3. AB **átmérőjű félkörbe beírtunk egy** $ABCD$ **konvex négyszöget (**C **és** D **egy félkörön vannak). Legyen** P **a** CD **oldal egy tetszőleges pontja, valamint** Q **a** P **merőleges vetülete az** AB**-re. Igazold, hogy:**

$$|QA|\cdot|QB|-|PC|\cdot|PD|=|PQ|^2.$$

I.Megoldás. Alkalmazzuk Stewart képletét az ODC háromszögre:



$$|DO|^2\cdot|PC|+|OC|^2\cdot|DP|=|OP|^2\cdot|DC|+|DP|\cdot|PC|\cdot|DC|.$$

Mivel

$$|OD|=|OC|=R,$$

ezért

$$R^2\cdot|PC|+R^2\cdot|DP|=|OP|^2\cdot|DC|+|DP|\cdot|PC|\cdot|DC|,$$

vagyis

$$R^2(|PC|+|DP|)=|OP|^2\cdot|DC|+|DP|\cdot|PC|\cdot|DC|.$$

Eloszthatjuk DC-vel:

$$R^2=|OP|^2+|DP|\cdot|PC|.$$

Tehát

$$R^2-|OP|^2=|DP|\cdot|PC|.$$

Másrészt a pont hatványa a körre

$$|AQ|\cdot|QB|=R^2-|OQ|^2=\left(R-|OQ|\right)\left(R+|OQ|\right).$$

Tehát

$$|QA|\cdot|QB|-|PC|\cdot|PD|=R^2-|OQ|^2-R^2+|OP|^2=|OP|^2-|OQ|^2=|PQ|^2.$$

II.Megoldás:

A P pont hatványa a körre

$$R^2-|OP|^2=|DP|\cdot|PC|,$$

a Q pont hatványa a körre

$$|AQ|\cdot|QB|=R^2-|OQ|^2=\left(R-|OQ|\right)\left(R+|OQ|\right).$$

Tehát

$$|QA|\cdot|QB|-|PC|\cdot|PD|=R^2-|OQ|^2-R^2+|OP|^2=|OP|^2-|OQ|^2=|PQ|^2..$$

4. Az $a_1, a_2, a_3, \dots$ pozitív számok számtani (aritmetikai) sorozatot alkotnak. Igazold, hogy:

$$\frac{1}{a_1 a_n} + \frac{1}{a_2 a_{n-1}} + \cdots + \frac{1}{a_n a_1} = \frac{2}{a_1 + a_n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Megoldás. Mivel

$$\frac{1}{a_1 a_n} = \frac{a_1 + a_n}{a_1 a_n (a_1 + a_n)} = \frac{1}{a_1 + a_n}\left(\frac{a_1 + a_n}{a_1 a_n}\right) = \frac{1}{a_1 + a_n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_n}\right),$$

így hasonlóan

$$\frac{1}{a_2 a_{n-1}} = \frac{a_2 + a_{n-1}}{a_2 a_{n-1}(a_2 + a_{n-1})} = \frac{1}{a_2 + a_{n-1}}\left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_{n-1}}\right),$$

$$\frac{1}{a_3 a_{n-2}} = \frac{a_3 + a_{n-2}}{a_3 a_{n-2}(a_3 + a_{n-2})} = \frac{1}{a_3 + a_{n-2}}\left(\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_{n-2}}\right),$$

.

.

.

$$\frac{1}{a_n a_1} = \frac{a_n + a_1}{a_1 a_n (a_1 + a_n)} = \frac{1}{a_1 + a_n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_n}\right).$$

Mivel

$$a_1 + a_n = 2a_1 + (n-1)d = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = ... = a_n + a_1,$$

így a fenti egyenletek összeadásával kapjuk a keresett azonosságot:

$$\frac{1}{a_1 a_n} + \frac{1}{a_2 a_{n-1}} + ... + \frac{1}{a_n a_1} = \frac{2}{a_1 + a_n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right).$$

A VIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

8. évfolyam

1. Szilágyi Krisztina, Jovanović Zmaj Általános Iskola, Újvidék, **I. díj**
2. Kovacsics Flórián, Petar Kočić Általános Iskola, Temerin, **I. díj**
3. Kanalas Dávid, Fejős Klára Általános Iskola, Kikinda, **I. díj**
4. Kovacsics Viola, Petar Kočić Általános Iskola, Temerin, **II. díj**
5. Vrábel Máté Dávid, Jovan Popović Általános Iskola, Csóka, **III. díj**
6. Rozsnyik Szabolcs, Jovan Jovanović Zmaj Ált. Iskola, Magyarkanizsa, **dicséret**
7. Szakály László, Stevan Sremac Általános Iskola – Emlékiskola, Zenta, **dicséret**
8. Törteli Anna, Stevan Sremac Általános Iskola – Emlékiskola, Zenta, **dicséret**
9. Olajos Annabella, Sonja Marinković Általános Iskola, Nagybecskerek, **dicséret**
10. Szabó Róbert, Szervo Mihály Általános Iskola, Muzslya, **dicséret**
11. Vajdovics Viktória, Jovan Jovanović Zmaj Ált. Iskola, Törökkanizsa, **dicséret**

9. évfolyam

1. Bíró Dominik, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Horti Krisztina, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Csipak Levente, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Tokity Rudolf, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
5. Mátéffy Kristóf, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
6. Nagy Dávid, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
7. Major Kristóf, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
8. Nagy Ábel Bence, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
9. Francia Krisztina, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**

10. évfolyam

1. Nagy Henrietta, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Pletikoszity Johanna, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **I. díj**
3. Bakos Evelin, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **II. díj**
4. Kiskároly Tímea, Dositej Obradović Gimnázium, Topolya, **III. díj**
5. Balzam Henrietta, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
6. Börcsök Beatrix, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **dicséret**
7. Horváth Enikő, Bosa Milićević Közgazdasági Középiskola, Szabadka, **dicséret**
8. Ribár Miklós, Zentai Gimnázium, Zenta, **dicséret**

11. évfolyam

1. Nagygyörgy Kristóf, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **I. díj**
2. Körmöczi Andor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
3. Simonyi Máté, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Pusin Igor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
5. Ripcó Ákos, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **dicséret**
6. Hajnal Andor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **dicséret**
7. Piri Annamária, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**

12. évfolyam

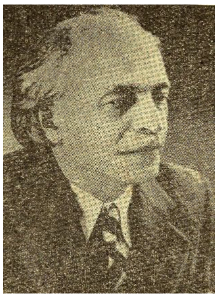
1. Kovacsics Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Bálind Árpád, Műszaki Középiskola, Ada, **II. díj**
3. Vrbaski Iván, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
4. Víg Anna, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **dicséret**
5. Berec Alexandra, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**

Díjkiosztó ünnepség.

A IX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Előadó: dr. Makay Géza
Előadás címe: Sudoku

Munkában a versenybizottság.



IX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

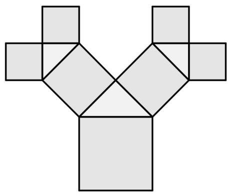
Zenta, 2011. december 10.

<u>7. évfolyam</u>

1. Hányféleképpen lehet kiolvasni Fekete Mihály nevét az ábrából, ha a bal felső sarokban lévő F betűtől indulunk, és csak jobbra vagy lefelé haladhatunk?

F	E	K	E				
E	K	E	T				
K	E	T	E	M	I	H	Á
				I	H	Á	L
				H	Á	L	Y

2. Az egyenlő szárú Pitagorasz-fának első évben kinő a törzse, ami egy négyzet. A második évben ennek a tetejére egy egyenlő szárú derékszögű háromszög nő úgy, hogy az átfogója a négyzet felső oldala, valamint a háromszög két befogójából kiágazik az első két ág, amelyek szintén négyzetek. Ezután minden évben, minden új négyzetág átellenes oldalára egy egyenlő szárú derékszögű háromszög nő, azokra pedig újabb négyzetágak. Ha a fa törzse az ábrán 8 méter széles, az ötödik év végén milyen magas, illetve milyen széles lesz az egész fa?

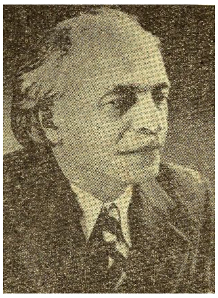


3. Hány olyan ötjegyű természetes szám létezik, amely osztható 12-vel és számjegyeinek összege 3?

4. Karcsinak 20 papagája van, melyek között van feketesapkás, jákó, nimfa és Sándor. 17 papagáj nem jákó, 5 Sándor és 12 nem feketesapkás. Hány nimfapapagája van Karcsinak?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



IX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2011. december 10.

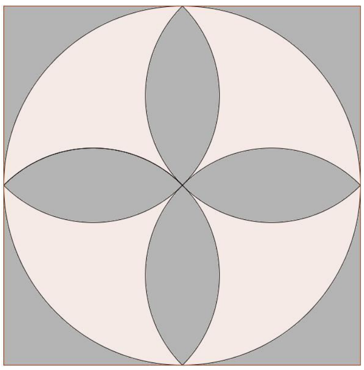
<u>8. évfolyam</u>

11. A bíróságon András, Béla és Csaba ugyanazokra a kérdésekre válaszoltak, s mindegyikre igennel, vagy nemmel. Azokra a kérdésekre, amelyekre Béla és Csaba igennel válaszolt, András is igent mondott. Azokra a kérdésekre, amelyekre András igent mondott, azokra Béla is igennel válaszolt, s amelyekre Béla igent mondott, azokra igent mondott András és Csaba közül legalább az egyik. Bizonyítsd be, hogy András és Béla minden kérdésre ugyanazt a választ adta!

2. Egy 13 gyöngyből álló gyöngysor középső szeme a legnagyobb és a legértékesebb. Az egyik vége felé a szemek értéke szemről-szemre 200 dinárral, a másik vége felé pedig ugyanígy 300 dinárral csökken. Mennyit ér a középső szem, ha az egész gyöngysor ára 17-szer annyi, mint a középső szemtől számított ötödik szem ára a kevésbé értékes oldalon?

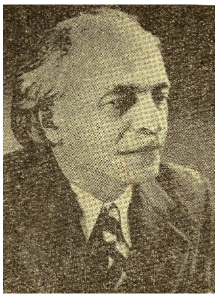
3. Van-e két olyan négyzetszám, amelyeknek a különbsége 2012? Melyek ezek? Hány ilyen pár van?

4. Az ábrán egy egységnyi oldalú négyzetet, egy ebbe írt kört, és négy, a négyzet szomszédos oldalainak felezőpontját összekötő szakasz fölé írt félkört szerkesztettük meg. Mutasd meg, hogy az árnyékolt részek területének összege egyenlő (a négyzeten belüli) üresen hagyott részek területösszegével!



A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



IX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2011. december 10.

9. évfolyam

1. Van-e két olyan négyzetszám, amelyeknek a különbsége 2012? Melyek ezek? Hány ilyen pár van?

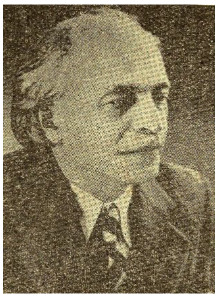
2. Jelöljük P-vel az $ABCD$ téglalap AB oldalának A-hoz közelebb eső harmadoló pontját. Tudjuk, hogy a PD szakasz az AC átlóval derékszöget zár be. Határozd meg a téglalap oldalainak arányát!

3. Egy röplabda bajnokságban öt csapat vesz részt. Mindegyik csapat megmérkőzik mindegyik csapattal. Az első csapat x_1-szer nyert és y_1-szer veszített, a második csapat x_2-ször nyert és y_2-ször veszített,..., az ötödik csapat x_5-ször nyert és y_5-ször veszített. (A röplabdában nincs döntetlen.) Bizonyítsd be, hogy $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_5^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_5^2$.

4. Egy tíztagú társaságban mindenkinek van legalább hét ismerőse. (Az ismeretségek kölcsönösek.) Igaz-e, hogy a társaságból bármely három személynek van közös ismerőse?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



IX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2011. december 10.

10. évfolyam

1. Egy röplabda bajnokságban öt csapat vesz részt. Mindegyik csapat megmérkőzik mindegyik csapattal. Az első csapat x_1-szer nyert és y_1-szer veszített, a második csapat x_2-ször nyert és y_2-ször veszített,..., az ötödik csapat x_5-ször nyert és y_5-ször veszített. (A röplabdában nincs döntetlen.) Bizonyítsd be, hogy $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_5^2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_5^2$.

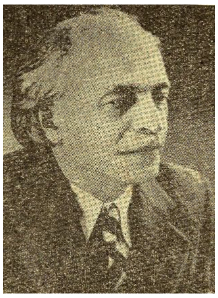
2. Mutasd meg, hogy a $2011^{2013} + 2013^{2011}$ összeg osztható 4-gyel!

3. Az $|AB| = 1$ átmérőjű félkörbe olyan $ABCD$ trapézt szerkesztettünk, amely érintőnégyszög is. Mekkora a trapéz két szára?

4. Számítsd ki mennyi $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011} + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011}$.

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



IX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2011. december 10.

<u>11. évfolyam</u>

1. Az $|AB|=1$ **átmérőjű félkörbe olyan** $ABCD$ **trapézt szerkesztettünk, amely érintőnégyszög is. Mekkora a trapéz két szára?**

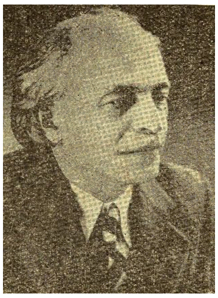
2. Oldd meg a $3^{\cos 2x}\cdot\left(4\cdot 3^{\sin^2 x}-9\right)=1$ **egyenletet!**

3. Számítsd ki mennyi $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011}+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011}$ **.**

4. Egy henger alakú edény alapátmérője $4\,dm$**, mélysége** $3\,dm$**, színültig telve van vízzel. Ha megbillentjük az edényt** $30°$**-kal a vízszintes helyzethez viszonyítva, mennyi víz marad benne?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



IX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2011. december 10.

12. évfolyam

1. Bizonyítsd be, hogy a derékszögű háromszög beírt körének átmérője mértani közepe az átfogó és az egyik befogó különbségének, valamint az átfogó és a másik befogó különbsége kétszeresének!

2. Oldd meg a $\operatorname{tg} x \cdot \left(4 \cdot 3^{\cos^2 x} - 9 \cdot 3^{\cos 2x} - 1\right) = 0$ **egyenletet!**

3. Létezik-e olyan $\{a_n\}$ **mértani sorozat, amelyben** $\frac{1}{3}\left(a_1 + a_3 + a_4\right) = \frac{1}{2}\left(a_2 + a_4\right)$? **Indokold meg választ!**

4. A szabályos négyoldalú gúla oldaléleinek hossza 1**, négyzet alakú alapjának éle pedig** x**. Határozd meg a gúla** $V(x)$ **térfogatát az** x **függvényében, majd számítsd ki a** $W(x) = 18 \cdot V(x)^2$ **függvény lehető legnagyobb értékét!**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

A IX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

7. évfolyam

1. Hányféleképpen lehet kiolvasni Fekete Mihály nevét az ábrából, ha a bal felső sarokban lévő F betűtől indulunk, és csak jobbra vagy lefelé haladhatunk?

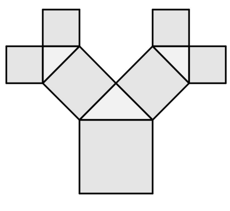
F	E	K	E				
E	K	E	T				
K	E	T	E	M	I	H	Á
				I	H	Á	L
				H	Á	L	Y

Megoldás: Az eredményhez úgy tudunk legegyszerűbben eljutni, ha megvizsgáljuk, hogy egy-egy mezőre hányféleképpen érkezhetünk. Ha tudjuk, hogy hány út vezet egyik és másik L betűig, akkor azok összege megadja, hányféle úton juthatunk az Y-ig. A bal felső saroktól kezdve beírjuk a betűk helyére, hogy hány út vezet oda, majd minden mezőbe beírjuk a fölötte és balról mellette elhelyezkedő számok összegét. Megoldható egy részből, de két részre is oszthatjuk az ábrát, ekkor a végeredmény a két részeredmény szorzata lesz.

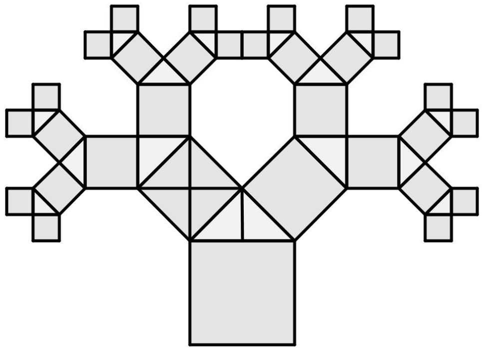
1	1	1	1					1	1	1	1				
1	2	3	4					1	2	3	4				
1	3	6	10	10	10	10	10	1	3	6	10	1	1	1	1
				10	20	30	40					1	2	3	4
				10	30	60	100					1	3	6	10

Fekete Mihály nevét 100-féleképpen olvashatjuk ki.

2. Az egyenlő szárú Pitagorasz-fának első évben kinő a törzse, ami egy négyzet. A második évben ennek a tetejére egy egyenlő szárú derékszögű háromszög nő úgy, hogy az átfogója a négyzet felső oldala, valamint a háromszög két befogójából kiágazik az első két ág, amelyek szintén négyzetek. Ezután minden évben, minden új négyzetág átellenes oldalára egy egyenlő szárú derékszögű háromszög nő, azokra pedig újabb négyzetágak. Ha a fa törzse az ábrán 8 méter széles, az ötödik év végén milyen magas, illetve milyen széles lesz az egész fa?



Megoldás:



A négyzeteket az átlók behúzásával a rájuk kerülő egyenlő szárú derékszögű háromszögekkel egybevágó háromszögekre bonthatjuk. Így a fa magassága: $8+4+4+4+2+2+2=26\ m$ magas lesz, valamint $2\cdot(4+4+4+4+2)=36\ m$ széles.

3. Hány olyan ötjegyű természetes szám létezik, amely osztható 12-vel és számjegyeinek összege 3?

Megoldás: Ha a számjegyek összege 3, akkor a szám osztható 3-mal. Oszthatónak kell lennie 4-gyel is, ehhez meg kell vizsgálnunk az utolsó két számjegyet. Ha az utolsó két számjegy 00, akkor az első három számjegy összege 3, ezek pedig: 30000, 21000, 20100, 12000, 10200, 11100. Ha az utolsó két számjegy 20, egy lehetőségünk van: 10020. Minden más esetben az utolsó két számjegy összege legalább 3, s így az első három helyre csak 000 lenne írható, de ez nem valódi ötjegyű szám. Összesen tehát 6+1=7 lehetőségünk van.

4. Karcsinak 20 papagája van, melyek között van feketesapkás, jákó, nimfa és Sándor. 17 papagáj nem jákó, 5 Sándor és 12 nem feketesapkás. Hány nimfapapagája van Karcsinak?

Megoldás: Jelölje f **a** feketesapkás, j jákó, n a nimfa, s pedig a Sándor papagájok számát. Felírhatjuk a következő egyenleteket:

$$f+j+n+s=20,$$
$$f+n+s=17,$$
$$s=5,$$
$$j+n+s=12.$$

Az s értékének behelyettesítésével megkapjuk, hogy:

$$f+j+n=15,$$
$$f+n=12,$$
$$j+n=7.$$

Az első két egyenlet összevonásából megállapíthatjuk, hogy $j=3$,
ami a harmadik egyenletbe helyettesítve megadja a megoldást: $n=4$.
Karcsinak tehát 4 nimfa papagája van.

8. évfolyam

1. A bíróságon András, Béla és Csaba ugyanazokra a kérdésekre válaszoltak, s mindegyikre igennel, vagy nemmel. Azokra a kérdésekre, amelyekre Béla és Csaba igennel válaszolt, András is igent mondott. Azokra a kérdésekre, amelyekre András igent mondott, azokra Béla is igennel válaszolt, s amelyekre Béla igent mondott, azokra igent mondott András és Csaba közül legalább az egyik. Bizonyítsd be, hogy András és Béla minden kérdésre ugyanazt a választ adta.

Megoldás: Tegyük fel, hogy volt olyan kérdés, amelyre András és Béla különböző választ adtak. Ekkor András **nem**-et kellett mondjon, különben András **igen**-jére a feltétel miatt Béla is **igen**t mondott volna. Így András és Csaba közül Csaba **igen**t kellett mondjon. Béla és Csaba **igen**-je miatt András is **igen**t mondott, ami ellentmond a feltevésünknek, ezért annak ellenkezője igaz, vagyis valóan András és Béla minden kérdésre ugyanazt a választ adta.

2. Egy 13 gyöngyből álló gyöngysor középső szeme a legnagyobb és a legértékesebb. Az egyik vége felé a szemek értéke szemről-szemre 200 dinárral, a másik vége felé pedig ugyanígy 300 dinárral csökken. Mennyit ér a középső szem, ha az egész gyöngysor ára 17-szer annyi, mint a középső szemtől számított ötödik szem ára a kevésbé értékes oldalon?

Megoldás: Legyen a legértékesebb gyöngy ára x dinár. Ekkor a gyöngysor értéke
$$x+(x-200)+(x-400)+(x-600)+(x-800)+(x-1000)+(x-1200)+$$
$$+(x-300)+(x-600)+(x-900)+(x-1200)+(x-1500)+(x-1800)=$$
$$=13x-10500.$$
A feltétel szerint a kevésbé értékes oldalon az ötödik szem ára $x-1500$ dinár, tehát
$$17(x-1500)=13x-10500,$$
amiből $x=3750$ dinár.

3. Van-e két olyan négyzetszám, amelyeknek a különbsége 2012? Melyek ezek? Hány ilyen pár van?

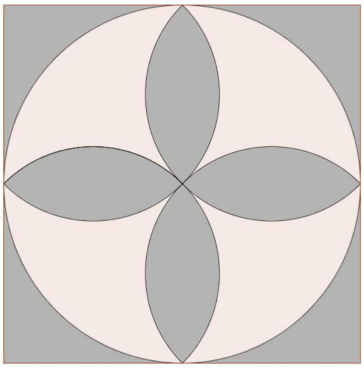
Megoldás: Ha a^2 és b^2 jelöli a keresett négyzetszámokat, akkor
$$a^2-b^2=2012\,.$$
Mivel $2012=2^2\cdot 503$ és 503 prímszám, ezért az $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ azonosságot felhasználva két olyan pozitív egészet keresünk, amelyek szorzata 2012, vagyis 2012 társosztóira van szükségünk. A 2012 pozitív osztói: 1, 2, 4, 503, 1006 és 2012, így az
$$(1,2012),\ (2,1006),\ (4,503)$$
Számpárok vezethetnek megoldáshoz.
Az $a+b>a-b$ összefüggés miatt az

$a+b$	$a-b$
2012	1
1006	2
503	4

lehetőségekből csak az

$$a+b=1006$$
$$a-b=2$$
vezet megoldáshoz, például úgy, hogy a két egyenletet összeadjuk és az így nyert
$$2a=1008$$
egyenletből $a=504$, ezt behelyettesítve a második egyenletbe pedig $b=502$ adódik. Behelyettesítve az eredeti egyenletbe
$$504^2-502^2=(504+502)(504-502)=1006\cdot 2=2012,$$
azaz pontosan két négyzetszám van, 504^2 és 502^2, amelyek különbsége 2012.

4. Az ábrán egy egységnyi oldalú négyzetet, egy ebbe írt kört, és négy, a négyzet szomszédos oldalainak felezőpontját összekötő szakasz fölé írt félkört szerkesztettük meg. Mutasd meg, hogy az árnyékolt részek területének összege egyenlő (a négyzeten belüli) üresen hagyott részek területösszegével.



Megoldás: Jelölje T_1 az egységnyi oldalú négyzet és a beírható köre közötti különbséget, azaz $T_1=1-\frac{\pi}{4}$. Legyen T_2 a beírható körön belüli szirmok területe, azaz $T_2=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. Az árnyékolt területek összege így $T_S=T_1+T_2=1-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Az üresen hagyott terület nagyságát megkapjuk, ha a beírható kör területéből kivonjuk a szirmok területét, azaz $T=\frac{\pi}{4}-T_2=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Ebből adódik, hogy $T_S=T$, azaz a két terület egyenlő, mert mindkettő egyenlő az egységnyi négyzet területének felével.

9. évfolyam

1. Van-e két olyan négyzetszám, amelyeknek a különbsége 2012? Melyek ezek? Hány ilyen pár van?

Megoldás: Ha a^2 és b^2 jelöli a keresett négyzetszámokat, akkor

$$a^2 - b^2 = 2012\,.$$

Mivel $2012 = 2^2 \cdot 503$ és 503 prímszám, ezért az $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ azonosságot felhasználva két olyan pozitív egészet keresünk, amelyek szorzata 2012, vagyis 2012 társosztóira van szükségünk. A 2012 pozitív osztói: 1, 2, 4, 503, 1006 és 2012, így az

$$(1,2012),\ (2,1006),\ (4,503)$$

Számpárok vezethetnek megoldáshoz.

Az $a+b > a-b$ összefüggés miatt az

$a+b$	$a-b$
2012	1
1006	2
503	4

lehetőségekből csak az

$$a+b = 1006$$

$$a-b = 2$$

vezet megoldáshoz, például úgy, hogy a két egyenletet összeadjuk és az így nyert

$$2a = 1008$$

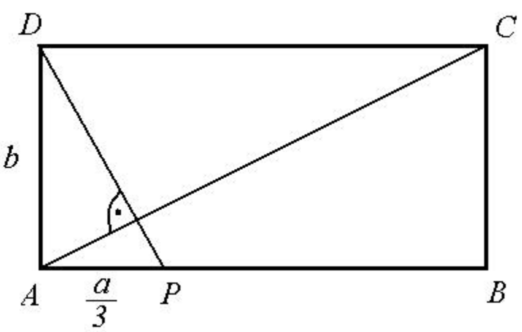
egyenletből $a = 504$, ezt behelyettesítve a második egyenletbe pedig $b = 502$ adódik. Behelyettesítve az eredeti egyenletbe

$$504^2 - 502^2 = (504+502)(504-502) = 1006 \cdot 2 = 2012\,,$$

azaz pontosan két négyzetszám van, 504^2 és 502^2, amelyek különbsége 2012.

2. Jelöljük P-vel az $ABCD$ téglalap AB oldalának A-hoz közelebb eső harmadoló pontját. Tudjuk, hogy a PD szakasz az AC átlóval derékszöget zár be. Határozd meg a téglalap oldalainak arányát!

Megoldás: Jelölje az *AB* és *AD* oldal hosszát rendre *a* és *b*.



A $PAD\angle = CBA\angle$ a téglalap definíciója miatt, és $ADP\angle = BAC\angle$, mivel merőleges szárú szögek. Így az APD és a BCA háromszögek hasonlók, mert két-két szögük egyenlő, így megfelelő oldalaik aránya is egyenlő: $|AP|:|AD| = |BC|:|BA|$, vagyis $\frac{a}{3} : b = b : a$, ahonnan $\frac{a^2}{b^2} = 3$, vagyis a téglalap oldalainak aránya $\sqrt{3}$.

3. Egy röplabda bajnokságban öt csapat vesz részt. Mindegyik csapat megmérkőzik mindegyik csapattal. Az első csapat x_1-szer nyert és y_1-szer veszített, a második csapat x_2-ször nyert és y_2-ször veszített,..., az ötödik csapat x_5-ször nyert és y_5-ször veszített. (A röplabdában nincs döntetlen.) Bizonyítsd be, hogy $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_5^2=y_1^2+y_2^2+\ldots+y_5^2$.

Megoldás: Mivel minden csapat másik négy csapattal játszik, ezért $x_1+y_1=x_2+y_2=\ldots=x_5+y_5=4$, továbbá az egész bajnokságban ugyanannyi a megnyert és az elveszített mérkőzések száma, vagyis

$$x_1+x_2+\ldots+x_5=y_1+y_2+\ldots+y_5.$$

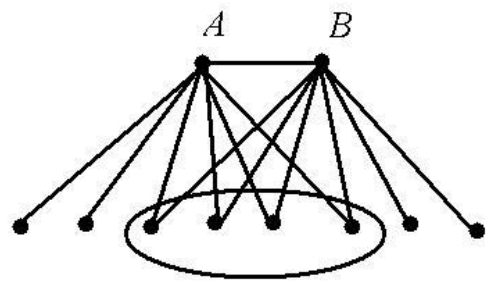
Alakítsuk át a bizonyítandó egyenlőséget:

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_5^2=y_1^2+y_2^2+\ldots+y_5^2 \Leftrightarrow$$
$$x_1^2-y_1^2+x_2^2-y_2^2+\ldots+x_5^2-y_5^2=0 \Leftrightarrow$$
$$(x_1+y_1)(x_1-y_1)+(x_2+y_2)(x_2-y_2)+\ldots+(x_5+y_5)(x_5-y_5)=0 \Leftrightarrow$$
$$4(x_1-y_1)+4(x_2-y_2)+\ldots+4(x_5-y_5)=0 \Leftrightarrow$$
$$4(x_1+x_2+\ldots+x_5-y_1-y_2-\ldots-y_5)=0.$$

Az utolsó egyenlőség nyilvánvalóan fennáll, mert a zárójelben lévő kifejezés a megoldás elején tárgyaltak miatt 0. Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

4. Egy tíztagú társaságban mindenkinek van legalább hét ismerőse. (Az ismeretségek kölcsönösek.) Igaz-e, hogy a társaságból bármely három személynek van közös ismerőse?

Megoldás: Először nézzük meg, mit állíthatunk tetszőleges két személyről. Ha A és B személy ismerik egymást, akkor még van 6-6 ismerősük a maradék 8 fő között. Ekkor van 4 közös ismerősük, mert ha legfeljebb 3 lenne, akkor mindkettejüknek legalább 3-3 nem közös ismerőse lenne, és ez már 9 fő, pedig csak 8-an vannak. Tehát van legalább négy közös ismerősük, vagyis legfeljebb (másik) 4 olyan személy van, aki legfeljebb csak egyiküknek ismerőse.



Válasszunk most ki egy harmadik személyt, C-t. Ha C ismeri is A-t és B-t, a maradék 7 személy közül legalább ötöt kell, hogy ismerjen, de a maradék 7 személy között legfeljebb 4 olyan személy van, aki nem ismerőse A-nak is és B-nek is, így biztosan lesz C-nek olyan ismerőse, aki mindhármuknak ismerőse, vagyis az állítás igaz.

10. évfolyam

1. Egy röplabda bajnokságban öt csapat vesz részt. Mindegyik csapat megmérkőzik mindegyik csapattal. Az első csapat x_1-szer nyert és y_1-szer veszített, a második csapat x_2-ször nyert és y_2-ször veszített,..., az ötödik csapat x_5-ször nyert és y_5-ször veszített. (A röplabdában nincs döntetlen.) Bizonyítsd be, hogy $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_5^2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_5^2$.

Megoldás: Mivel minden csapat másik négy csapattal játszik, ezért $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = ... = x_5 + y_5 = 4$, továbbá az egész bajnokságban ugyanannyi a megnyert és az elveszített mérkőzések száma, vagyis

$$x_1 + x_2 + ... + x_5 = y_1 + y_2 + ... + y_5.$$

Alakítsuk át, a bizonyítandó egyenlőséget:

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_5^2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_5^2$$
$$x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 - y_2^2 + ... + x_5^2 - y_5^2 = 0$$
$$(x_1 + y_1)(x_1 - y_1) + (x_2 + y_2)(x_2 - y_2) + ... + (x_5 + y_5)(x_5 - y_5) = 0$$
$$4(x_1 - y_1) + 4(x_2 - y_2) + ... + 4(x_5 - y_5) = 0$$
$$4(x_1 + x_2 + ... + x_5 - y_1 - y_2 - ... - y_5) = 0.$$

Az utolsó egyenlőség nyilvánvalóan fennáll, mert a zárójelben lévő kifejezés a megoldás elején tárgyaltak miatt 0. Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

2. Mutasd meg, hogy a $2011^{2013} + 2013^{2011}$ összeg osztható 4-gyel.

I. Megoldás: Felírható, hogy $2011^{2013} + 2013^{2011} = (4\cdot 503 - 1)^{2013} + (4\cdot 503 + 1)^{2011}$.

A $(4\cdot 503 - 1)^{2013}$ első összeadandó hatványozott alakjában ($4\cdot 503$ miatt) minden tag osztható 4-gyel kivéve az utolsót, ezért $(4\cdot 503 - 1)^{2013}$ 4-gyel osztva $(-1)^{2013} = -1$ maradékot ad. Az $(4\cdot 503 + 1)^{2011}$ második összeadandó hatványozott alakjában ($4\cdot 503$ miatt) minden tag osztható 4-gyel kivéve az utolsót, ezért $(4\cdot 503 + 1)^{2011}$ 4-gyel osztva $(1)^{2011} = 1$ maradékot ad.

Ekkor a két tag $(4\cdot 503 - 1)^{2013} + (4\cdot 503 + 1)^{2011}$ összege 4-gyel osztva $-1 + 1 = 0$ maradékot ad, vagyis $2011^{2013} + 2013^{2011}$ valóban osztható 4-gyel.

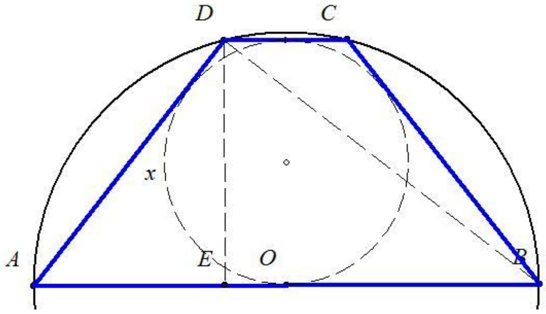
II. Megoldás: Végezzük el a következő átalakításokat:

$$2011^{2013} + 2013^{2011} = (2012-1)^{2013} + (2012+1)^{2011} =$$
$$= (2012-1)^2(2012-1)^{2011} + (2012+1)^{2011} = (2\cdot 1006 - 1)^2(2012-1)^{2011} + (2012+1)^{2011} =$$
$$= (4\cdot 1006^2 - 4\cdot 1006 + 1)(2012-1)^{2011} + (2012+1)^{2011} =$$
$$= (4\cdot 1006^2 - 4\cdot 1006)(2012-1)^{2011} + (2012-1)^{2011} + (2012+1)^{2011} =$$
$$= 4\cdot(1006^2 - 1006)(2012-1)^{2011} + (2012 - 1 + 2012 + 1)A =$$
$$= 4\cdot(1006^2 - 1006)(2012-1)^{2011} + 4\cdot 1006A$$

ahol $A = 2011^{2010} + 2011^{2009}\cdot 2013 + 2011^{2008}\cdot 2013^2 + \cdots + 2011\cdot 2013^{2009} + 2013^{2010}$.

3. Az $|AB|=1$ átmérőjű félkörbe olyan $ABCD$ trapézt szerkesztettünk, amely érintőnégyszög is. Mekkora a trapéz két szára?

Megoldás: Az $ABCD$ trapéz egyenlő szárú, mert húrnégyszög. AD szárának hossza legyen x, és legyen a D csúcs merőleges vetülete az AB szakaszra E pont. Ekkor az $AED\Delta$ és $ADB\Delta$ derékszögű háromszögek hasonlósága miatt $\frac{|AD|}{|AB|}=\frac{|AE|}{|AD|}$, vagyis $|AE|=x^2$, így $|CD|=|AB|-2\cdot|AE|=1-2x^2$.



Mivel $ABCD$ érintőnégyszög is, ezért $|AB|+|CD|=2\cdot|AD|$, azaz $1+\left(1-2x^2\right)=2x$, vagyis $x^2+x-1=0$, megoldásaiból csak a pozitív lehetséges, tehát $x=|AD|=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

4. Számítsd ki mennyi $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011}+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011}=?$

Megoldás: Mivel a kitevők felbontásával:

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011}+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011}=$$

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2010+1}+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2010+1}=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2010}\cdot\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2010}\cdot\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\left(\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3}\right)^{670}\cdot\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{3}\right)^{670}\cdot\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)= \qquad *$$

miközben

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3}=\frac{-1+3i\sqrt{3}-3i^2\cdot 3+3i^3\sqrt{3}}{8}=1 \qquad \text{és}$$

$$\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{3}=\frac{-1-3i\sqrt{3}-3i^2\cdot 3-3i^3\sqrt{3}}{8}=1,$$

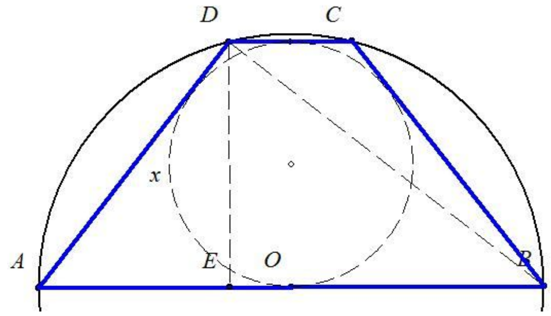
tehát folytatva $*$-tól:

$$=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)=-1.$$

11. évfolyam

1. Az $|AB|=1$ átmérőjű félkörbe olyan $ABCD$ trapézt szerkesztettünk, amely érintőnégyszög is. Mekkora a trapéz két szára?

Megoldás: Az $ABCD$ trapéz egyenlő szárú, mert húrnégyszög. AD szárának hossza legyen *x*, és legyen a D csúcs merőleges vetülete az AB szakaszra E pont. Ekkor az $AED\Delta$ és $ADB\Delta$ derékszögű háromszögek hasonlósága miatt $\frac{|AD|}{|AB|}=\frac{|AE|}{|AD|}$, vagyis $|AE|=x^2$, így $|CD|=|AB|-2\cdot|AE|=1-2x^2$.



Mivel $ABCD$ érintőnégyszög is, ezért $|AB|+|CD|=2\cdot|AD|$, azaz $1+\left(1-2x^2\right)=2x$, vagyis $x^2+x-1=0$, megoldásaiból csak a pozitív lehetséges, tehát $x=|AD|=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

2. Oldd meg a $3^{\cos 2x}\cdot\left(4\cdot 3^{\sin^2 x}-9\right)=1$ egyenletet!

Megoldás: Végezzük el a következő transzformációkat:

$$3^{\cos 2x}\cdot\left(4\cdot 3^{\sin^2 x}-9\right)=1 \qquad 3^{\cos^2 x-\sin^2 x}\cdot\left(4\cdot 3^{\sin^2 x}-9\right)=1$$

$$3^{1-2\sin^2 x}\cdot\left(4\cdot 3^{\sin^2 x}-9\right)=1 \qquad \frac{3}{3^{2\sin^2 x}}\cdot\left(4\cdot 3^{\sin^2 x}-9\right)=1$$

Alkalmazzuk a $3^{\sin^2 x}=t$ helyettesítést. Ekkor a $\frac{3}{t^2}(4t-9)=1$, illetve rendezés után a $t^2-12t+27=0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai $t_1=9$ és $t_2=3$. Visszahelyettesítés után kapjuk a $\sin^2 x=1$ és a $\sin^2 x=2$ egyenleteket, ahol csak az elsőnek van megoldása, $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, ahol $k\in Z$.

3. Számítsd ki mennyi $A=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011}+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011}$ **?**

Megoldás: Mivel a kitevők felbontásával:

$$A=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011}+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2011}=$$

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2010+1}+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2010+1}=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2010}\cdot\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2010}\cdot\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\left(\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3}\right)^{670}\cdot\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{3}\right)^{670}\cdot\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \qquad *$$

miközben

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3}=\frac{-1+3i\sqrt{3}-3i^2\cdot 3+3i^3\sqrt{3}}{8}=1 \qquad \text{és}$$

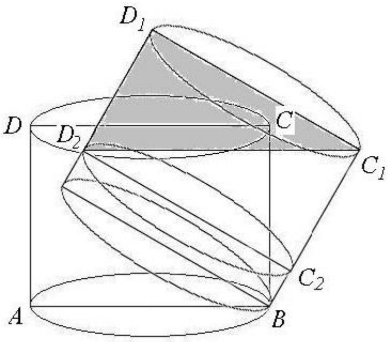
$$\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{3}=\frac{-1-3i\sqrt{3}-3i^2\cdot 3-3i^3\sqrt{3}}{8}=1,$$

tehát folytatva $*$-tól:

$$A=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)=-1.$$

4. Egy henger alakú edény alapátmérője 4dm, mélysége 3dm, színültig telve van vízzel. Ha megbillentjük az edényt 30°-kal a vízszintes helyzethez viszonyítva, mennyi víz marad benne?

Megoldás: A kiömlött víz mennyisége egyenlő a $C_1C_2D_1D_2$ henger térfogatának felével. Mivel az edény térfogata $V=2^2\pi\cdot 3=12\pi\ dm^3$, $\{r=2dm,\ H=3dm\}$, ebből kivonjuk a $\frac{1}{2}V_{C_1C_2D_2D_1}=\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi\ dm^3$, $\{r=2dm,\ H_{C_1C_2D_2D_1}\}$ térfogatot. Ekkor

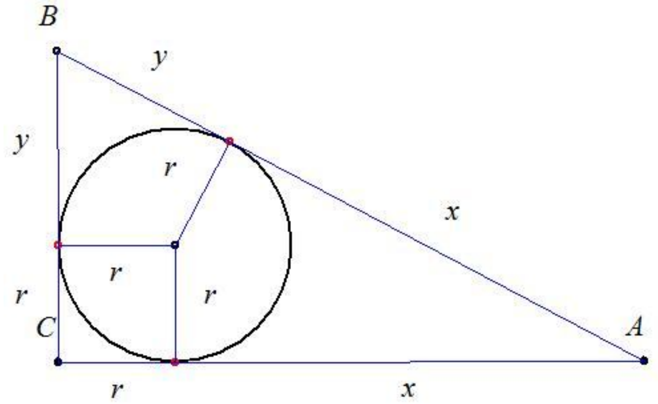


$$V-\frac{1}{2}V_{C_1C_2D_2D_1}=12\pi-\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi\approx\left(12-\frac{8}{1,73}\right)\cdot 3,14\approx 23,19l$$

12. évfolyam

1. Bizonyítsd be, hogy a derékszögű háromszög beírt körének átmérője mértani közepe az átfogó és az egyik befogó különbségének, valamint az átfogó és a másik befogó különbsége kétszeresének.

Megoldás: Jelöljük a derékszögű háromszög befogóit a-val és b-vel, átfogóját c-vel, beírt körének sugarát pedig r-rel.
Az átfogó és a befogók különbségei $c-a$ és $c-b$, az átmérő hossza $2r$.
Bizonyítandó, hogy $2r=\sqrt{2(c-a)(c-b)}$, vagy a négyzetre emelés és 2-vel való osztás után, hogy $(c-a)(c-b)=2r^2$.



A beírt kör érintőszakaszaiból következik, hogy:

$$\left.\begin{aligned}a&=r+y\\ b&=r+x\\ c&=x+y\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad a+b=x+y+2r=c+2r \quad \Rightarrow \quad c=a+b-2r$$

Továbbá a háromszög területképleteiből következik, hogy:

$$T_\Delta=\frac{ab}{2}=sr=\frac{a+b+c}{2}r \quad \Rightarrow \quad ab=(a+b+c)r$$

Az utóbbi az első összefüggésből következik, hogy:

$$ab=(a+b+c)r=(a+b+a+b-2r)r=2r(a+b-r).$$

Ekkor $(c-a)(c-b)=c^2-ac-bc+ab=(a^2+b^2)-c(a+b)+ab$.
Kihasználva c-re a levezetett képletet, következik, hogy:

$$(c-a)(c-b)=(a^2+b^2)-(a+b-2r)(a+b)+ab.$$

Rendezés után:

$$\begin{aligned}(c-a)(c-b)&=(a^2+b^2)-(a+b-2r)(a+b)+ab=\\ &=a^2+b^2-a^2-ab-ba-b^2+2ar+2br+ab=\\ &=2r(a+b)-ab,\end{aligned}$$

majd kihasználva ab-re a levezetett képletet, következik, hogy:

$$\begin{aligned}(c-a)(c-b)&=2r(a+b)-ab=2r(a+b)-2r(a+b-r)=\\ &=2r(a+b-a-b+r)=2r\cdot r,\end{aligned}$$

s így $(c-a)(c-b)=2r^2$, amit igazolnunk kellett.

2. Oldd meg a $\operatorname{tg} x \cdot \left(4\cdot 3^{\cos^2 x} - 9\cdot 3^{\cos 2x} - 1\right) = 0$ **egyenletet!**

Megoldás: Az egyenlet értelmezett ha $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.
Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. Ezért:

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad \vee \quad 4\cdot 3^{\cos^2 x} - 9\cdot 3^{\cos^2 x - \sin^2 x} = 1$$

$$x = k\pi, k \in Z \quad \vee \quad 4\cdot 3^{\cos^2 x} - 9\cdot 3^{\cos^2 x - \left(1-\cos^2 x\right)} = 1.$$

Továbbá:

$$4\cdot 3^{\cos^2 x} - 9\cdot 3^{2\cos^2 x - 1} = 1$$

$$4\cdot 3^{\cos^2 x} - \frac{9}{3}\cdot\left(3^{\cos^2 x}\right)^2 = 1$$

$$4\cdot 3^{\cos^2 x} - \frac{9}{3}\cdot\left(3^{\cos^2 x}\right)^2 = 1$$

Ha $3^{\cos^2 x} = t$, akkor $4t - 3\cdot t^2 = 1$, illetve $3t^2 - 4t + 1 = 0.$
Ennek megoldásai $t_1 = 1, \quad t_2 = \frac{1}{3}.$

Ha $3^{\cos^2 x} = 1$, akkor $\cos^2 x = 0$, illetve $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$.

Ha $3^{\cos^2 x} = 0$, akkor $\cos^2 x = -1$, ami lehetetlen.

Az $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$ megoldásokat az értelmezési tartomány miatt nem fogadhatjuk el, s így az adott egyenlet megoldáshalmaza $M = \{k\pi,\ k \in Z\}$.

3. Létezik-e olyan $\{a_n\}$ **mértani sorozat amelyben** $\frac{1}{3}\left(a_1 + a_3 + a_4\right) = \frac{1}{2}\left(a_2 + a_4\right)$?
A választ indokold meg!

Megoldás:

$$\frac{1}{3}\left(a_1 + a_3 + a_4\right) = \frac{1}{2}\left(a_2 + a_4\right)$$

$$\frac{1}{3}\left(a_1 + a_1q^2 + a_1q^3\right) = \frac{1}{2}\left(a_1q + a_1q^3\right)$$

$$\frac{1}{3}a_1\left(1 + q^2 + q^3\right) = \frac{1}{2}a_1\left(q + q^3\right)$$

$$\frac{1}{3}a_1\left(1 + q^2 + q^3\right) - \frac{1}{2}a_1\left(q + q^3\right) = 0$$

$$a_1\left(\frac{1+q^2+q^3}{3} - \frac{q+q^3}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = 0 \quad \vee \quad \frac{1+q^2+q^3}{3} = \frac{q+q^3}{2},$$

innen $\qquad a_1 = 0 \quad \vee \quad 2 + 2q^2 + 2q^3 = 3q + 3q^3$

illetve $\qquad a_1 = 0 \quad \vee \quad q^3 - 2q^2 + 3q - 2 = \left(q-1\right)\left(q^2 - q + 2\right) = 0$.

Ha $a_1 = 0$, akkor a keresett sorozat az $\{a_n\}$: $0, 0, 0, \ldots$ állandó sorozat.

Ha $q=1$, akkor a keresett sorozat az $\{a_n\}: \quad a_1, a_1, a_1, \ldots$ állandó sorozat, ahol $a_1 \in R$.
A $q^2-q+2=0$ egyenletnek nincs valós megoldása.

Van olyan mértani sorozat, amely kielégíti az adott feltételt, méghozzá az állandó sorozatok: $\{a_n\}: \quad a_1, a_1, a_1, \ldots$, ahol $a_1 \in R$.

4. A szabályos négyoldalú gúla oldaléleinek hossza 1, négyzet alakú alapjának éle pedig x. Határozd meg a gúla $V(x)$ térfogatát az x függvényében, majd számítsd ki a $W(x)=18\cdot V(x)^2$ függvény lehető legnagyobb értékét!

Megoldás: A gúla térfogata

$$V(x)=\frac{1}{3}|BH|=\frac{1}{3}x^2H=\frac{1}{3}x^2\sqrt{1-\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{1}{3}x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}},$$

és ez $x\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$ esetén értelmezett. Ekkor a

$$W(x)=18\cdot V(x)^2=\frac{18}{9}x^4\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=2x^4-x^6$$

függvény maximumát kell keresni, ami $W'(x)=0$ és $W''(x)<0$ feltételek mellett teljesül. Mivel x a gúla alapjának hossza, így

$$W'(x)=8x^3-6x^5=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0 \vee 4-3x^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Mivel $W''(x)=24x^3-30x^4$, így

$$W''\left(x=\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=24\cdot\frac{24\sqrt{3}}{27}-30\cdot\frac{16\cdot 9}{81}=\frac{64\sqrt{3}-160}{3}<0$$

ami azt jelenti, hogy a $W(x)$ függvény az $x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$-ban éri el a maximumát.
A függvény lehető legnagyobb értéke

$$W_{\max}\left(x=\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^4-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^6=\frac{32}{27}.$$

A IX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

7. évfolyam

1. Szögi Evelin, Kis Ferenc Általános Iskola, Orom, **I. díj**
2. Fenyvesi Abigél, Stevan Sremac Általános Iskola – Nov. 11, Zenta, **I. díj**
3. Szalaji Natália, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **II. díj**
4. Vrbaski Viktor, Jovan Mikić Általános Iskola, Szabadka, **II. díj**
5. Korhecz Réka, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **III. díj**
6. Fa Dávid, Majsai úti Általános Iskola, Szabadka, **III. díj**
7. Szalma Réka, Petőfi Sándor Általános Iskola, Hajdújárás, **dicséret**
8. Hajdú Csongor, Majsai úti Általános Iskola, Szabadka, **dicséret**
9. Dragić Teodóra, Stevan Sremac Általános Iskola – Nov. 11, Zenta, **dicséret**
10. Vécsi Orsolya, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **dicséret**
11. Polgár Ákos, Stevan Sremac Általános Iskola – Nov. 11, Zenta, **dicséret**
12. Vékony Vivien, Jovan Jovanović Zmaj Általános Iskola, Szenttamás, **dicséret**
13. Erdélyi Valentina, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **dicséret**
14. Sörös Vince, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **dicséret**

8. évfolyam

1. Kozák Sánta Vivien Dóra, Kizúr István Általános Iskola, Szabadka, **I. díj**
2. Terhes Balázs, Stevan Sremac Általános Iskola – Emlékiskola, Zenta, **I. díj**
3. Kovács Anna, Sonja Marinković Általános Iskola, Nagybecskerek, **II. díj**
4. Borsos Teodóra, Csokonai Vitéz Mihály Általános Iskola, Felsőhegy, **II. díj**
5. Horti Katalin, Stevan Sremac Általános Iskola – Emlékiskola, Zenta, **III. díj**
6. Szabó Emília, Hunyadi János Általános Iskola, Csantavér, **III. díj**
7. Mucsi Edina, Csokonai Vitéz Mihály Általános Iskola, Felsőhegy, **dicséret**
8. Benkó Zoltán, Miloš Crnjanski Általános Iskola, Szabadka, **dicséret**
9. Patyi Gábor, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **dicséret**
10. Dobó Márk, Petőfi Sándor Általános Iskola, Hajdújárás, **dicséret**
11. Juhász Bence, Csokonai Vitéz Mihály Általános Iskola, Felsőhegy, **dicséret**
12. Mészáros Angéla, Stevan Sremac Ált. Iskola – Emlékiskola, Zenta, **dicséret**
13. Kőrösi Ágota, Cseh Károly Általános Iskola, Ada, **dicséret**
14. Nagy Torma Norbert, Miloš Crnjanski Általános Iskola, Szabadka, **dicséret**
15. Berec Judit, Jovan Jovanović Zmaj Általános Iskola, Magyarkanizsa, **dicséret**
16. Balázs Petra, Jovan Jovanović Zmaj Általános Iskola, Magyarkanizsa, **dicséret**

9. évfolyam

1. Szilágyi Krisztina, Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék, **I. díj**
2. Kovacsics Viola, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **I. díj**
3. Kanalas Dávid, Matematikai Gimnázium, Belgrád, **I. díj**
4. Kovacsics Flórián, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **II. díj**
5. Téglás Ervin, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
6. Palotás Sámuel, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
7. Miliszávlyevity Laura, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **III. díj**
8. Vrábel Máté Dávid, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
9. Petrás Ármin, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **dicséret**
10. Kiss Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **dicséret**
11. Patarica Ildikó, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
12. Rozsnyik Szabolcs, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**

10. évfolyam

1. Bíró Dominik, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Szilágyi Dániel, Jovanović Zmaj Gimnáziu, Újvidék, **I. díj**
3. Horti Krisztina, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Tokity Rudolf, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
5. Mátéffy Kristóf, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
6. Francia Krisztina, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
7. Major Kristóf, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
8. Zsúnyi Mónika, Lukijan Mušicki Középiskola, Temerin, **dicséret**
9. Mészáros Ákos, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**

11. évfolyam

1. Balzam Henrietta, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Skultéti Anikó, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Bakos Evelin, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**
4. Kiskároly Tímea, Dositej Obradović Gimnázium, Topolya, **dicséret**
5. Pletikoszity Johanna, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **dicséret**

12. évfolyam

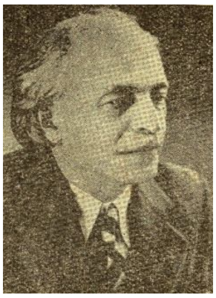
1. Piri Annamária, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Körmöczi Andor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Máriás Mónika, Becsei Gimnázium, Óbecse, **II. díj**
4. Nagygyörgy Kristóf, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
5. Kőrösi Balázs, Műszaki Középiskola, Ada, **III. díj**
6. Simonyi Máté, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **dicséret**

A verseny díjazottjai.

A X. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Előadó: dr. Hatvani László
Előadás címe: Matematikai modellezés

Versenyszervezők javítás közben, jókedvűen (Ripcó Sipos Elvira és Csikós Pajor Gizella).

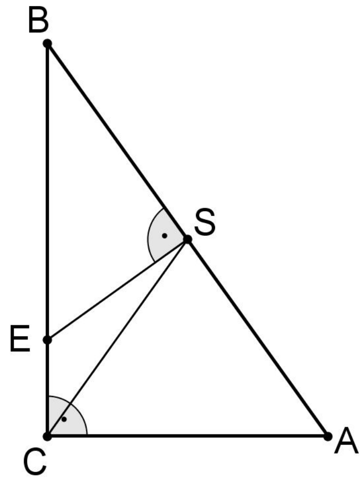


X. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2012. december 1.

7. évfolyam

1. Egy röplabda versenyen 5 csapat vett részt. A csapatkapitányok: Kriszta, Éva, Zsófi, Piri és Réka. A verseny után a lányok így nyilatkoztak az eredményről:
Kriszta: Piri csapata lett a második. Mi csak a harmadikok lettünk.
Éva: Nyertünk. Zsófiék lettek a másodikok.
Piri: Másodikok lettünk. Rékáék csak a negyedik helyet csípték el.
Réka: Csak a negyedikek lettünk. Jó Krisztának, ők nyertek.
Zsófi: Harmadikok lettünk. Éváék lettek az utolsók.
Ki milyen helyezést ért el, ha tudjuk, hogy a lányok állításai közül egyik igaz, a másik hamis?

2. Az ABC derékszögű háromszögben az S pont az AB átfogó felezőpontja, ahol $|SC|=20$. Az AC (hosszabb) befogóra berajzoljuk az E pontot úgy, hogy $ES \perp AB$ és $|ES|=15$. Számítsd ki az ABC háromszög területét!

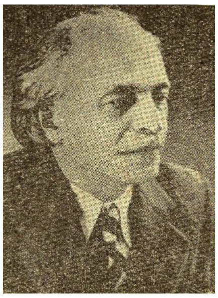


3. Melyik az a háromjegyű természetes szám, amely ötszöröse a számjegyei szorzatának?

4. A Mézga családban Géza, az apuka, Paula, az anyuka, Kriszta és Aladár, a gyerekek, összesen 111 évesek. Paula és Kriszta összesen 1 évvel idősebbek, mint Géza és Aladár együtt. Géza négyszer olyan idős, mint Aladár, egy évvel ezelőtt pedig Paula négyszer olyan idős volt, mint Aladár. Hány évesek külön-külön a Mézga család tagjai?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



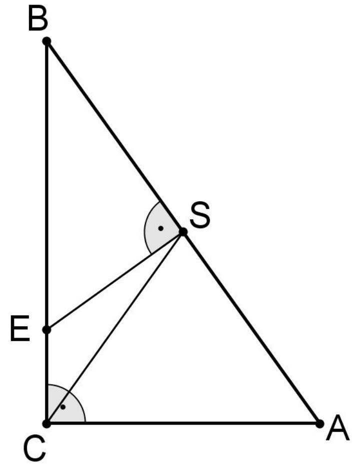
X. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2012. december 1.

8. évfolyam

1. A Mézga családban Géza, az apuka, Paula, az anyuka, Kriszta és Aladár, a gyerekek, összesen 111 évesek. Paula és Kriszta összesen 1 évvel idősebbek, mint Géza és Aladár együtt. Géza négyszer olyan idős, mint Aladár, egy évvel ezelőtt pedig Paula négyszer olyan idős volt, mint Aladár. Hány évesek külön-külön a Mézga család tagjai?

2. Határozd meg mindazokat az n kétjegyű természetes számokat, amelyekre a $\sqrt{\dfrac{n+24}{n-24}}$ szám természetes szám!

3. Az ABC derékszögű háromszögben az S pont az AB átfogó felezőpontja, ahol $|SC|=20$. Az AC (hosszabb) befogóra berajzoljuk az E pontot úgy, hogy $ES \perp AB$ és $|ES|=15$. Számítsd ki az ABC háromszög területét!

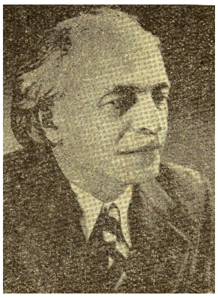


4. Számold ki az
a) xy **kifejezés értékét, majd az**
b) $(x+y)^2$ **kifejezés értékét, ha tudjuk, hogy**

$$\frac{2}{x}-\frac{2}{y}=1 \text{ és } y-x=1.$$

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



X. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2012. december 1.

9. évfolyam

1. Óránk éppen egy 4 és 5 óra közötti időpontot mutat. Egy 7 és 8 óra közötti pillanatban a két mutató az előbbi helyzethez képest helyet cserélt. Hány óra volt a két időpontban?

2. Milyen arányban osztják az $ABCDEF$ **szabályos hatszög** AC **és** BF **átlói egymást?**

3. Mely pozitív x, y, z **egész számokra igaz, hogy**

$$x^2y - yz^2 - x^2 + z^2 = 30\,?$$

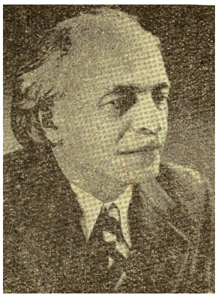
4. Arthur király n **számú lovagja egy kerek asztal körül ül. Minden lovagnál vagy fehérboros, vagy vörösboros kupa van. Pontban éjfélkor minden lovag, akinél vörösbor van, átadja a kupáját a jobb oldali szomszédjának, akinél pedig fehérbor van, átnyújtja a kupáját a bal oldali második szomszédjának. Tudjuk, hogy van vörösbor is és fehérbor is az asztalon. Add meg a fehérboros és vörösboros kupák egy lehetséges elrendezését, hogy éjfél után is mindenkinek legyen kupája, ha**

a) $n = 12$**;**
b) $n = 13$**;**
c) $n = 2013$**.**

Ha valamelyik esetben ilyen elrendezése a fehér- és vörösboroknak nem létezik, indokold meg, miért nem.

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



X. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2012. december 1.

10. évfolyam

1. Hány olyan pozitív egész szám van, amelyre igaz, hogy a számjegyeinek összege és szorzata is egyaránt 24?

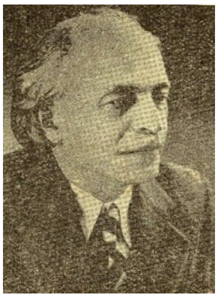
2. Mely x és y nemnegatív egész számokra igaz, hogy $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1000}$?

3. Az O középpontú $AB=2r$ átmérőjű félkörön felvesszük a C és D pontokat úgy, hogy az AD és BC húrok hossza egyaránt a, a CD húr hossza pedig x. Bizonyítsd be, hogy ha a és r mérőszáma racionális szám, akkor x mérőszáma is racionális szám! (Vedd figyelembe a pontok minden lehetséges elrendezését!)

4. Legyenek $A=177...76$ és $B=355...52$ rendre $2k+3$ és $k+2$ számjegyű számok. Bizonyítsd be, hogy $\sqrt{A-B}$ is természetes szám és határozd meg a számjegyeinek számát!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



X. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2012. december 1.

11. évfolyam

1. Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ **másodfokú függvénynek** $(x \in R,\ a \neq 0)$ **egy nullahelye van. Az** $f(x)$ **függvény minimumhelye** $x = c$**. Mekkora az** ac **szorzat értéke? Melyek ezek a függvények?**

2. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{array}{ccccccc} x^3 & + & y^3 & + & z^3 & = & 8 \\ x^2 & + & y^2 & + & z^2 & = & 22 \\ \dfrac{1}{x} & + & \dfrac{1}{y} & + & \dfrac{1}{z} & = & \dfrac{-z}{xy} \end{array}$$

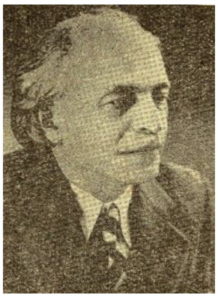
3. A szabályos háromoldalú $ABCS$ **gúla alaplapja** ABC**, amelynek élei** $a\ cm$ **hosszúságúak, csúcsa pedig** S**. Számítsd ki az adott gúla térfogatát, ha az** A **csúcs távolsága a szemköztes oldallaptól** $h\ cm$**.**

4. Igazold, hogy

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}.$$

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



X. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2012. december 1.

12. évfolyam

1. Ha x **valós szám és** $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$**, akkor számítsd ki** $x^5 + \frac{1}{x^5}$ **értékét!**

2. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= 8 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 22 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{-z}{xy} \end{aligned}$$

3. Az ABC **egyenlő szárú háromszögben (**$|AB| = |AC|$**) az** AA' **magasságvonal a háromszög köré írt kört** E **pontban, míg az** $EAC\angle$ **szögfelezője a kört** D **pontban metszi. A körhöz** D **pontban húzott érintő az** AE, AC, BC **egyeneseket, rendre, az** F, I, L **pontokban metszi.**

a) Bizonyítsd be, hogy ha M **a háromszög magasságpontja, akkor a** $BMCE$ **négyszög rombusz!**

b) Igazold, hogy $ABFL$ **húrnégyszög!**

4. Adott az $f(x) = x^3 + px + q$ **függvény, ahol** p **és** q **valós paraméterek.**

a) Ha M **a függvény helyi maximuma és** m **a függvény helyi minimuma, akkor fejezd ki a paraméterek segítségével az** Mm **kifejezést!**

b) Ha -2 **a függvény nullahelye, határozd meg a** p **és** q **értékeit úgy, hogy** $M - m = 4$ **teljesüljön!**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

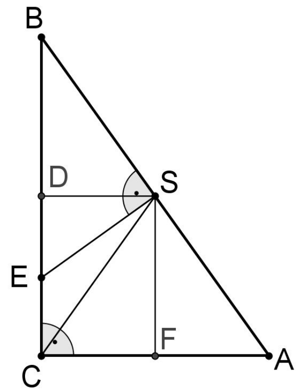
A X. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

7. évfolyam

1. Egy röplabda versenyen 5 csapat vett részt. A csapatkapitányok: Kriszta, Éva, Zsófi, Piri és Réka. A verseny után a lányok így nyilatkoztak az eredményről:
Kriszta: Piri csapata lett a második. Mi csak a harmadikok lettünk.
Éva: „Nyertünk. Zsófiék lettek a másodikok."
Piri: „Másodikok lettünk. Rékáék csak a negyedik helyet csípték el."
Réka: „Csak a negyedikek lettünk. Jó Krisztának, ők nyertek."
Zsófi: „Harmadikok lettünk. Éváék lettek az utolsók."
Ki milyen helyezést ért el, ha tudjuk, hogy a lányok állításai közül egyik igaz, a másik hamis.

Megoldás: Kriszta két állítása közül egyik igaz, a másik hamis. Ha az első állítás igaz, akkor Piri csapata lett a második.Ekkor Éva második állítása hamis, tehát Éváék lettek az elsők. Piri első állítása igaz, ezért Rékáék nem lehettek negyedikek. Réka állítása miatt, az előzőből az következik, hogy Krisztáik is elsők lettek, ami lehetetlen. Ezek szerint Kriszta első állítása hamis, tehát a második igaz.
Krisztáék harmadikok lettek. Mivel Piriék nem másodikok, ezért Piri mondataiból arra következtethetünk, hogy Rékáék lettek a negyedikek. Zsófi első mondata nem lehet igaz, ezért Éváék lettek az utolsók. Ezek szerint Éva első mondata hamis, és Zsófi csapata a szerezte meg a második helyet. Az első helyezett így csak Piri csapata lehetett. A helyes sorrend: 1. Piri, 2. Zsófi, 3. Kriszta, 4. Réka, 5. Éva.

2. Az ABC derékszögű háromszögben az S pont az AB átfogó felezőpontja, ahol $|SC| = 20$. Az AC (hosszabb) befogóra berajzoljuk az E pontot úgy, hogy $ES \perp AB$ és $|ES| = 15$. Számítsd ki az ABC háromszög területét!



Megoldás: Mivel az S pont az AB átfogó felezőpontja, így adódik, hogy $|SC| = |SB| = |SA| = 20$. Ekkor az ASE derékszögű háromszögből a Pitagorasz tétel alapján adódik, hogy $|AE| = 25$. Legyen D az S pontból az AC befogóra bocsátott merőleges talppontja, F pedig az S pontból az BC befogóra bocsátott merőleges talppontja. Mivel SD az ASE háromszög magasságvonala, ezért $|AE| \cdot |SD| = |SE| \cdot |SA|$, azaz $25 \cdot |SD| = 15 \cdot 20$, amelyből következik, hogy $|SD| = 12$. A $CDSF$ négyszög téglalap, mert minden szöge derékszög, ezért a szemben fekvő oldalai egyenlőek. A BCS háromszög egyenlő szárú, ezért az FS magasságvonal felezi a BC alapot, azaz érvényes, hogy $|BF| = |CF| = |SD| = 12$, vagyis a BC befogó hossza kiszámítható, $|BC| = 24$. Mivel az átfogó felét már ismerjük, így $|AB| = 40$. Újra alkalmazva a Pitagorasz tételt, most az ABC háromszögre, adódik, hogy $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$, vagyis $|AC|^2 + 24^2 = 40^2$, ahonnan adódik, hogy $|AC| = 32$.
A háromszög területe tehát $T = \frac{|BC| \cdot |AC|}{2} = \frac{24 \cdot 32}{2} = 384$.

3. Melyik az a háromjegyű természetes szám, amely ötszöröse a számjegyei szorzatának?

Megoldás: Mivel a keresett szám osztható 5-tel, utolsó számjegye 0 vagy 5. Ha 0 lenne, akkor a szorzat is nulla lenne, ami nem lehetséges, ezért a szám 5-re végződik, tehát felírhatjuk a következő alakban: $\overline{ab5}$.

Igaz hogy: $\overline{ab5} = 5(ab \cdot 5) = 25ab$

A keresett szám osztható 25-tel, és minden számjegye páratlan. Ha valamelyik számjegy páros lenne, akkor a szorzat 0-ra végződne, ami nem lehetséges, mivel az utolsó számjegy az 5.

A keresett szám $\overline{a75}$ alakú. Innen $100a + 75 = 25 \cdot 7 \cdot a$, ahonnan $a = 1$.

A keresett szám tehát a 175.

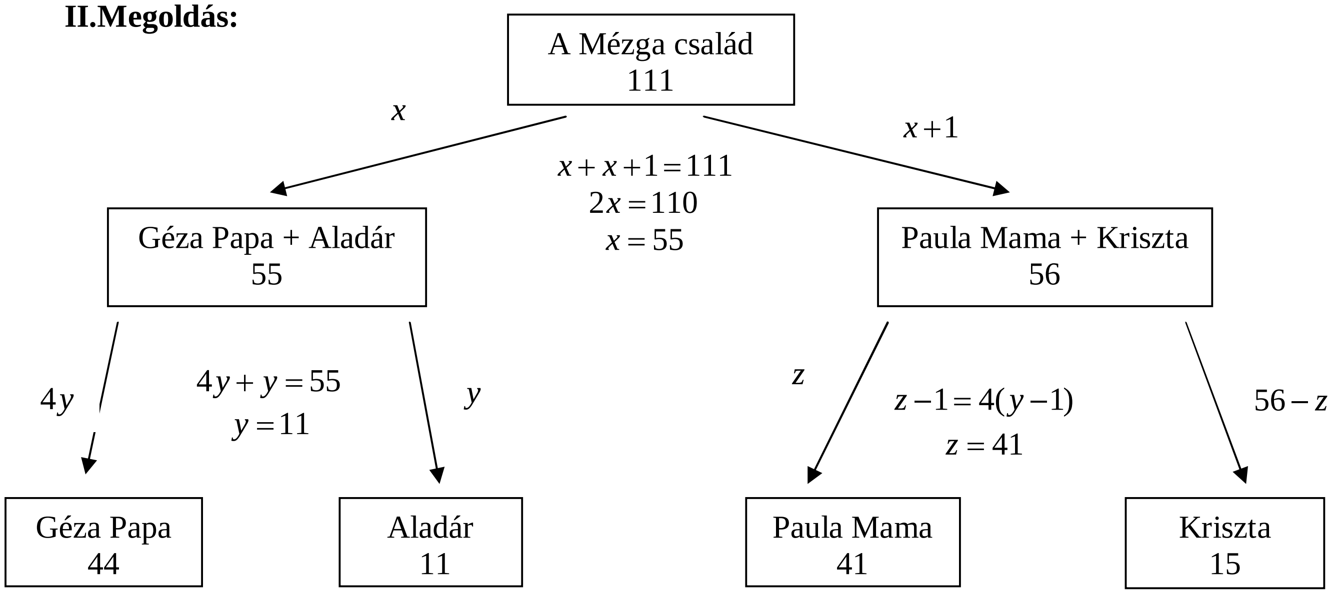
4. A Mézga családban Géza, az apuka, Paula, az anyuka, Kriszta és Aladár, a gyerekek, összesen 111 évesek. Paula és Kriszta összesen 1 évvel idősebbek, mint Géza és Aladár együtt. Géza négyszer olyan idős, mint Aladár, egy évvel ezelőtt pedig Paula négyszer olyan idős volt, mint Aladár. Hány évesek külön-külön a Mézga család tagjai?

I.Megoldás: Jelölje g Géza, p Paula, k Kriszta, a pedig Aladár éveinek számát. A feladatban megadott feltételek alapján felírhatjuk a következő egyenletrendszert:

$$g + p + k + a = 111, \quad p + k - 1 = g + a, \quad g = 4a, \quad p - 1 = 4(a - 1)$$

Az első két egyenlet alapján könnyen megkapjuk, hogy $g + a = 55$. Behelyettesítve ide a harmadik összefüggést azt kapjuk, hogy $4a + a = 55$, azaz $a = 11$ és $g = 44$. A negyedik egyenletből most $p = 4a - 3$, azaz $p = 41$. Az első egyenletből adódik most, hogy $k = 15$. Tehát Géza, az apuka, 44, Paula, az anyuka, 41, Kriszta 15, Aladár pedig 11 éves.

II.Megoldás:



8. évfolyam

1. A Mézga családban Géza, az apuka, Paula, az anyuka, Kriszta és Aladár, a gyerekek, összesen 111 évesek. Paula és Kriszta összesen 1 évvel idősebbek, mint Géza és Aladár együtt. Géza négyszer olyan idős, mint Aladár, egy évvel ezelőtt pedig Paula négyszer olyan idős volt, mint Aladár. Hány évesek külön-külön a Mézga család tagjai?

Megoldás: Ugyanaz, mint a 7. évfolyam 4. feladata.

2. Határozd meg mindazokat az n kétjegyű természetes számokat, amelyekre a $\sqrt{\dfrac{n+24}{n-24}}$ szám természetes szám!

Megoldás: Egy szám négyzetgyöke akkor természetes szám, ha a négyzetgyök alatt négyzetszám van. Ekkor

$$k^2=\frac{n+24}{n-24}=\frac{n-24+24+24}{n-24}=1+\frac{48}{n-24}.$$

A szám négyzetgyöke akkor lesz természetes szám, ha $\dfrac{48}{n-24}>0$ és $n-24$ a 48 osztója. Így $n-24\in\{1,2,3,4,6,8,12,16,24,48\}$, vagyis

$$n\in\{25,26,27,28,30,32,36,40,48,72\}.$$

Ebből adódik, hogy ekkor

$$k^2\in\{49,25,17,13,9,7,5,4,3,2\},$$

de ezekből az értékekből csak $k^2\in\{49,25,9,4\}$ lehetséges, így a megoldás $n\in\{25,26,30,40\}$, amelyek mind kétjegyű számok.

3. Az ABC derékszögű háromszögben az S pont az AB átfogó felezőpontja, ahol $|SC|=20$. Az AC (hosszabb) befogóra berajzoljuk az E pontot úgy, hogy $ES\perp AB$ és $|ES|=15$. Számítsd ki az ABC háromszög területét!

Megoldás: Mivel az S pont az AB átfogó felezőpontja, így adódik, hogy

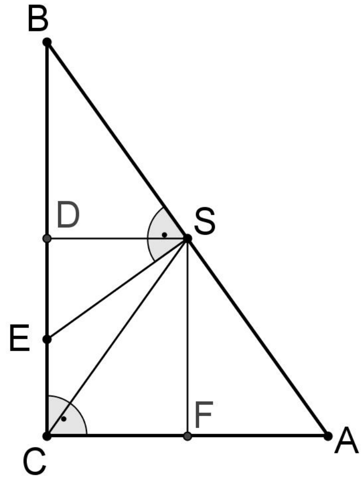
$$|SC|=|SB|=|SA|=20.$$

Ekkor az ASE derékszögű háromszögből a Pitagorasz tétel alapján adódik, hogy $|AE|=25$. Legyen D az S pontból az AC befogóra bocsátott merőleges talppontja, F pedig az S pontból az BC befogóra bocsátott merőleges talppontja. Mivel SD az ASE háromszög magasságvonala, ezért $|AE|\cdot|SD|=|SE|\cdot|SA|$, azaz $25\cdot|SD|=15\cdot 20$, amelyből következik, hogy $|SD|=12$. A $CDSF$ négyszög téglalap, mert minden szöge derékszög, ezért a szemben fekvő oldalai egyenlőek. A BCS háromszög egyenlő szárú, ezért az FS magasságvonal felezi a BC alapot, azaz érvényes, hogy $|BF|=|CF|=|SD|=12$, vagyis a BC befogó hossza kiszámítható, $|BC|=24$. Mivel az átfogó felét már ismerjük, így $|AB|=40$. Újra alkalmazva a Pitagorasz tételt, most az ABC háromszögre, adódik,

hogy $|AC|^2+|BC|^2=|AB|^2$, vagyis $|AC|^2+24^2=40^2$,

ahonnan adódik, hogy $|AC| = 32$.
A háromszög területe tehát

$$T = \frac{|BC| \cdot |AC|}{2} = \frac{24 \cdot 32}{2} = 384.$$



4. Számold ki az
a) xy **kifejezés értékét, majd az**
b) $(x+y)^2$ **kifejezés értékét, ha tudjuk, hogy**

$$\frac{2}{x} - \frac{2}{y} = 1 \textbf{ és } y - x = 1.$$

Megoldás: a) Az első egyenletet felírhatjuk

$$\frac{2y-2x}{xy} = 1, \text{ illetve } \frac{2(y-x)}{xy} = 1$$

alakban, amelyből a második egyenlet behelyettesítésével adódik

$$\frac{2}{xy} = 1, \text{ illetve } xy = 2.$$

b) Ha most négyzetre emeljük a második egyenlet mindkét oldalát, akkor $y^2 - 2xy + x^2 = 1$ adódik, ahonnan hozzáadva és kivonva $2xy$ -t felírhatjuk, hogy

$$(x+y)^2 - 4xy = 1.$$

Behelyettesítve $xy = 2$ -t adódik, hogy

$$(x+y)^2 - 4 \cdot 2 = 1, \text{ azaz } (x+y)^2 = 9.$$

9. évfolyam

1. Óránk éppen egy 4 és 5 óra közötti időpontot mutat. Egy 7 és 8 óra közötti pillanatban a két mutató az előbbi helyzethez képest helyet cserélt. Hány óra volt a két időpontban?

Megoldás: A 4 és 5 órai időpontot jelölje X, ennek törtrészét x. Tudjuk, hogy a nagymutató egy óra alatt $360°$-os szöggel, a kismutató $30°$-os szöggel mozdul el. A kismutató által a 12-es iránnyal bezárt szög legyen α_1, a nagymutatóé pedig β_1. Ezt a két szöget a következőképpen számolhatjuk ki:

$$\alpha_1 = 4\cdot 30° + x\cdot 30°,$$

$$\beta_1 = x\cdot 360°.$$

A második időpontot jelöljük Y-nal, a törtrészét pedig y-nal. Ekkor a második időponthoz tartozó megfelelő szögeket rendre α_2-vel és β_2-vel jelölve

$$\alpha_2 = 7\cdot 30° + y\cdot 30°,\ \beta_2 = y\cdot 360°.$$

Mivel a két időpontban a mutatók helyet cseréltek ezért $\alpha_1 = \beta_2$ és $\alpha_2 = \beta_1$, azaz

$$4\cdot 30° + x\cdot 30° = y\cdot 360° \text{ és } 7\cdot 30° + y\cdot 30° = x\cdot 360°.$$

Ha mindkét egyenletet elosztjuk $30°$-kal, akkor az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$4 + x = 12y$$

$$7 + y = 12x$$

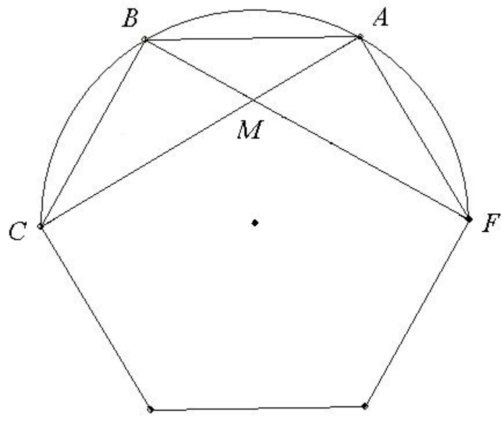
Az egyenleteket átrendezve és a második egyenletet 12-vel beszorozva adódik a következő:

$$4 + x - 12y = 0$$

$$84 - 144x + 12y = 0$$

Innen az egyenletek összeadásával adódik, hogy $88 - 143x = 0$, azaz $x = \frac{88}{143} = \frac{8}{13}$.

Ezt az egyenletbe behelyettesítve kapjuk, hogy $y = \frac{5}{13}$, tehát az első időpont $4\frac{8}{13}$ óra, a második $7\frac{5}{13}$ óra.



2. Milyen arányban osztják az $ABCDEF$ szabályos hatszög AC és BF átlói egymást?

Megoldás: Mivel $|AB| = |AF|$, ezért az ABF háromszög egyenlőszárú. Tudjuk, hogy a szabályos hatszög egy belső szöge $120°$-os, így az ABF háromszög két alapon fekvő szöge együtt $180° - 120° = 60°$, tehát az ABF szög $30°$-os, és a vele egybevágó ACB szög is. Mivel a B csúcsnál lévő belső szög nagysága is $120°$, elvégezhetjük a következő számítást:

$FBC\angle = ABC\angle - ABF\angle = 120° - 30° = 90°$.

A BCM háromszög egy derékszögű háromszög, amelynek van $30°$-os szöge, tehát ez a háromszög egy szabályos háromszög fele. Innen adódik, hogy $|CM| = 2|MB|$, azaz $|CM| = 2|MA|$, tehát az M pont az átlókat $1:2$ arányban osztja.

3. Mely pozitív x, y, z egész számokra igaz, hogy

$$x^2y - yz^2 - x^2 + z^2 = 30 \ \textbf{?}$$

Megoldás: A bal oldal átalakítható kiemelésekkel:

$$y\left(x^2 - z^2\right) - \left(x^2 - z^2\right) = 30, \text{ illetve } \left(x^2 - z^2\right)\left(y - 1\right) = 30.$$

Először mutassuk meg, hogy a bal oldal mindkét tényezője pozitív. Ez következik abból, hogy $y-1$-ben y legalább 1, de 1 nem lehet, mert akkor a szorzat 0 lenne, tehát $y \geq 2$. Ekkor viszont a másik tényezőnek is pozitívnak kell lennie, így $x > z$.
Az első tényező felbontható $x+z$ és $x-z$ szorzatára, amelyek azonos paritásúak, így szorzatuk vagy páratlan, vagy 4-gyel osztható páros szám. Ez utóbbi eset nem lehetséges, mert a 30-nak nem osztója a 4, tehát az $x^2 - z^2$ csak páratlan lehet. Mivel a 30 páratlan osztói 1, 3, 5 és 15, ezért az $x^2 - z^2$ csak ezeket az értékeket veheti fel. Mivel láttuk, hogy $x > z$, így $x + z > x - z$, és mindkét oldal pozitív.
Ha $x^2 - z^2 = 1$, akkor $x + z = 1$ és $x - z = 1$. Ebből $z = 0$ adódik, ami ellentmondás.
Ha $x^2 - z^2 = 3$, akkor $x + z = 3$ és $x - z = 1$, ahonnan $x = 2$, $z = 1$.
Ha $x^2 - z^2 = 5$, akkor $x + z = 5$ és $x - z = 1$, ahonnan $x = 3$, $z = 2$.
Ha $x^2 - z^2 = 15$, akkor két eset lehetséges: 1) $x + z = 5$ és $x - z = 3$, ahonnan $x = 4$, $z = 1$, 2) $x + z = 15$ és $x - z = 1$, ahonnan $x = 8$, $z = 7$.
Így a következő megoldásokat kaptuk: $(2;11;1)$, $(3;7;2)$, $(4;3;1)$ és $(8;3;7)$.

4. Arthur király n számú lovagja egy kerek asztal körül ül. Minden lovagnál vagy fehérboros, vagy vörösboros kupa van. Pontban éjfélkor minden lovag, akinél vörösbor van, átadja a kupáját a jobb oldali szomszédjának, akinél pedig fehérbor van, átnyújtja a kupáját a bal oldali második szomszédjának. Tudjuk, hogy van vörösbor is és fehérbor is az asztalon. Add meg a fehérboros és vörösboros kupák egy lehetséges elrendezését, hogy éjfél után is mindenkinek legyen kupája, ha a) $n = 12$; b) $n = 13$; c) $n = 2013$.
Ha valamelyik esetben ilyen elrendezése a fehér- és vörösboroknak nem létezik, indokold meg, miért nem.

Megoldás: **a)** Számozzuk meg sorba a lovagokat. A táblázat első sora jelöli, hogy kinél milyen bor van, a második sorban pedig látható, hogy melyik kupa hova került. A v jelű kupák 1 helyet jobbra lépnek, az f jelűek 2 helyet balra:

éjfél előtt	f1	v2	v3	f4	v5	v6	f7	v8	v9	f10	v11	v12
éjfél után	v12	f4	v2	v3	f7	v5	v6	f10	v8	v9	f1	v11

b) Ebben az esetben nem megoldható a borok elrendezése. Ha egy adott helyen vörösboros kupa áll, akkor jobbra lépve 3 helyet szintén vörösborosnak kellene állnia, mert ha fehér volna ott, akkor a kiindulási helyen ülő jobb szomszédja két kupát kapna, és így valakinek biztosan nem jutna. Ha minden harmadik lovagnak vörösbora van, az egy 13 személyes asztal esetében azt jelenti, hogy mindenkinek vörösbora van (mert mindig jobbra lépve hármat bejárjuk az asztal összes helyét), ami ellentmond a feladat feltételeinek.
c) Az a) részben megadott konstrukciót kell folytatni. Minden harmadik lovagnak fehérbort, a többieknek vörösbort kell adni, és ez lehetséges, mert 2013 osztható 3-mal.

10. évfolyam

1. Hány olyan pozitív egész szám van, amelyre igaz, hogy a számjegyeinek összege és szorzata is egyaránt 24?

Megoldás: A keresett számokban előforduló számjegyek lehetséges értéke 1, 2, 3, 4, 6, 8 a szorzatra vonatkozó feltétel alapján. A számjegyek nem növekvő sorrendben a következők lehetnek az össszegre adott feltétel alapján:

8,3 és 13 db 1-es,
6,4 és 14 db 1-es
6,2,2 és 14 db 1-es
4,3,2 és 15 db 1-es
3,2,2,2 és 15 db 1-es

Az öt lehetséges esetben a megoldások száma rendre: $\frac{15!}{13!}, \frac{16!}{14!}, \frac{17!}{2!\cdot 14!}, \frac{18!}{15!}, \frac{19!}{15!\cdot 3!}$

Összesen tehát $15\cdot 14+16\cdot 15+17\cdot 8\cdot 15+18\cdot 17\cdot 16+19\cdot 17\cdot 16\cdot 3=22890$ ilyen szám van.

2. Mely x és y nemnegatív egész számokra igaz, hogy $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1000}$?

Megoldás: Ha $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1000}$, akkor $\sqrt{y}=\sqrt{1000}-\sqrt{x}$, a négyzetre emelés után pedig $y=x+1000-20\sqrt{10x}$ adódik. Ennek alapján a $\sqrt{10x}$ racionális ha a $10x$ négyzetszám, azaz $x=10k^2$, ahol k természetes szám. Hasonlóan $y=10n^2$. Az eredeti egyenletbe való behelyettesítés után $k\sqrt{10}+n\sqrt{10}=10\sqrt{10}$, azaz $k+n=10$.

A lehetséges (k,n) párok

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

A megfelelő (x,y) párok pedig ennek megfelelően

x	0	10	40	90	160	250	360	490	640	810	1000
y	1000	810	640	490	360	250	160	90	40	10	0

Ezek a számpárok kielégítik az egyenletet.

3. Az O középpontú $|AB| = 2r$ átmérőjű félkörön felvesszük a C és D pontokat úgy, hogy az AD és BC húrok hossza egyaránt a, a CD húr hossza pedig x. Bizonyítsd be, hogy ha a és r mérőszáma racionális szám, akkor x mérőszáma is racionális szám! (Vedd figyelembe a pontok minden lehetséges elrendezését!)

Megoldás: Ha a pontok sorrendje $ABCD$, akkor a feltételek alapján ez egy szimmetrikus trapéz és ennek CT magassága h, amelyet kétféle módon fejezünk ki :
Az OTC és a TBC háromszögben az $h^2 = r^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = a^2 - \left(r - \frac{x}{2}\right)^2$, az összehasonlítás alapján $r^2 - \frac{x^2}{4} = a^2 - r^2 + rx - \frac{x^2}{4}$, amiből $x = 2r - \frac{a^2}{r}$.
Két racionális szám különbsége, szorzata és hányadosa is racionális szám, tehát ha a és r racionális akkor az x is az.
Ha a pontok sorrendje $ABDC$, akkor a négyszög ismét egyenlőszárú trapéz és ennek szárai

$AC = BD = c = \sqrt{4r^2 - a^2}$, azaz $c^2 = 4r^2 - a^2$ racionális, így $x = 2r - \frac{c^2}{r}$ is az.

Más háromszögpárok segítségével hasonló módon kaphatjuk, hogy $x = \frac{a^2}{r} - 2r$ és analóg módon indokoljuk racionális voltát.

4. Legyenek $A = 177...76$ és $B = 355...52$ rendre $2k+3$ és $k+2$ számjegyű számok. Bizonyítsd be, hogy $\sqrt{A-B}$ is természetes szám és határozd meg a számjegyeinek számát!

Megoldás. Alakítsuk át az adott számokat a következőképpen:

$$A = 10^{2k+2} + 7\cdot 10^{2k+1} + 7\cdot 10^{k} + ... + 7\cdot 10 + 6 = 10^{2k+2} + 70\cdot(11...1) + 6 =$$

$$= 10^{2k+2} + \frac{70}{9}\cdot(99...9) + 6 = 10^{2k+2} + \frac{70}{9}\cdot(10^{2k+1} - 1) + 6 = \frac{16}{9}\cdot 10^{2k+2} - \frac{16}{9},$$

azaz $A = \frac{16}{9}(10^{2k+2} - 1)$.

Hasonló módon kaphatjuk meg a B számot is ilyen alakban.

$$B = 3\cdot 10^{k+1} + 5\cdot 10^{k} + 5\cdot 10^{k-1} + ... + 5\cdot 10 + 2 = 3\cdot 10^{k+1} + 50\cdot(11...1) + 2 =$$

$$= 3\cdot 10^{k+1} + \frac{50}{9}\cdot(99...9) + 2 = 3\cdot 10^{k+1} + \frac{50}{9}\cdot(10^{k} - 1) + 2 = \frac{32}{9}\cdot 10^{k+1} - \frac{32}{9},$$

azaz $B = \frac{32}{9}(10^{k+1} - 1)$.

Ekkor

$$A - B = \frac{16}{9}(10^{2k+2} - 1) - \frac{32}{9}(10^{k+1} - 1) = \frac{16}{9}10^{2k+2} - \frac{32}{9}10^{k+1} + \frac{16}{9} = \left(\frac{4}{3}\left(10^{k+1} - 1\right)\right)^2,$$

és ebből következik, hogy

$$\sqrt{A-B} = \left(\frac{4}{3}\left(10^{k+1} - 1\right)\right) = \frac{4}{3}(99...9) = 4\cdot(33...3) = 133...32,$$

amely $(k+2)$-jegyű természetes szám.

11. évfolyam

1. Az $f(x)=ax^2+bx+c$ másodfokú függvénynek $(x\in R,\ a\neq 0)$ egy nullahelye van. Az $f(x)$ függvény minimumhelye $x=c$. Mekkora az ac szorzat értéke? Melyek ezek a függvények?

Megoldás. Mivel az $f(x)$ függvénynek minimuma van ezért $a>0$.

A minimumhely $x=-\dfrac{b}{2a}=c$, azaz $b=-2ac$. Mivel a függvénynek egy nullahelye van, ezért a diszkrimináns értéke 0, azaz $b^2-4ac=0$, ahova $b=-2ac$ helyettesítéssel $4a^2c^2-4ac=0$ adódik, vagyis $4ac(ac-1)=0$, ahonnan leolvasható, hogy ac értéke vagy 0 vagy 1.

Ha az $ac=0$, akkor $f(x)=ax^2$, ha viszont $ac=1$, akkor $f(x)=ax^2-2x+\dfrac{1}{a}$, ahol az $a>0$.

2. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{array}{ccccccc} x^3 & + & y^3 & + & z^3 & = & 8 \\ x^2 & + & y^2 & + & z^2 & = & 22 \\ \dfrac{1}{x} & + & \dfrac{1}{y} & + & \dfrac{1}{z} & = & \dfrac{-z}{xy} \end{array}$$

Megoldás: Az utolsó egyenletből következik, hogy:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{z}{xy}=0$$

$$\frac{yz+xz+xy+z^2}{xyz}=0 \quad\Leftrightarrow\quad x(z+y)+z(y+z)=0 \quad\Leftrightarrow\quad (y+z)(x+z)=0$$

innen

$$\begin{array}{lcl} y+z=0 & \vee & x+z=0 \\ y=-z & & x=-z \end{array}$$

ekkor az első egyenletből

$$\begin{array}{lcl} x^3-z^3+z^3=8 & \vee & -z^3+y^3+z^3=8 \\ x=2 & & y=2 \end{array}$$

és a második egyenletből

$$\begin{array}{lcl} 4+z^2+z^2=22 & \vee & z^2+4+z^2=22 \\ z=\pm 3 & & z=\pm 3 \\ y=\mp 3 & & y=\mp 3 \end{array}$$

Így az egyenletrendszer megoldáshalmaza

$$M=\{(2,3,-3),(2,-3,3),(-3,2,3),(3,2,-3)\}.$$

3. A szabályos háromoldalú $ABCS$ gúla alaplapja ABC, amelynek élei $a\ cm$ hosszúságúak, csúcsa pedig S. Számítsd ki az adott gúla térfogatát, ha az A csúcs távolsága a szemköztes oldallaptól $h\ cm$.

Megoldás: Az AMN derékszögű háromszögből

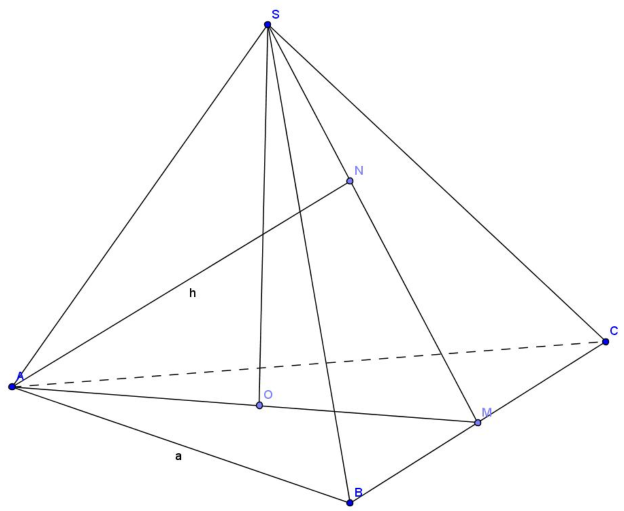
$$|MN| = \sqrt{|AM|^2 - |AN|^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - h^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - h^2}$$

Mivel az $AMN\Delta$ és az $SMO\Delta$ hasonló háromszögek, ezért

$|AN| : |NM| = |SO| : |OM|$, vagyis

$$SO = H_{ABCS} = \frac{OM \cdot AN}{NM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot h}{\sqrt{\frac{3a^2}{4} - h^2}} = \frac{ah\sqrt{3}}{3\sqrt{3a^2 - 4h^2}} .$$

A térfogat tehát: $V = \dfrac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H_{ABCS}}{3} = \dfrac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{ah\sqrt{3}}{3\sqrt{3a^2 - 4h^2}}}{3} = \dfrac{a^3 h}{12\sqrt{3a^2 - 4h^2}}$.



4. Igazold, hogy $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.

Megoldás: Végezzük el az alábbi átalakításokat:

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(2\sin\frac{\pi}{7} \cdot \cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7} \cdot \cos\frac{6\pi}{7}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{7\pi}{7} - \sin\frac{5\pi}{7}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(-\sin\frac{\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2}$$

12. évfolyam

1. Ha x valós szám és $x^3+\frac{1}{x^3}=18$, akkor számítsd ki $x^5+\frac{1}{x^5}$ értékét!

Megoldás: Legyen $x+\frac{1}{x}=t$. Ekkor $x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t$ (ismert összefüggés pl. a szimmetrikus egyenletek esetében). Így $t^3-3t=18$, vagyis $t^3-3t-18=0$. Ennek az egyenletnek egy valós megoldása van, s ez a $t=3$ (pl. Horner-elrendezéssel kiszámítható). Így $x+\frac{1}{x}=3$. Ekkor a binomiális képlet alapján:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^5=x^5+5x^4\frac{1}{x}+10x^3\frac{1}{x^2}+10x^2\frac{1}{x^3}+5x\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}$$

$$3^5=x^5+\frac{1}{x^5}+5\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+10\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$243=x^5+\frac{1}{x^5}+5\cdot 18+10\cdot 3$$

$$x^5+\frac{1}{x^5}=123.$$

2. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert!

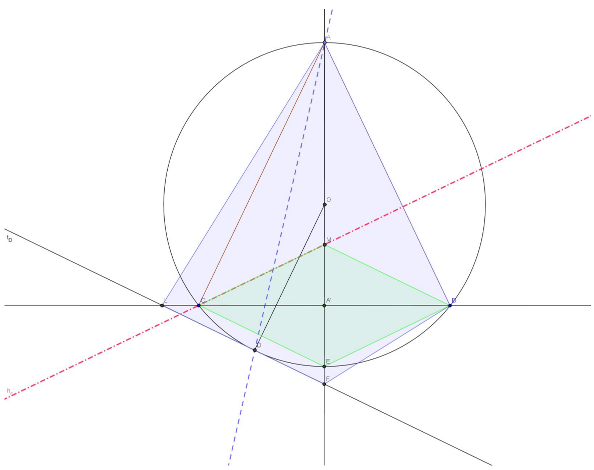
$$\begin{array}{ccccccc} x^3 & + & y^3 & + & z^3 & = & 8 \\ x^2 & + & y^2 & + & z^2 & = & 22 \\ \frac{1}{x} & + & \frac{1}{y} & + & \frac{1}{z} & = & \frac{-z}{xy} \end{array}$$

Megoldás: Ugyanaz, mint 11. évfolyam 2. feladata.

3. Az ABC egyenlő szárú háromszögben ($|AB|=|AC|$) az AA' magasságvonal a háromszög köré írt kört E pontban, míg az $EAC\angle$ szögfelezője a kört D pontban metszi. A körhöz D pontban húzott érintő az AE, AC, BC egyeneseket, rendre, az F, I, L pontokban metszi.

a) Bizonyítsd be, hogy ha M a háromszög magasságpontja, akkor a $BMCE$ négyszög rombusz!

b) Igazold, hogy $ABFL$ húrnégyszög!



Megoldás: a) $ACE\angle$ derékszög, mert a kör átmérőjére szerkesztett kerületi szög. $|DC|\cong|ED|$, mert AD szögfelező. $|BE|\cong|EC|$, mert AE szögfelező. FL párhuzamos EC egyenessel, mert $DO\,||\,AC$ ($ADO\Delta$ egyenlő szárú, alapon fekvő szögei egybevágóak, $ADO\angle\cong OAD\angle\cong DAC\angle$). Mivel $BM\perp AC$ és $EC\perp AC$, így $BM\,||\,AC$.
Mivel $|MC|\cong|BM|$ (egyenlő szárú háromszögben), így $BECM$ rombusz.
b) Mivel $CA\perp DL$ és $AE\perp BL$, ezért $FLB\angle\cong CAE\angle\cong FAB\angle$, s így $ABFL$ húrnégyszög.

4. Adott az $f(x)=x^3+px+q$ függvény, ahol p és q valós paraméterek.
a) Ha M a függvény helyi maximuma és m a függvény helyi minimuma, akkor fejezd ki a paraméterek segítségével az Mm kifejezést!
b) Ha -2 a függvény nullahelye, határozd meg p és q értékeit úgy, hogy $M-m=4$ teljesüljön!

Megoldás:
a) Mivel $f'(x)=3x^2+p$, ezért

$f'(x)=0$, azaz $3x^2+p=0$, ebből $x_{1/2}=\pm\sqrt{\dfrac{-p}{3}}$ a stacionárius pontok, ha $p<0$.

$f''(x)=6x$

$$f''\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)=6\sqrt{\frac{-p}{3}}>0,\text{ ahonnan } m=f_{\min}\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)=\frac{-p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}+p\sqrt{\frac{-p}{3}}+q$$

$$f''\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)=-6\sqrt{\frac{-p}{3}}<0,\text{ ahonnan } M=f_{\max}\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)=\frac{p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}-p\sqrt{\frac{-p}{3}}+q$$

Ekkor

$$Mm=\left(q+\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)\left(q-\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)=q^2-\frac{4p^2}{9}\left(\frac{-p}{3}\right)$$

vagyis $Mm=q^2+\dfrac{4p^3}{27}$.

b) $f(-2)=0 \quad\Rightarrow\quad (-2)^3-2p+q=0 \quad\Rightarrow\quad q=2p+8$

$$M-m=q+\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}-q+\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}=\frac{4p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}=4 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{\frac{-p}{3}}=\frac{3}{p},$$

innen $27=-p^3$, illetve $p=\sqrt[3]{-27}$.
Mivel $p\in R$, így $p=-3$ és $q=2$.

A X. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

7. évfolyam

1. Makán Albert, Szervo Mihály Általános Iskola, Muzslya, **I. díj**
2. Kovács Imola, Sonja Marinković Általános Iskola, Nagybecskerek, **II. díj**
3. Csizmadija Klaudia, Majsai úti Általános Iskola, Szabadka, **II. díj**
4. Lázár Júlia, Sonja Marinković Általános Iskola, Nagybecskerek, **III. díj**
5. Szvoreny Viktor, Novak Radonjić Általános Iskola, Mohol, **III. díj**
6. Bujdosó Tamás, Petar Kočić Általános Iskola, Temerin, **dicséret**
7. Bálind Valentin, Petar Kočić Általános Iskola, Temerin, **dicséret**

8. évfolyam

1. Szögi Evelin, Kis Ferenc Általános Iskola, Orom, **I. díj**
2. Fenyvesi Abigél, Stevan Sremac Általános Iskola – November 11, Zenta, **I. díj**
3. Szalaji Natális, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **II. díj**
4. Korhecz Réka, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **II. díj**
5. Fa Dávid, Majsai úti Általános Iskola, Szabadka, **II. díj**
6. Toldi Teodóra, Csokonai Vitéz Mihály Általános Iskola, Felsőhegy, **III. díj**
7. Molnár Aurél, Október 10. Általános Iskola, Horgos, **III. díj**
8. Tót Szamanta, Kókai Imre Általános Iskola, Temerin, **dicséret**
9. Vrbaski Viktor, Jovan Mikić Általános Iskola, Szabadka, **dicséret**
10. Erdélyi Valentina, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **dicséret**
11. Csipak Noémi, Jovan Popović Általános Iskola, Csóka, **dicséret**
12. Sörös Vince, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **dicséret**

9. évfolyam

1. Kőrösi Ágota, Műszaki Középiskola, Ada, **I. díj**
2. Apró Alexandra, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Dobó Márk, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Kálmán Szilárd, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
5. Borsos Teodóra, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
6. Terhes Balázs, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
7. Horti Katalin, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
8. Szkocsovszki Zsolt, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **III. díj**
9. Mucsi Edina, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **dicséret**
10. Dodony Róbert, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
11. Kozák Sánta Vivien Dóra, Szárits János Műszaki Középiskola, Szabadka, **dicséret**
12. Juhász Bence, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **dicséret**
13. Zelenka Flóra, Becsei Gimnázium, Óbecse, **dicséret**
14. Francia Edina, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
15. Deák Irén, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
16. Gavódi Vanda, Műszaki Középiskola, Ada, **dicséret**
17. Szabó Dávid, Dositej Obradović Gimnázium, Topolya, **dicséret**
18. Berec Judit, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **dicséret**
19. Szabó Emilía, Szárits János Műszaki Középiskola, Szabadka, **dicséret**
20. Varga Somogyi Árpád, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**

10. évfolyam

1. Szilágyi Krisztina, Jovan Jovanović Gimnázium, Újvidék, **I. díj**
2. Kovacsics Flórián, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **I. díj**
3. Vrábel Máté Dávid, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **II. díj**
4. Kanalas Dávid, Matematikai Gimnázium, Belgrád, **II. díj**
5. Kovacsics Viola, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **III. díj**
6. Téglás Ervin, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
7. Csipak Levente, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
8. Türi Erik, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
9. Pletikoszity Árpád, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **dicséret**
10. Kiss Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **dicséret**
11. Patarica Ildikó, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**
12. Zita Renáta, Szárits János Műszaki Középiskola, Szabadka, **dicséret**

11. évfolyam

1. Szilágyi Dániel, Jovan Jovanović Gimnázium, Újvidék, **I. díj**
2. Horti Krisztina, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Bíró Dominik, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Tokity Rudolf, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
5. Mátéffy Kristóf, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
6. Major Kristóf, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **dicséret**

12. évfolyam

1. Balzam Henrietta, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Skultéti Anikó, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
3. Pletikoszity Johanna, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **dicséret**
4. Bakos Evelin, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **dicséret**
5. Gyorgyevics Elvira, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Koll., Zenta, **dicséret**
6. Ördög Emese, Becsei Gimnázium, Óbecse, **dicséret**

FELADAT TÍPUSOK

Számok számjegyei: I/9/1, III/9/4, III/12/1, IV/9/2, IV/10/2, V/9/2, VI/9/3, VI/11/2, VII/8/2, VII/8/3, VII/10/2, VIII/9/2, X/7/3, X/10/4
Halmazok: I/9/2, VI/9/1, VII/9/1
Számelmélet: I/9/3, I/12/5, II/9/1, II/9/2, II/10/1, II/12/1, II/12/2, III/9/4, III/10/2, III/10/3, III/10/5, III/11/4, III/12/1, V/9/2, V/9/3, V/10/3, V/11/3, VI/9/2, VI/9/3, VI/11/2, VII/8/3, VIII/8/3, VIII/10/1, VIII/11/1, IX/8/3, IX/10/2, X/8/2, X/9/3, X/10/1
Geometria – háromszög: I/9/4, I/9/5, I/10/4, I/11/3, I/11/4, II/9/5, II/10/1, II/11/4, II/12/5, III/9/1, III/9/3, III/10/4, III/11/2, III/12/5, IV/9/3, V/12/4, VII/8/4, VII/9/4, VIII/8/4, VIII/9/3, VIII/10/3, IX/12/1, X/7/2, X/8/3, X/12/3
Skatulya-elv: I/10/1, III/9/2,
Szélsőérték: I/10/2, II/10/3, II/12/1, IV/12/2, VII/12/4, IX/12/4,
Geometria – húrnégyszög, érintőnégyszög: I/10/3, I/12/3, II/10/3, VII/11/3, VIII/12/3, IX/10/3,
Egyenlőtlenség, egyenlőtlenség-rendszer: I/10/5, II/9/3, II/10/2, II/11/2, II/11/3, III/9/1, III/10/1, III/11/1, IV/10/3, V/12/2, VII/10/4, VIII/10/1
Egyenlet, egyenletrendszer: I/11/2, I/12/1, II/9/1, II/10/1, II/10/4, II/11/1, II/12/1, IV/9/1, IV/10/1, IV/11/2, IV/11/3, IV/12/3, V/10/2, V/11/2, VI/10/2, VI/11/2, VI/11/3, VI/12/3, VII/11/4, VII/12/2, VIII/8/3, VIII/12/1, IX/7/4, IX/11/2, IX/12/1, X/7/4, X/8/2, X/9/3, X/10/2, X/11/2, X/12/1
Függvények: I/11/1, II/12/1, V/9/3, V/12/3, X/11/1, X/12/4
Trigonometria: I/11/4, II/10/5, II/11/5, IV/11/3, IV/12/3, VI/12/3, VII/11/3, VII/12/1, VIII/11/1, IX/11/2, IX/12/1, X/11/4
Számtani és mértani sorozatok: I/12/2, II/10/5, II/12/5, III/12/3, IV/12/4, VIII/12/4, IX/12/3
Logikai feladat, gráfok: III/9/2, III/11/3, III/12/2, IV/9/1, IV/10/1, V/9/1, V/11/1, V/12/1, VI/9/1, VI/11/1, VI/12/1, VII/8/1, VII/9/1, VII/10/1, VII/11/1, VII/12/1, VIII/8/1, VIII/8/2, VIII/9/1, VIII/10/1, IX/7/2, IX/8/1, IX/8/2, IX/9/3, IX/9/4, X/7/1, X/7/4, X/9/1, X/9/4,
Geometria – kocka, tetraéder, gúla: I/11/5, I/12/4, II/11/5, III/11/1, IV/11/4, VI/11/4, IX/12/4, X/11/3
Geometria – sokszög: III/11/5, X/9/2
Sorozatok: III/12/4, IX/7/2
Területszámítás, területlefedés: III/12/4, IX/8/4
Algebrai átalakítás: II/10/4, IV/9/4, IV/11/1, V/10/2, VII/12/4, VIII/12/4, IX/10/4, X/12/1
Geometria – körök, érintők: IV/10/4, V/10/4, VII/10/3, IX/10/3, X/10/3
Analitikus geometria: IV/12/1, VII/12/3,
Geometria – gömb: IV/12/2
Geometria – téglalap, paralelogramma: V/9/4, VI/9/4, VI/9/4, IX/9/2
Térfogatszámítás: V/11/4, VI/12/4, IX/11/4, X/11/3
Összeszámlálási problémák: II/9/4, II/12/4, VI/9/3, VII/9/3, IX/7/1, IX/7/3
Számtani és mértani közép: VIII/11/4, IX/8/2,
Komplex számok: IX/10/4

FEKETE MIHÁLY (1886-1957)

Fekete Mihály 1886. július 19-én született Zentán. Eredeti családi neve *Schwarz* volt. Elemi és középiskolai tanulmányainak befejezése után a budapesti és a göttingai egyetemeken tanult matematikát. Az egyetem elvégzése után mint tehetséges matematikus *Beke Manó* professzor tanszékére került. Pár évi tanársegédi működés után a Tanácsköztársaság alatti magatartása miatt állásától megfosztották, sőt még a Matematikai és Fizikai Társulat is törölte tagjai sorából. Ezután középiskolai tanárként működött. Először a budapesti Nagymező utcai polgári iskolában kapott állást. Ebben az iskolában 1919-ig, majd igen rövid ideig a Váci utcai és a Práter utcai leánygimnáziumban tanított, ám innen is elbocsátották. 1925-től a budapesti izraelita hitközség fiúgimnáziumának tanára lett, egészen 1928-ig, amikor két egyetemtől is kapott professzori meghívást. Ő a Jeruzsálemi Egyetem matematika tanszékének meghívását fogadta el, amelynek később dékánja is volt. A meghívást *Hadamard* és *Landau* is szorgalmazta, mert jól ismerték és nagyra értékelték *Fekete Mihály* munkásságát. *Fekete Mihály* a Jeruzsálemi Egyetem tanára volt elhunytáig.

„*Fekete Mihályt* sajnos személyesen nem ismerhettem. Volt tanítványai, ismerősei, barátai, elsősorban *Bálint Elemér* elbeszélései alapján azonban olyan kép rajzolódott elém, amely azt mutatta, hogy *Fekete Mihály* nemcsak kiváló és tehetséges matematikus volt, hanem igen jó pedagógus, nagyszerű előadó is. Egyénisége pedig, emberi jó tulajdonságai miatt, mindenki számára, aki ismerte, rendkívül megnyerő volt. *Fekete Mihály* egyike volt *Fejér Lipót* azon tanítványainak, akik matematikai munkásságukkal nagy elismerést szereztek maguknak. Több dolgozatából kitűnik, hogy tanárától, *Fejér Lipóttól* kapott indítékot egy-egy probléma vizsgálatához. *Fekete Mihály* legjelentősebb és egyben legismertebb eredményei a ponthalmazok elmélete, az algebra és a komplex függvénytan határterületéhez tartoznak. Igen értékes és szép eredményeket ért el azonban a Fourier-sorok elméletében, a divergens sorok szummációjában, az interpoláció-elméletben és a matematikusi pályája kezdetén a számelméletben is" – írta róla *Balázs János* a Matematikai Lapokban, 1958-ban.

Rátz László matematikatanár javaslatára, *Fekete Mihály* volt Budapesten a gimnazista *Neumann János* egyik magántanára. Még az érettségi előtt a zseniális ifjú *Neumann* (18 éves korában) tehetséges tanárával, Fekete Mihállyal, közösen írt és jelentetett meg tudományos dolgozatot. A *Neumann Jánossal* közösen írt dolgozata *Fekete Mihály* irodalmi működésének 11. évében jelent meg, s ez a 19. publikált tanulmánya. A megjelenés idején, 1922-ben, *Neumann János* már Berlinben egyetemi hallgató volt. Az 1922. évi nyomdába küldést megerősíti az a tény is, hogy a tanulmány bevezetőjében Fejér Lipót 1922. évi egyik cikkére is hivatkoznak. *Fejér Lipót* egy problémáját az ún. Fekete-féle pontok segítségével oldotta meg. Egyébként *Fekete Mihály* magányos alkotó volt, csak néhány esetben közölt közös cikket *Szegő Gáborral*, *C. E. Win*-nel és *J. L. Walshsel*. *Neumann*-nal nem publikált több közös művet. Azonban Neumann két esetben is általánosította *Fekete* tételeit.

Fekete Mihály 1957. május 13-án hunyt el Jeruzsálemben.

Irodalom

1. Természet Világa, Neumann-emlékszám, 134. évf. 2003. III. különszám
2. Filep László:*A Bolyaiaktól Erdős Pálig,* Nyári Akadémia, Szabadka, 2003. augusztus 4.
3. Sain Márton, *Matematikatörténeti ABC,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
4. Balázs János, *Fekete Mihály munkásságáról,* Matematikai Lapok, 1958. 3-4. sz.

A NEMZETKÖZI MAGYAR MATEMATIKAVERSENYEK TÖRTÉNETE

„A magyar irodalom ötágú síp, összehangolhatatlan. Eléri még vajon a mi nemzedékünk, hogy egy jó munka mind e nemcsak külön-külön, de másként szóló sípot egyszer ismét összehangolja, illetve az eldugulástól megmenti?" (Illyés Gyula)

Az 1991. évi jubileumi szegedi Rátz László Vándorgyűlésen vetődött fel először – *Bencze Mihály* brassói és *Oláh György* komáromi matematikatanárok részéről – olyan középiskolai matematikaverseny szervezésének gondolata, amely lehetőséget ad arra, hogy a Kárpát-medence magyar anyanyelvű diákjai összemérhessék tudásukat. Elképzelésüket talán *Dsida Jenő* Psalmus Hungaricus című versének soraival lehetne leginkább jellemezni, amelyek refrénként térnek vissza a versenyeken:

„Elindulok, mint egykor Csoma Sándor,
hogy felkutassak minden egy magyart.
Székelyek, ott a bércek szikla-mellén,
üljetek mellém!
Magyarok ott a Tisza partján,
magyarok ott a Duna partján,
magyarok ott a tót hegyek közt
s a bácskai szőlőhegyek közt,
üljetek mellém!"

Az elhatározást tett követte. Az ötágú-sokágú síp Illyés-i szellemében, a nagyon hiányzó jó munka elvégzésének reményében került megrendezésre 1992-től a Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, évente 200-300 Kárpát-medence-i magyarajkú diák és tanár részvételével. Létrejöttét és hagyománnyá válását a régióvezetők áldozatos munkája tette lehetővé: a Délvidéken *Szabó Magdáé*, Erdélyben *Bencze Mihályé*, a Felvidéken *Oláh Györgyé és Keszégh Istváné*, Kárpátalján *Elek Ernőé*, *Neubauer Ferencé és Balázsi Borbáláé*, Magyarországon *Urbán Jánosé* és *Pintér Ferencé*. A versenyek eddigi helyszínei: Komárom (1992), Vác (1993), Ungvár (1994), Paks (1995), Székelyudvarhely (1996), Kaposvár (1997), Szabadka (1998), Debrecen (1999), Dunaszerdahely (2000), Nagykanizsa (2001), Sepsiszentgyörgy (2002), Eger (2003), Nagydobrony (2004), Miskolc (2005), Zenta (2006), Szeged (2007), Kassa (2008), Gyula (2009), Szatmárnémeti (2010), Bonyhád (2011), Kecskemét (2012), Győr (2013).

E rangos nemzetközi megmérettetést három fontos tényező mozgatja és köti össze: az anyanyelv, a matematika szeretete és tisztelete, valamint a találkozókon születő vagy megerősödő barátság. A Nemzetközi Magyar Matematikai Verseny lehetőséget ad az egységes magyar matematikai nyelv megteremtésére, a szabadidős programjának szerves részét képező kirándulás pedig alkalmat ad a különböző országok magyarlakta tájainak, kultúrájának, történelmének és szokásainak megismerésére.

Az első rendezvényen, melynek színhelye Észak- és Dél-Komárom volt, *Reimann Istvánnak*, a zsűri elnökének zárószavai a következők voltak: *„A két helyszín közötti Duna-hídon naponta többször is átkelve éreztük igazán, hogy ez a híd úgy kapcsolhat össze embereket és országokat, ahogyan azt a jövő Európájában elképzeljük."*

Az immár húsz éve megrendezésre kerülő verseny valóban országokat és embereket köt össze, s erősen hisszük, hogy *„Csak művelt nemzet tarthatja fenn magát Európa népei között, tehát a nemzet jövője kulturális előre haladásától függ."*(*Eötvös József*)