A FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY MÁSODIK ÉVTIZEDE

BOLYAI TEHETSÉGGONDOZÓ
GIMNÁZIUM ÉS KOLLÉGIUM
ZENTA, 2023

Szerkesztette: dr. Ágó Krisztina

A feladatokat válogatták és lektorálták:
dr. Ágó Krisztina
Béres Zoltán
mgr. Csikós Pajor Gizella
Gyorgyevics Anikó
dr. Péics Hajnalka
dr. Ripcó Sipos Elvira
Sárkány Rita
Szabó Magdolna
Tóth Gabriella
Zavargó Zsuzsanna

CIP - Каталогизација у публикацији
Библиотеке Матице српске, Нови Сад

51(079.1)

A FEKETE Mihály emlékverseny második évtizede [Elektronski izvor] / [szerkesztette Ágó Krisztina]. - Zenta : Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, 2023

Način pristupa (URL): http://bolyai-zenta.edu.rs/pages/kiadvanyok/Fekete_Mihaly_2.pdf. - Nasl. sa naslovnog ekrana. - Opis izvora dana: 28. 11. 2023.

ISBN 978-86-917345-3-4

a) Математика -- Задаци

COBISS.SR-ID 131452169

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETŐ

A Fekete Mihály Emlékverseny második évtizedének döntős feladatsorait tartja kezében illetve olvassa a képernyőjén a kedves olvasó.

Ez a verseny az egyetlen vajdasági szervezésű és szintű matematikaverseny, amelyen magyarul tudó diákok vehetnek részt. A tanulók összemérhetik tudásukat társaikkal és ezáltal is felkészülhetnek hazai és nemzetközi matematikaversenyekre. A verseny egyben a Nemzetközi Magyar Matematikaverseny válogatóversenye. A legjobb versenyzők alkotják azt a csapatot, amely a vajdasági magyarságot képviseli ezen a megmérettetésen. A verseny háromfordulós: a két levelező fordulót a legjobbak megméretéseként egy zárthelyi rendszerű, feladatkidolgozós forduló, a döntő követi, amelyre általában november végén, december elején kerül sor. A döntőben a versenyzőknek 120 perc alatt kell négy feladatot megoldaniuk. A 2013 és 2022 között megrendezett döntők feladatsorait és megoldásait tartalmazza ez a kiadvány.

A Fekete Mihály Emlékversenyt 2003 óta rendezik meg. Az elsőt az Észak-bácskai Magyar Pedagógusok Egyesületének égisze alatt szervezte Szabó Magda matematikatanár. A verseny ezután átköltözött Szabadkáról Zentára, az újonnan megalakuló Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium helyiségeibe. Ekkor vált a Gimnázium a hivatalos szervezőjévé a Bolyai Farkas Alapítvány közreműködésével. A versenybizottság elnöke közel 20 évig dr. Péics Hajnalka volt, majd 2021-ben dr. Ágó Krisztina vette át a stafétát. Kezdetben a Verseny csak a középiskolás diákokat szólította meg, de 2009-től a nyolcadikosokat, 2011-től a hetedikeseket, 2014-től pedig az ötödikeseket és hatodikosokat is bevonta. Ezzel a bővítéssel a döntő résztvevőinek a száma a százat is meghaladja. Az Emlékverseny nem csak versenyzésre ad alkalmat, hanem barátkozásra és új ismeretek szerzésére is.

Ezúton szeretnénk köszönetet mondani mindazoknak, akik az elmúlt tíz évben támogattak bennünket, ezek pedig a következők voltak: elsősorban a Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, ahol minden évben zökkenőmentesen megszervezhettük a versenyt, köszönettel tartuzunk továbbá az Ingenium Alapítványnak, a Szekeres László Alapítványnak, a Magyar Nemzeti Tanácsnak, a Zentai Önkormányzatnak, a Tartományi Oktatási Titkárságnak, a Tartományi Sport és Ifjúsági titkárságnak az anyagi segítségért, valamint a Szegedi Egyetem Bolyai Intézetének és a Kárpát-medencei Tehetségkutató Alapítványnak a felajánlott könyv- és ajándékkcsomagokért.

Reméljük, hogy a kiadványnak hasznát veszik úgy a tanulók, mint a felkészítő tanárok. Szívügyünknek tekintjük a verseny sorsát. Nagyon örülünk, hogy az első tíz év versenyeit tartalmazó kötet után sikerül megörökítenünk a verseny második évtizedét is, és bízunk benne, hogy ez a hagyomány tovább folytatódik a jövőben is.

2023 novembere

a szerzők

A XI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Megbeszélés a verseny előtt.

XI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2013. november 30.

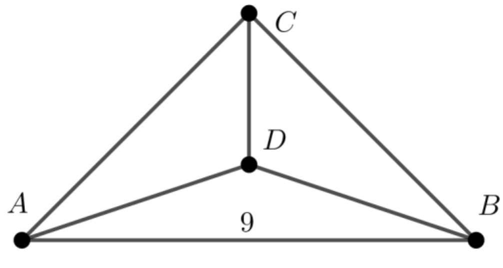
7. évfolyam

1. Amikor iskolánk 2000 méteres futóversenyének győztese átszakítja a célszalagot, Mari 200 méterrel, Bözsi 290 méterrel van mögötte. Ha mindkét lány eddigi átlagsebességének megfelelő egyenletes sebességgel fut tovább, akkor Mari célba érkezésekor hány méterrel lesz mögötte Bözsi?

2. Az ABC háromszög B csúcsánál lévő szög $121°$-os, míg a C csúcsánál lévő szög $31°$-os. Az A csúcsból bocsássunk merőlegest a BC oldalegyenesre, és az így kapott metszéspontot nevezzük T-nek. Az A csúcsnál lévő belső szög szögfelezője a BC oldalt a D pontban metszi. Mutassuk meg, hogy $|AT|=|TD|$.

3. Egy négyfordulós matematikaverseny első fordulójából a tanulók 25%-a, a második fordulóból a versenyben maradt tanulók egyharmada, a döntőbe pedig ezek fele jutott tovább. Ha az első fordulóból a versenyzők egyharmada, onnan tovább a 25%-uk, majd a döntőbe ezek fele jutott volna be, akkor a verseny folyamán 24 dolgozattal kellett volna többet javítani. Hány tanuló indult a versenyen?

4. Az A, B, C és D pontokat az ábrán látható módon vonalakkal kötöttük össze, majd mind a négy pontot és mind a 6 vonalat a következő számokkal jelöltük: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 és 11 (a 10-est kihagytuk). Mindegyik számot pontosan egyszer használtuk fel. Bármelyik két pontban levő számok összege egyenlő az adott két pontot összekötő vonalon levő számmal. Az AB vonalon a 9 -es szám van (lásd az ábrát). Melyik számmal van jelölve a CD vonal?



A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2013. november 30.

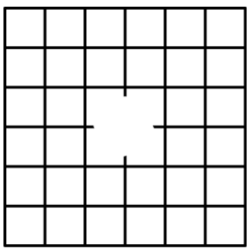
8. évfolyam

1. Egy négyfordulós matematikaverseny első fordulójából a tanulók 25%-a, a második fordulóból a versenyben maradt tanulók egyharmada, a döntőbe pedig ezek fele jutott tovább. Ha az első fordulóból a versenyzők egyharmada, onnan tovább a 25%-uk, majd a döntőbe ezek fele jutott volna be, akkor a verseny folyamán 24 dolgozattal kellett volna többet javítani. Hány tanuló indult a versenyen?

2. A Csupa-Csoki belga édességboltba 10 különleges csokidesszerttel megrakott doboz érkezett. Minden dobozba ugyanannyi darab csokidesszertet csomagoltak, de mindegyikbe különböző fajtát. Az eladó az első dobozból eladott valamennyi csokidesszertet, a másodikból kétszer annyit, mint az elsőből, a harmadik dobozból háromszor annyit, mint az elsőből, és így tovább, a tizedik dobozból tízszer annyit, mint az elsőből. Ekkor a tizedik dobozban csak egy csokidesszert maradt, a dobozokban pedig összesen 370 darab. Hány csokidesszert volt a dobozokban a vásárlás előtt?

3. Az ábrán látható $12\ cm$ átmérőjű körben a szürke tartományt olyan félkörívek határolják melyek sugarainak mérőszáma egész szám. Határozd meg a szürke és a fehér tartomány területének arányát!

4. Az ábrán látható négyzetrács közepe kilyukadt. Hányféleképpen tudnál elhelyezni 6 bábút az épen maradt négyzetekre úgy, hogy minden sorban, minden oszlopban és mindkét átlóban pontosan egy legyen?



A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

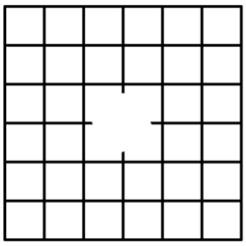
XI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2013. november 30.

9. évfolyam

1. A Csupa-Csoki belga édességboltba 10 különleges csokidesszerttel megrakott doboz érkezett. Minden dobozba ugyanannyi darab csokidesszertet csomagoltak, de mindegyikbe különböző fajtát. Az eladó az első dobozból eladott valamennyi csokidesszertet, a másodikból kétszer annyit, mint az elsőből, a harmadik dobozból háromszor annyit, mint az elsőből, és így tovább, a tizedik dobozból tízszer annyit, mint az elsőből. Ekkor a tizedik dobozban csak egy csokidesszert maradt, a dobozokban pedig összesen 370 darab. Hány csokidesszert volt a dobozokban a vásárlás előtt?

2. Mici Mackó felírt a táblára három különböző számjegyet. Azt a feladatot adta Malackának, hogy az első két számot szorozza össze, a szorzatot pedig ossza el a harmadikkal. Malacka nagy buzgalmában felcserélte a műveleteket, ezért a helyes 16 eredmény helyett a második számot kapta. Mely számokat írta fel Mici Mackó a táblára?

3. Az ábrán látható négyzetrács közepe kilyukadt. Hányféleképpen tudnál elhelyezni 6 bábút az épen maradt négyzetekre úgy, hogy minden sorban, minden oszlopban és mindkét átlóban pontosan egy legyen?



4. Az ABC derékszögű háromszögben az átfogó hossza $20\,cm$. A háromszög beírt körének r és köréírt körének R sugara úgy aránylanak egymáshoz, mint $2:5$. Számold ki a háromszög kerületét és területét!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2013. november 30.

10. évfolyam

1. Anna egy piros, egy fehér és egy zöld színű dobókockával játszott. Feldobta a kockákat, majd a következő eljárással számolta ki a dobás pontértékét: a piros kockával dobott számot megszorozta 5-tel, majd hozzáadta a fehér kockával dobott számot. Az így kapott eredményt megszorozta 10-zel, majd hozzáadta a zöld kockával dobott számot. A kapott eredmény lett a dobás pontértéke.
a) Egy alkalommal a dobás pontértéke 276 volt. Melyik kockával hányat dobott ekkor Anna?
b) Egy alkalommal a piros, fehér és zöld kockával dobott számok ebben a sorrendben egymást követő egész számok voltak. Kaphatott-e ilyen dobássorozat esetén pontértékre prímszámot? Hány esetben?

2. Az $ABCD$ téglalap oldalai $AB = 18\ cm$, $AD = 6\ cm$. A téglalap AB oldalára, mint ámérőre kört rajzoltunk, amely a téglalap AC átlóját a P pontban, BD átlóját pedig a Q pontban metszi. Számítsd ki az $ABPQ$ trapéz területét!

3. Egy 1-es, egy 2-es, egy 5-ös és n darab 4-es mindegyikének felhasználásával képeztük az összes $n+3$ jegyű számot. Ha tudjuk, hogy a kapott számok között 4-gyel oszthatóból 60-nal több van mint 5-tel oszthatóból, akkor mennyi n értéke?

4. Add meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszer megoldáshalmazát:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = xy, \qquad 2xy + x + y = \frac{36}{5}.$$

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2013. november 30.

11. évfolyam

1. Az ABC háromszög BC oldalán O egy olyan kör középpontja, amely az AB oldalt N pontban, AC oldalt M pontban érinti. Bizonyítsd be, hogy a BM, a CN és az ABC háromszög A csúcsához tartozó magasságvonal egy közös pontban metszik egymást!

2. Legyenek az α, β, γ olyan szögek, hogy $\beta = \alpha + 60°$, $\gamma = \beta + 60°$. Igazold, hogy a $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{tg}\gamma + \mathrm{tg}\gamma \cdot \mathrm{tg}\alpha$ kifejezés értéke egész szám!

3. Igazold, hogy $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2014} + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2014}$ pozitív egész szám, és add meg a szám utolsó számjegyét!

4. Oldd meg a valós számok halmazán az $x^{\log_2 3} + 3^{\log_2 \sqrt{x}} = 12$ egyenletet!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2013. november 30.

12. évfolyam

1. A 2013 szám olyan, hogy a 0, 1, 2,…, 9 számjegyek közül négy szomszédos alkotja (nevezetesen a 0, 1, 2 és 3) valamilyen sorrendben.
a) Hány olyan négyjegyű szám van, amelyet négy szomszédos számjegy alkot valamilyen sorrendben?
b) Ha az összes ilyen számot összeadjuk, hányas szám áll az összegben az egyesek helyén?

2. Oldd meg a valós számok halmazán az $x^{\log_2 3} + 3^{\log_2 \sqrt{x}} = 12$ egyenletet!

3. Bizonyítsd be, hogy a húrnégyszög köré írt kör bármely P pontjának a húrnégyszög két szemközti oldalától mért távolságának a szorzata egyenlő a másik két oldaltól mért távolságok szorzatával!

4. A hét törpe elhatározza, hogy Mikuláskor megajándékozzák egymást. Mindegyikük nevét felírják egy cetlire, és mindegyikük húz egy nevet. A sorsolást akkor nevezzük jónak, ha senki sem húzza a saját nevét. Hány jó sorsolás lehetséges?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

A XI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

7. évfolyam

1. Amikor iskolánk 2000 méteres futóversenyének győztese átszakítja a célszalagot, Mari 200 méterrel, Bözsi 290 méterrel van mögötte. Ha mindkét lány eddigi átlagsebességének megfelelő egyenletes sebességgel fut tovább, akkor Mari célba érkezésekor hány méterrel lesz mögötte Bözsi?

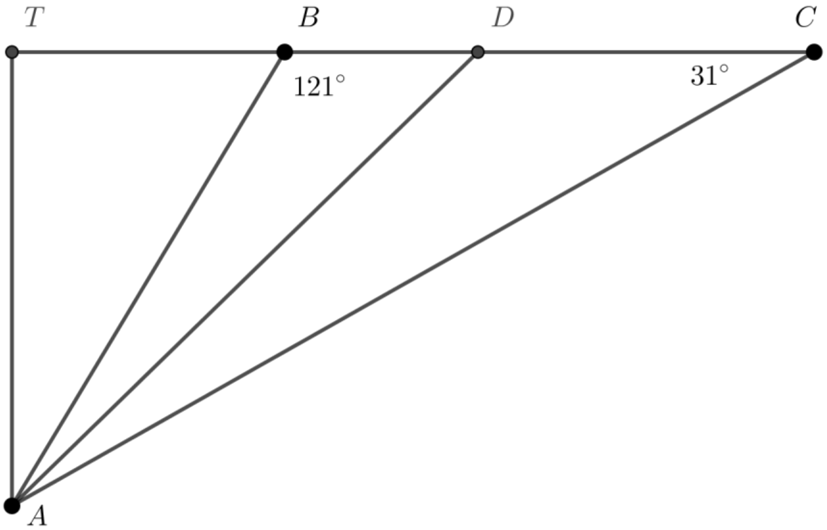
Megoldás. A győztes célba érkezésének pillanatában amíg Mari 1800 métert tett meg, addig Bözsi 1710 métert. Mennyit tesz meg Bözsi, mire Mari célba ér? Egyenes arányossággal megkapjuk a választ:

$$1800:1710=2000:x,$$

ahonnan $x=1900$, azaz Bözsi 100 méterrel lesz lemaradva.

2. Az ABC háromszög B csúcsánál lévő szög $121°$-os, míg a C csúcsánál lévő szög $31°$-os. Az A csúcsból bocsássunk merőlegest a BC oldalegyenesre, és az így kapott metszéspontot nevezzük T-nek. Az A csúcsnál lévő belső szög szögfelezője a BC oldalt a D pontban metszi. Mutassuk meg, hogy $|AT|=|TD|$.

Megoldás. Az állítás bizonyításához elég megmutatni, hogy $ADT\angle=45°$, mert akkor az ADT derékszögű háromszög egyenlő szárú, amiből következik az állítás.



Az $ABC\triangle$ belső szögeinek összege $180°$, így $BAC\angle=180°-121°-31°=28°$. Mivel AD szögfelező, így $DAB\angle=14°$. A belső szögek összege miatt az ADB háromszögben $ADB\angle=180°-121°-14°=45°$, és ebből következik az állítás, hogy $ADT\angle=45°$, azaz $|AT|=|TD|$.

3. Egy négyfordulós matematikaverseny első fordulójából a tanulók 25%-a, a második fordulóból a versenyben maradt tanulók egyharmada, a döntőbe pedig ezek fele jutott tovább. Ha az első fordulóból a versenyzők egyharmada, onnan tovább a 25%-uk, majd a döntőbe ezek fele jutott volna be, akkor a verseny folyamán 24 dolgozattal kellett volna többet javítani. Hány tanuló indult a versenyen?

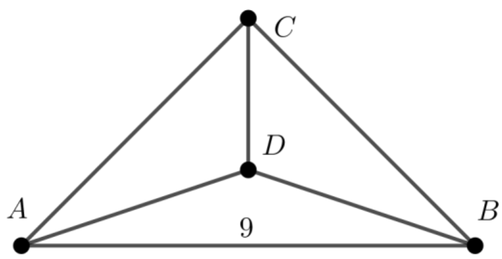
Megoldás. Legyen a versenyzők száma *n*. Készítsünk táblázatot!

Forduló	Versenyzők száma I. eset	Versenyzők száma II. eset
1.	n	n
2.	$\frac{n}{4}$	$\frac{n}{3}$
3.	$\frac{n}{4}\cdot\frac{1}{3}$	$\frac{n}{3}\cdot\frac{1}{4}$
4.	$\frac{n}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{n}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$

Vegyük észre, hogy csak a második fordulóban van eltérés a versenyzők számában. Mivel a második esetben 24-gyel több dolgozat van: $\frac{n}{3}-\frac{n}{4}=24$, azaz $n=288$.

4. Az A, B, C és D pontokat az ábrán látható módon vonalakkal kötöttük össze, majd mind a négy pontot és mind a 6 vonalat a következő számokkal jelöltük: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 és 11 (a 10-est kihagytuk). Mindegyik számot pontosan egyszer használtuk fel. Bármelyik két pontban levő számok összege egyenlő az adott két pontot összekötő vonalon levő számmal. Az AB vonalon a 9-es szám van (lásd az ábrát). Melyik számmal van jelölve a CD vonal?

Megoldás. Az egy pontra illeszkedő vonalakra írt három különböző szám mindegyike nagyobb a pontra írt számnál. Ezek szerint sem a 8-as, sem a 11-es nem kerülhet pontra, mert nincs a felsorolt számok között náluk nagyobb három különböző szám, így a 8-as és a 11-es is kizárólag vonalra kerülhet.
Az 1-es szám nem kerülhet a 9-cel jelzett vonal egyik végpontjába sem, mert akkor a másikban csak 8-as lehetne, márpedig a 8-ast vonalra kell írnunk (az imént levezettük). Írjuk az 1-est a C pontba. A 11-es vonalra kerül, de nem olyanra, amelynek egyik végén 1-es van, mert akkor a másik végén 10-esnek kellene lenni, ilyen szám pedig nincs. Írjuk hát a 11-est a BD vonalra.



Most keressünk helyet a 2-esnek. Csak pontra kerülhet, mert „vonalszámnak” kicsi. A 2-es nem kerülhet a 11-es vonal egyik végére sem, mert akkor a másikra 9-es kerülne, ezt a számot viszont már rögzítettük egy vonalhoz. Ezek szerint a 2-es csak az A pontba kerülhet. Innentől már egyértelműen következik a számok beírása: $9-2=7$-es a B pontba, $7+1=8$-as a BC vonalra, $2+1=3$-as az AC vonalra, $11-7=4$-es a D pontra, $4+2=6$-os az AD vonalra, és $4+1=5$-ös a CD vonalra.
A fenti eljárás során csak az 1-es és a 11-es helyét választhattuk volna meg másként, de abban az esetben is 5-ös került volna a CD vonalra, és a kapott tetraéderek a hozzárendelt számokkal együtt egymásba vihetők lettek volna.

8. évfolyam

1. Egy négyfordulós matematikaverseny első fordulójából a tanulók 25%-a, a második fordulóból a versenyben maradt tanulók egyharmada, a döntőbe pedig ezek fele jutott tovább. Ha az első fordulóból a versenyzők egyharmada, onnan tovább a 25%-uk, majd a döntőbe ezek fele jutott volna be, akkor a verseny folyamán 24 dolgozattal kellett volna többet javítani. Hány tanuló indult a versenyen?

Megoldás. Legyen a versenyzők száma *n*. Készítsünk táblázatot:

Forduló	Versenyzők száma I. eset	Versenyzők száma II. eset
1.	n	n
2.	$\frac{n}{4}$	$\frac{n}{3}$
3.	$\frac{n}{4}\cdot\frac{1}{3}$	$\frac{n}{3}\cdot\frac{1}{4}$
4.	$\frac{n}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{n}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$

Vegyük észre, hogy csak a második fordulóban van eltérés a versenyzők számában. Mivel a második esetben 24-gyel több dolgozat van: $\frac{n}{3}-\frac{n}{4}=24$, azaz $n=288$.

2. A Csupa-Csoki belga édességboltba 10 különleges csokidesszerttel megrakott doboz érkezett. Minden dobozba ugyanannyi darab csokidesszertet csomagoltak, de mindegyikbe különböző fajtát. Az eladó az első dobozból eladott valamennyi csokidesszertet, a másodikból kétszer annyit, mint az elsőből, a harmadik dobozból háromszor annyit, mint az elsőből, és így tovább, a tizedik dobozból tízszer annyit, mint az elsőből. Ekkor a tizedik dobozban csak egy csokidesszert maradt, a dobozokban pedig összesen 370 darab. Hány csokidesszert volt a dobozokban a vásárlás előtt?

Megoldás. A dobozokból rendre x, $2x$, $3x$, ... , $9x$ és $10x$ csokidesszertet adtak el. A tizedik dobozból $10x$ csokidesszertet adtak el és egy maradt benne, azaz ebben a dobozban $10x+1$ csokidesszert volt összesen. Mivel minden dobozban ugyanannyi desszert volt, így összesen $10(10x+1)$ darab desszert érkezett a boltba, amelyből eladtak $55x$ darabot, s így maradt még 370 darab. Ekkor

$$10(10x+1)=55x+370,$$

amelyből adódik, hogy

$$100x-55x=370-10, \text{ azaz } 45x=360,$$

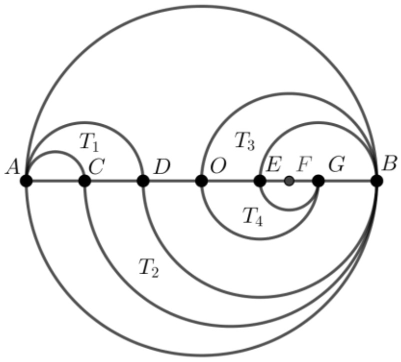
vagyis $x=8$. Ebből megtudtuk, hogy egy-egy dobozba $10x+1=10\cdot 8+1=81$ csokidesszertet csomagoltak, tehát minden dobozban ennyi volt a vásárlás előtt.

3. Az ábrán látható $12\,cm$ átmérőjű körben a szürke tartományt olyan félkörívek határolják melyek sugarainak mérőszáma egész szám. Határozd meg a szürke és a fehér tartomány területének arányát!

Megoldás. A szürkével jelölt területet osszuk fel 4 részre, az ábrán látható módon. Mivel a sugarak mérőszámai egész számok, meghatározható, hogy

$\overline{AC} = 2, \overline{AD} = 4, \overline{CB} = 10, \overline{DB} = 8, \overline{OB} = 6, \overline{EB} = 4, \overline{EG} = 2.$

Minden terület egy nagyobb és egy kisebb félkör területének különbségével egyenlő.



$$T_1 = T_4 = \frac{4\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$T_2 = \frac{25\pi}{2} - \frac{16\pi}{2} = \frac{9\pi}{2}$$

$$T_3 = \frac{9\pi}{2} - \frac{4\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

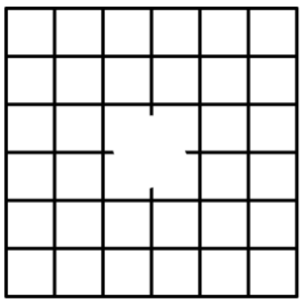
A szürke területet jelöljük T_{sz}-szel a fehéret pedig T_f-fel.

$$T_{sz} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 10\pi$$

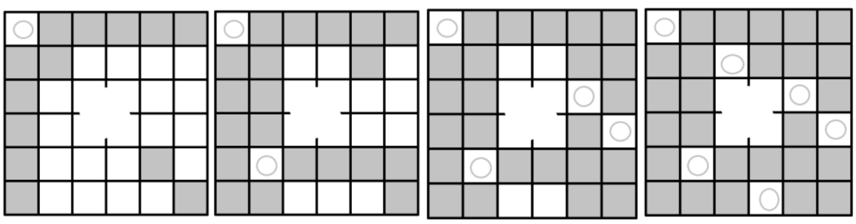
$$T_f = 36\pi - T_{sz} = 26\pi$$

Arányuk: $\dfrac{T_f}{T_{sz}} = \dfrac{26\pi}{10\pi} = \dfrac{13}{5}.$

4. Az ábrán látható négyzetrács közepe kilyukadt. Hányféleképpen tudnál elhelyezni 6 bábút az épen maradt négyzetekre úgy, hogy minden sorban, minden oszlopban és mindkét átlóban pontosan egy legyen?



Megoldás. Először helyezzünk el egy bábút a bal felső sarokból induló átlón. Ezt négyféleképpen tehetjük meg. Ezzel a lépéssel egy sorba és egy oszlopba is került bábú, így az ábrán látható módon, a satírozott négyzetekre már nem helyezhetünk másikat. A másik átlóra már csak kétféleképpen helyezhetünk bábút. A harmadik sorban két lehetőségünk van, de a negyedikben így már nem választhatunk. Ugyanez a helyzet a második és a hatodik sorban is.



Összesen tehát $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ féleképpen helyezhetjük el a 6 bábút.

9. évfolyam

1. A Csupa-Csoki belga édességboltba 10 különleges csokidesszerttel megrakott doboz érkezett. Minden dobozba ugyanannyi darab csokidesszertet csomagoltak, de mindegyikbe különböző fajtát. Az eladó az első dobozból eladott valamennyi csokidesszertet, a másodikból kétszer annyit, mint az elsőből, a harmadik dobozból háromszor annyit, mint az elsőből, és így tovább, a tizedik dobozból tízszer annyit, mint az elsőből. Ekkor a tizedik dobozban csak egy csokidesszert maradt, a dobozokban pedig összesen 370 darab. Hány csokidesszert volt a dobozokban a vásárlás előtt?

Megoldás. A dobozokból rendre x, $2x$, $3x$, ... , $9x$ és $10x$ csokidesszertet adtak el. A tizedik dobozból $10x$ csokidesszertet adtak el és egy maradt benne, azaz ebben a dobozban $10x+1$ csokidesszert volt összesen. Mivel minden dobozban ugyanannyi desszert volt, így összesen $10(10x+1)$ darab desszert érkezett a boltba, amelyből eladtak $55x$ darabot, s így maradt még 370 darab. Ekkor

$$10(10x+1)=55x+370,$$

amelyből adódik, hogy

$$100x-55x=370-10, \text{ azaz } 45x=360,$$

vagyis $x=8$. Ebből megtudtuk, hogy egy-egy dobozba $10x+1=10\cdot 8+1=81$ csokidesszertet csomagoltak, tehát minden dobozban ennyi volt a vásárlás előtt.

2. Mici Mackó felírt a táblára három különböző számjegyet. Azt a feladatot adta Malackának, hogy az első két számot szorozza össze, a szorzatot pedig ossza el a harmadikkal. Malacka nagy buzgalmában felcserélte a műveleteket, ezért a helyes 16 eredmény helyett a második számot kapta. Mely számokat írta fel Mici Mackó a táblára?

Megoldás. Legyen a táblára felírt három szám x, y és z. Ekkor

$$\frac{xy}{z}=16 \text{ és } \frac{x}{y}\cdot z=y.$$

Érvényes, és az első egyenlőségből kifejezve z-t és behelyettesítve a második egyenlőségbe adódik, hogy

$$z=\frac{xy}{16} \text{ és } \frac{x^2y}{16}=y, \text{ amelyből } x^2=16y.$$

Az utolsó egyenlőségből látjuk, hogy y négyzetszám, lehetséges értékei tehát 1, 4, 9.

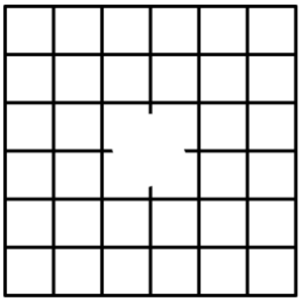
$y=1$ esetén $x=4$ és $z=\frac{1}{4}$, ami nem lehetséges.

$y=4$ esetén $x=8$ és $z=2$, ami lehetséges megoldás.

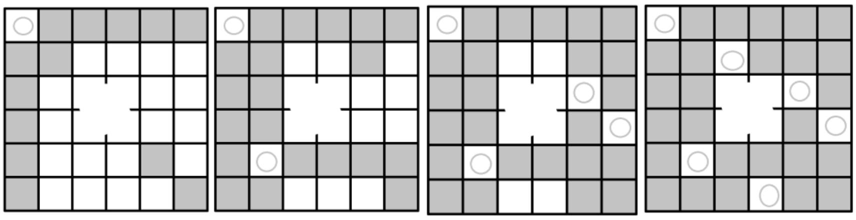
$y=9$ esetén $x=12$ és $z=\frac{27}{4}$, ami nem lehetséges.

A táblára felírt számok tehát 8, 4 és 2.

3. Az ábrán látható négyzetrács közepe kilyukadt. Hányféleképpen tudnál elhelyezni 6 bábút az épen maradt négyzetekre úgy, hogy minden sorban, minden oszlopban és mindkét átlóban pontosan egy legyen?



Megoldás. Először helyezzünk el egy bábút a bal felső sarokból induló átlón. Ezt négyféleképpen tehetjük meg. Ezzel a lépéssel egy sorba és egy oszlopba is került bábú, így az ábrán látható módon, a satírozott négyzetekre már nem helyezhetünk másikat. A másik átlóra már csak kétféleképpen helyezhetünk bábút. A harmadik sorban két lehetőségünk van, de a negyedikben így már nem választhatunk. Ugyanez a helyzet a második és a hatodik sorban is.



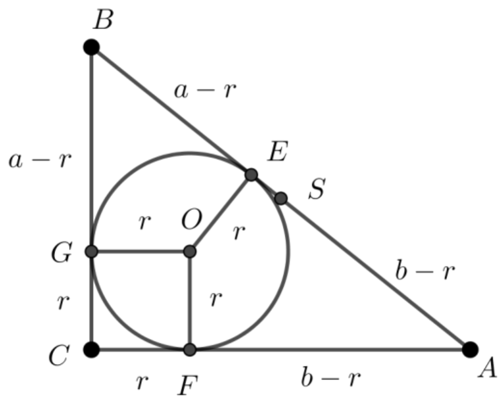
Összesen tehát $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ féleképpen helyezhetjük el a 6 bábút.

4. Az ABC derékszögű háromszögben az átfogó hossza 20 cm. A háromszög beírt körének r és köréírt körének R sugara úgy aránylanak egymáshoz, mint $2:5$. Számold ki a háromszög kerületét és területét!

Megoldás. Jelölje O az ABC háromszög beírt körének, S pedig a háromszög köréírt körének középpontját. Legyenek E, F és G, rendre, az O pontból a háromszög BC, AC és AB oldalaira állított merőleges egyenesek talppontjai. Ekkor érvényesek a következők: $|AC| = b$, $|BC| = a$, $|AB| = c = 20$ cm,
$|CF| = |CE| = |ED| = |DF| = r$, $|AF| = |AG| = b - r$, $|BE| = |BG| = a - r$.

A derékszögű háromszög sajátosságából következik, hogy $R = \dfrac{c}{2} = 10$ cm.

Az $r : R = 2 : 5$ arányból kapjuk, hogy $r = 4$ cm.
Továbbá igaz, hogy $|AB| = |AG| + |GB| = b - r + a - r = 20$, ezért innen
$a + b = 20 + 2r = 28$ cm.



A háromszög kerülete így $K = (a + b) + c = 28 + 20 = 48$ cm.
Mivel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ és $a^2 + b^2 = c^2$, ezért $2ab = (a+b)^2 - c^2$, illetve $2ab = 384$, azaz $ab = 192$.
A ABC háromszög területe tehát $T = \dfrac{ab}{2} = \dfrac{192}{2} = 96\text{ cm}^2$.

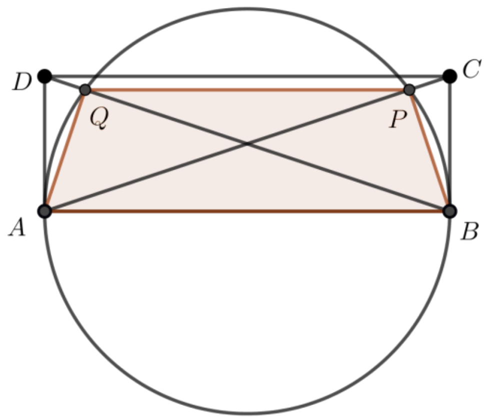
10. évfolyam

1. Anna egy piros, egy fehér és egy zöld színű dobókockával játszott. Feldobta a kockákat, majd a következő eljárással számolta ki a dobás pontértékét: a piros kockával dobott számot megszorozta 5-tel, majd hozzáadta a fehér kockával dobott számot. Az így kapott eredményt megszorozta 10-zel, majd hozzáadta a zöld kockával dobott számot. A kapott eredmény lett a dobás pontértéke.
a) Egy alkalommal a dobás pontértéke 276 volt. Melyik kockával hányat dobott ekkor Anna?
b) Egy alkalommal a piros, fehér és zöld kockával dobott számok ebben a sorrendben egymást követő egész számok voltak. Kaphatott-e ilyen dobássorozat esetén pontértékre prímszámot? Hány esetben?

Megoldás. a) Ha $(5p+f)\cdot 10+z=276$, akkor csak $z=6$ lehetséges, és ekkor $5p+f=27$, ahonnan csak $f=2$ és $p=5$ lehetséges. A piros kockával tehát 5-öt, a fehérrel 2-t a zölddel pedig 6-ot kellet dobnia.
b) A feltételekből az következik, hogy $f=p+1,\ z=p+2$ és $p\le 4$. Ekkor a dobott pontérték $(5p+p+1)\cdot 10+p+2=61p+12$. Ez páros p esetén páros szám, ami nem lehet prím, tehát p csak páratlan szám lehet, 1 vagy 3. Ha $p=1$ akkor $61p+12=73$, ami prímszám. Ha $p=3$ akkor $61p+12=195$, ami összetett szám. Így csak egy dobásban, $p=1,\ f=2,\ z=3$ esetén kapunk a pontértékre prímszámot.

2. Az $ABCD$ téglalap oldalai $|AB|=18cm$, $|AD|=6cm$. A téglalap AB oldalára, mint átmérőre kört rajzoltunk, amely a téglalap AC átlóját a P pontban, BD átlóját pedig a Q pontban metszi. Számítsd ki az $ABPQ$ trapéz területét!

Megoldás. A trapéz átlói $|AC|=|BD|=\sqrt{18^2+6^2}=6\sqrt{10}$. Az APB háromszög derékszögű, mert $APB\angle$ átmérőn fekvő kerületi szög. Legyen $|AP|=x$, ekkor $|PC|=6\sqrt{10}-x$. A $|BP|^2=18^2-x^2$ és $|BP|^2=6^2-\left(6\sqrt{10}-x\right)^2$ összefüggésekből következik, hogy $x=\frac{54}{\sqrt{10}}$, ebből pedig $|BP|=\frac{18}{\sqrt{10}}$. A trapéz h magasságára az APB derékszögű háromszög területéből következik, hogy $18\cdot h=\frac{54}{\sqrt{10}}\cdot\frac{18}{\sqrt{10}}$, ahonnan $h=\frac{54}{10}$. Legyen T a trapéz P csúcsából bocsátott h magasság talppontja az AB alapon. Ekkor Pitagorasz tételéből $|TB|=\frac{9}{5}$, ahonnan a trapéz rövidebb alapja $|PQ|=18-2\cdot\frac{9}{5}=\frac{72}{5}$. Így a trapéz



keresett területe $T=\frac{|AB|+|PQ|}{2}\cdot h=\frac{18+\frac{72}{5}}{2}\cdot\frac{54}{10}=\frac{8748}{100}=87,48\ cm^2$.

3. Egy 1-es, egy 2-es, egy 5-ös és n darab 4-es mindegyikének felhasználásával képeztük az összes $n+3$ jegyű számot. Ha tudjuk, hogy a kapott számok között 4-gyel oszthatóból 60-nal több van mint 5-tel oszthatóból, akkor mennyi n értéke?

Megoldás. Adott tehát a következő $n+3$ darab számjegy: 1, 2, 5, 4, 4, 4,..., 4, (n darab 4-es). Ezek közül 5-tel oszthatóak azok és csakis azok, amelyek utolsó számjegye 5. Ezekből pedig

$$\frac{(n+2)!}{n!}=(n+1)(n+2)$$

van. 4-gyel azok oszthatóak, amelyek utolsó két jegye 12, 52, 24 vagy 44. A 12-re és 52-re végződőek száma egyaránt $\frac{(n+1)!}{n!}=n+1$. A 24-re végződőek száma $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=n(n+1)$, míg a 44-re végződőek száma $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}=(n+1)n(n-1)$. Így összesen $2(n+1)+n(n+1)+(n+1)n(n-1)$ néggyel osztható szám képezhető. A feltétel szerint ezek száma 60-nal több mint az 5-tel oszthatóaké, vagyis

$$2(n+1)+n(n+1)+(n+1)n(n-1)-60=(n+1)(n+2).$$

Innen

$$(n+1)(n+2)+(n+1)n(n-1)=60+(n+1)(n+2),$$

ahonnan

$$(n+1)n(n-1)=60,$$

vagyis a 60-at kell három egymást követő pozitív szám szorzatára bontani. Mivel $60=5\cdot4\cdot3$, így $n=4$ a megoldás, azaz 4 darab 4-es kell legyen a számok között.

4. Add meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszer megoldáshalmazát:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=xy,\qquad 2xy+x+y=\frac{36}{5}.$$

Megoldás. Az egyenlet értelmezett, ha $x\neq0$ és $x\neq-1$.

Rendezés után az első egyenlet $\frac{1+x}{x+1}=xy$, vagyis $1=xy$ alakot ölt, ahonnan $y=\frac{1}{x}$.

Ezt a második egyenletbe helyettesítve az $5x^2-26x+5=0$ másodfokú egyenletet kapjuk.

Ennek megoldásai $x_{1/2}=\frac{26\pm\sqrt{676-100}}{10}=\frac{26\pm24}{10}$, illetve $x_1=\frac{1}{5}$ és $x_2=5$, s ezek elfogadható értékek az $x-$re. Ekkor $y_1=5$ és $y_2=\frac{1}{5}$.

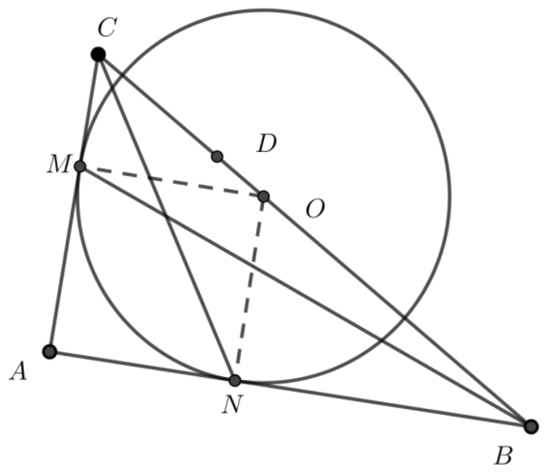
Az $\left(\frac{1}{5},5\right)$ és az $\left(5,\frac{1}{5}\right)$ számpárok kielégítik az adott egyenletrendszert.

Így a keresett megoldáshalmaz $M=\left\{\left(\frac{1}{5},5\right),\left(5,\frac{1}{5}\right)\right\}$.

11. évfolyam

1. Az ABC háromszög BC oldalán O egy olyan kör középpontja, amely az AB oldalt N pontban, AC oldalt M pontban érinti. Bizonyítsd be, hogy a BM, a CN és az ABC háromszög A csúcsához tartozó magasságvonal egy közös pontban metszik egymást!

Megoldás. Legyen AD az ABC háromszög A csúcsához tartozó magasságvonala. Igazolni kell, hogy BM, CN, AD egyenesek egy pontban metszik egymást. Felhasználljuk a Ceva-tételt, az oldalakon keletkezett szakaszok arányát keressük: $\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}\cdot\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}}$, ha ez 1, akkor bebizonyítottuk. Mivel a BON és BAD derékszögű háromszögnek van egy közös hegyesszögük, akkor ezek hasonló háromszögek, $BON\Delta\sim BAD\Delta$, tehát oldalaik arányosak $\frac{\overline{BD}}{\overline{NB}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{NO}}$, ugyanígy $ADC\Delta\sim OMC\Delta$, ahonnan $\frac{\overline{CM}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{OM}}{\overline{AD}}$. A kör sugarai egybevágóak, azaz $|OM|\cong|ON|$ és a körre húzott érintőszakaszok is, tehát $|AN|\cong|AM|$. Ezeket behelyettesítve adódik, hogy



$$\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}\cdot\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{NB}}\cdot\frac{\overline{CM}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{NO}}\cdot\frac{\overline{OM}}{\overline{AD}}=1.$$

2. Legyenek az α, β, γ olyan szögek, hogy $\beta=\alpha+60°$, $\gamma=\beta+60°$. Igazold, hogy a $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma+\mathrm{tg}\gamma\cdot\mathrm{tg}\alpha$ kifejezés értéke egész szám!

Megoldás. Legyen $\mathrm{tg}\alpha=t$. Ekkor

$$\mathrm{tg}\beta=\mathrm{tg}\left(\alpha+60°\right)=\frac{t+\sqrt{3}}{1-t\sqrt{3}} \text{ és } \mathrm{tg}\gamma=\mathrm{tg}\left(\alpha+120°\right)=\frac{t-\sqrt{3}}{1+t\sqrt{3}},$$

ezért behelyettesítve

$$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma+\mathrm{tg}\gamma\cdot\mathrm{tg}\alpha=$$
$$=t\cdot\frac{t+\sqrt{3}}{1-t\sqrt{3}}+\frac{t+\sqrt{3}}{1-t\sqrt{3}}\cdot\frac{t-\sqrt{3}}{1+t\sqrt{3}}+\frac{t-\sqrt{3}}{1+t\sqrt{3}}\cdot t=\frac{t^2+t\sqrt{3}}{1-t\sqrt{3}}+\frac{t^2-3}{1-3t^2}+\frac{t^2-t\sqrt{3}}{1+t\sqrt{3}}=$$
$$=\frac{\left(1+t\sqrt{3}\right)\cdot\left(t^2+t\sqrt{3}\right)+t^2-3+\left(1-t\sqrt{3}\right)\cdot\left(t^2-t\sqrt{3}\right)}{1-3t^2}=$$
$$=\frac{t^2+t^3\sqrt{3}+t\sqrt{3}+3t^2+t^2-3+t^2-t^3\sqrt{3}-t\sqrt{3}+3t^2}{1-3t^2}=\frac{9t^2-3}{1-3t^2}=\frac{3\cdot\left(3t^2-1\right)}{1-3t^2}=-3.$$

3. Igazold, hogy $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2014}+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2014}$ pozitív egész szám, és add meg a szám utolsó számjegyét!

Megoldás. Vizsgáljuk meg az $a_n=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2n}+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2n}$ kifejezést. Ekkor

$$a_0=2,\ \ a_1=10,\qquad a_n=\left(5+2\sqrt{6}\right)^n+\left(5-2\sqrt{6}\right)^n$$

$$a_{n+1}=\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(5+2\sqrt{6}\right)^n+\left(5-2\sqrt{6}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)^n=5\cdot a_n+2\sqrt{6}\left(\left(5+2\sqrt{6}\right)^n-\left(5-2\sqrt{6}\right)^n\right)$$

$$a_{n+2}=\left(49+20\sqrt{6}\right)\left(5+2\sqrt{6}\right)^n+\left(49-20\sqrt{6}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)^n=$$

$$=49\cdot a_n+20\sqrt{6}\cdot\left(\left(5+2\sqrt{6}\right)^n-\left(5-2\sqrt{6}\right)^n\right)=50\cdot a_n+20\sqrt{6}\cdot\left(\left(5+2\sqrt{6}\right)^n-\left(5-2\sqrt{6}\right)^n\right)-a_n=$$

$$=10\cdot a_{n+1}-a_n$$

$$a_2=98,\ \ a_3=970,\quad a_4=9602,\ \ .....$$

A rekurziós képlet szerint a sorozat minden tagja egész szám, tehát a_{1007} is egész szám, az utolsó számjegy négyes periódussal ismétlődik, $2,\ 0,\ 8,\ 0,\ 2,\ 0,\ 8,\ 0,\ldots$ Ezért a_{1007} utolsó számjegye 0 lesz.

4. Oldd meg a valós számok halmazán az $x^{\log_2 3}+3^{\log_2\sqrt{x}}=12$ egyenletet!

Megoldás. Ha $x>0$, pozitív, akkor mindegyik logaritmus és hatvány értelmezett. Mivel

$$3^{\log_2\sqrt{x}}=3^{\frac{1}{2}\log_2 x}=\sqrt{3^{\log_2 x}}\ ,$$

valamint

$$\log_2 x^{\log_2 3}=\log_2 3\cdot\log_2 x=\log_2 3^{\log_2 x}\ ,$$

érvényes, innen következik $x^{\log_2 3}=3^{\log_2 x}$.

Ennek alapján, ha bevezetjük a $t=\sqrt{3^{\log_2 x}}$ helyettesítést, akkor a $t^2+t-12=0$ egyenlet megoldásait keressük, amelyek $t_1=-4<0$ és $t_2=3$.

A negatív megoldást nem vesszük figyelembe, így $\sqrt{3^{\log_2 x}}=3$ következik, vagyis

$$3^{\log_2 x}=9\ ,$$

amelyből

$$\log_2 x=2\ ,$$

a megoldás pedig $x=4$.

12. évfolyam

1. A 2013 **szám olyan, hogy a** 0**,** 1**,** 2**,…,** 9 **számjegyek közül négy szomszédos alkotja (nevezetesen a** 0**,** 1**,** 2 **és** 3**) valamilyen sorrendben.**
a) Hány olyan négyjegyű szám van, amelyet négy szomszédos számjegy alkot valamilyen sorrendben?
b) Ha az összes ilyen számot összeadjuk, hányas szám áll az összegben az egyesek helyén?

Megoldás. a) A lehetséges négyjegyű számok a következő számjegyeket tartalmazzák: $0, 1, 2, 3$ vagy $1, 2, 3, 4$ vagy $2, 3, 4, 5$ vagy $3, 4, 5, 6$ vagy… vagy $6, 7, 8, 9$. Az első esetben a négy számjegyből 18, a többi esetben pedig 24 négyjegyű szám képezhető. Ezek mind különbözők és köztük van az összes keresett szám, tehát $18+6\cdot 24=162$ darab ilyen szám van.
b) Próbáljuk meg a 162 darab számot végződéseik szerint csoportosítani. A $0, 1, 2, 3$ számjegyekből képzett négyjegyű számok közül 6 darab végződik 0-ra (ezek összege is 0-ra végződik), 4 darab végződik 1-esre (ezek összege 4-esre végződik), 4 darab 2-esre (8) és 4 darab 3-asra (2). A zárójelben lévő számok összegeinek utolsó számjegye 4. Tehát a $0, 1, 2, 3$ számjegyekből képzett számok összegének utolsó számjegye 4. A gondolatmenetet folytatva kitölthetjük a táblázatot.

számjegyek	utolsó számjegy	darab	az összeg utolsó számjegye
$0, 1, 2, 3$	0 1 2 3	6 4 4 4	0 4 8 2 összesen: 4
$1, 2, 3, 4$	1 2 3 4	6 6 6 6	6 2 8 4 összesen: 0
$2, 3, 4, 5$	2 3 4 5	6 6 6 6	2 8 4 0 összesen: 4
$3, 4, 5, 6$	3 4 5 6	6 6 6 6	8 4 0 6 összesen: 8
$4, 5, 6, 7$		24	$4, 0, 6, 2$ összesen: 2
$5, 6, 7, 8$		24	$0, 6, 2, 8$ összesen: 6
$6, 7, 8, 9$		24	$6, 2, 8, 4$ összesen: 0

A $4+0+4+8+2+6+0$ összeg utolsó számjegye a 4.

2. Oldd meg a valós számok halmazán az $x^{\log_2 3}+3^{\log_2 \sqrt{x}}=12$ **egyenletet!**

Megoldás. Ha $x>0$, pozitív, akkor mindegyik logaritmus és hatvány értelmezett. Mivel

$$3^{\log_2 \sqrt{x}}=3^{\frac{1}{2}\log_2 x}=\sqrt{3^{\log_2 x}},$$

valamint

$$\log_2 x^{\log_2 3} = \log_2 3 \cdot \log_2 x = \log_2 3^{\log_2 x},$$

érvényes, innen következik $x^{\log_2 3} = 3^{\log_2 x}$.

Ennek alapján, ha bevezetjük a $t = \sqrt{3^{\log_2 x}}$ helyettesítést, akkor a $t^2 + t - 12 = 0$ egyenlet megoldásait keressük, amelyek $t_1 = -4 < 0$ és $t_2 = 3$.

A negatív megoldást nem vesszük figyelembe, így $\sqrt{3^{\log_2 x}} = 3$ következik, vagyis

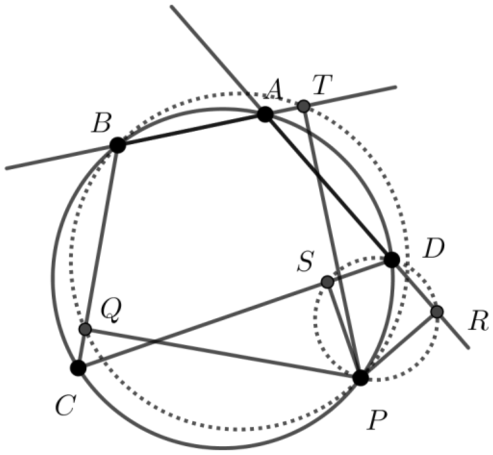
$$3^{\log_2 x} = 9,$$

amelyből

$$\log_2 x = 2,$$

a megoldás pedig $x = 4$.

3. Bizonyítsd be, hogy a húrnégyszög köré írt kör bármely P pontjának a húrnégyszög két szemközti oldalától mért távolságának a szorzata egyenlő a másik két oldaltól mért távolságok szorzatával!



Megoldás. Az $ABCD$ húrnégyszög köré írt körének egy tetszőleges pontja a P pont és ebből húzott merőlegesek talppontjai T, Q, R, S rendre az AB, BC, CD és DA oldalakra. A $PRDS$ négyszög húrnégyszög, mert a két szemközti szög az $S\angle = 90° = R\angle$. Tehát az azonos húrokhoz tartozó kerületi szögek egyenlők és ezek a $PRS\angle = PDS\angle = \varphi = PDC\angle = PBC\angle$.

Hasonlóan a $PTBQ$ négyszög is húrnégyszög és $PBQ\angle = PTQ\angle = \varphi$, valamint ha $PQT\angle = \varepsilon$, akkor a $PBT\angle = \varepsilon$.

A feltétel szerint $ABCD$ húrnégyszög és $ADC\angle = \mu$, ennek alapján a B és D csúcsoknál levő belső szögek összege $180° = \varepsilon + \varphi + \mu$, és így a D csúcsnál levő egyenesszöget alkotó harmadik szögre igaz, hogy $PDR\angle = \varepsilon$.

Korábban láttuk, hogy a $PRDS$ négyszög húrnégyszög, ezért $PDR\angle = PSR\angle = \varepsilon$.

A PRS és PTQ háromszögekben tehát két-két szög páronként egyenlő, vagyis a két háromszög hasonló, így a megfelelő oldalak aránya egyenlő.

Eszerint $\dfrac{\overline{PS}}{\overline{PR}} = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{PT}}$, ahonnan $\overline{PS} \cdot \overline{PT} = \overline{PR} \cdot \overline{PQ}$ azonnal következik.

4. A hét törpe elhatározza, hogy Mikuláskor megajándékozzák egymást. Mindegyikük nevét felírják egy cetlire, és mindegyikük húz egy nevet. A sorsolást akkor nevezzük jónak, ha senki sem húzza a saját nevét. Hány jó sorsolás lehetséges?

I. megoldás. Képzeljük el, hogy megpróbáljuk leültetni a 7 törpét néhány asztalhoz úgy, hogy mindenki mellé jobbról ültessük azt, akinek a nevét húzza. Hányféleképpen lehet őket leültetni úgy, hogy senki nem ül magában? Két ülésrend akkor különböző, ha valakinek más a jobb oldali szomszédja.

Ha egyetlen asztalhoz ülnek le, akkor ezt $6! = 720$-féle módon tehetik meg.

Ha egy négy- és háromfős asztalhoz ülnek, akkor $\binom{7}{3}\cdot 3!\cdot 2! = 35\cdot 6\cdot 2 = 420$ lehetőség adódik.

Ha viszont egy háromfős és kétfős asztaltársaság alakul, akkor $\frac{1}{2}\cdot\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1! = 210$ lehetőség van.

Még egy eset lehetséges, ha egy ötfős és egy kétfős asztalt használunk. Ekkor a lehetőségek száma $\binom{7}{5}\cdot 4!\cdot 1! = 504$.

Az összes lehetőségek száma ezek összege azaz $720+420+210+504=1854$.

II. megoldás. Szitaformulával is megoldhatjuk:

$$7!-7\cdot 6!+\binom{7}{2}\cdot 5!-\binom{7}{3}\cdot 4!+\binom{7}{4}\cdot 3!-\binom{7}{5}\cdot 2!+\binom{7}{1}\cdot 6!-\binom{7}{7}\cdot 0! =$$
$$= 2520-840+210-42+7-1=1854.$$

A XI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

7. évfolyam

1. Nagy Kinga, Kizúr István Általános Iskola, Szabadka, **I. díj**
2. Apró János, Október 10. Általános Iskola, Szabadka, **I. díj**
3. Sztarek Norbert, Október 10. Általános Iskola, Szabadka, **II. díj**
4. Rúzsa Ákos, November 11. Általános Iskola, Zenta, **II. díj**
5. Szögi Roland, Kis Ferenc Általános Iskola, Orom, **III. díj**

8. évfolyam

1. Pilisi Réka, Október 10. Általános Iskola, Horgos, **I. díj**
2. Csizmadija Klaudia, Majsai Úti Általános Iskola, Szabadka, **II. díj**
3. Fenyvesi Janka, November 11. Általános Iskola, Zenta, **III. díj**
4. Nagy Gy. János, Petőfi Sándor Általános Iskola, Hajdújárás, **III. díj**
5. Bellér Roland, Petőfi Sándor Általános Iskola, Hajdújárás, **III. díj**
6. Fekecs Andrea, Október 18. Általános Iskola, Zentagunaras, **III. díj**

9. évfolyam

1. Fenyvesi Abigél, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Szögi Evelin, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
3. Lelik Márk, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **II. díj**
4. Farkas Krisztián, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **II. díj**
5. Szilly Emma, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **II. díj**
6. Toldi Teodóra, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
7. Tomik Nikola, Dositej Obradović Gimnázium, Topolya, **III díj**
8. Szalaji Natália, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**
9. Fodor Ádám, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

10. évfolyam

1. Terhes Balázs, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Dobó Márk, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
3. Juhász Bence, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Horti Katalin, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
5. Szkocsovszki Zsolt, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
6. Huszár Lídia, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**
7. Mucsi Edina, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
8. Apró Alekszandra, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

11. évfolyam

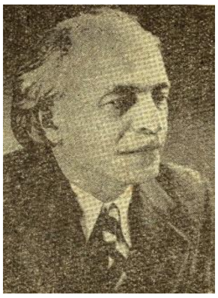
1. Téglás Ervin, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Szilágyi Krisztina, Jovan Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék, **II. díj**
3. Csipak Levente, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Kanalas Dávid, Matematikai Gimnázium, Belgrád, **III. díj**

12. évfolyam

1. Bíró Dominik, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Horti Krisztina, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Tokity Rudolf, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
4. Illés Miklós, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**

A XII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

A versenybizottság néhány tagja és a szurkoló közönség.



XII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2014. december 6.

5. évfolyam

1. Három szám összege 2014. Az első szám négyszerese a másodiknak, a második szám 14-gyel nagyobb, mint a harmadik. Melyik ez a három szám?

2. Tíz számkártyára felírtuk a természetes számokat 1-től 10-ig, mindegyikre különbözőt. Anna, Balázs, Csaba, Dénes és Éva húzott 2-2 számkártyát. A rajtuk lévő számokat összeadták, és a következő eredményeket kapták: Anna 17-et, Balázs 7-et, Csaba 4-et, Dénes 16-ot és Éva 11-et. Milyen kártyákat húztak a gyerekek külön-külön?

3. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 és 7 számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával – belőlük számokat alkotva, műveleti jeleket használva, ha kell zárójeleket is – állítsd elő a 100-at! Írj nyolc megoldást!

4. Hogyan lehet feldarabolni egy négyzetet 7, 8 és 10 kisebb (nem feltétlenül azonos méretű) négyzetre?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2014. december 6.

6. évfolyam

1. Hány olyan háromjegyű szám van, amelyben a páros számjegyek száma páratlan?

2. Egy könyv oldalait megszámoztuk 1-gyel kezdve és 2014-gyel bezárólag. Számozás közben hányszor írtuk le az 1-es számjegyet?

3. A „*MATEK*” szó minden betűjének megfeleltetünk egy számjegyet. A számjegyekre igazak a következők:

$$M + A + T + E + K = 21,$$
$$M + A + T = 12,$$
$$A \cdot T = 21,$$
$$T + E = 8,$$
$$K : M = 2.$$

Melyik ötjegyű számot rejti a „*MATEK*” szó?

4. Egy kocka minden lapját pirosra vagy kékre festhetjük. Hány különböző kockát tudunk így készíteni, ha csak azokat a kockákat tekintjük különbözőnek, amelyeket elmozgatással nem lehet fedésbe hozni?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2014. december 6.

7. évfolyam

1. Peti és édesapja életkorának összege 41. Peti 17 év múlva feleannyi idős lesz mint édesapja, és 14 év múlva feleannyi, mint édesanyja. Hány évesek a családtagok most?

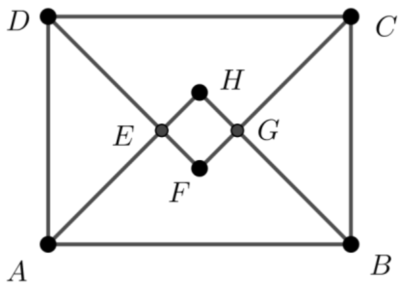
2. A „*MATEK*” szó minden betűjének megfeleltetünk egy számjegyet. A számjegyekre igazak a következők:

$$M+A+T+E+K=21,$$
$$M+A+T=12,$$
$$A\cdot T=21,$$
$$T+E=8,$$
$$K:M=2.$$

Melyik ötjegyű számot rejti a „*MATEK*” szó?

3. A 2015 olyan szám, amely osztható 5-tel és a számjegyeinek a szorzata 0. Hány ilyen négyjegyű szám van?

4. Az $ABCD$ téglalap szomszédos oldalainak hossza $8\,cm$ és $6\,cm$. A belső szögfelezőinek metszéspontjai az E, F, G, H pontok (lásd az ábrán). Mekkora az FH szakasz hossza?



A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

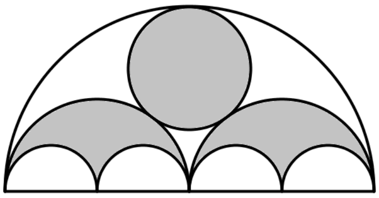
XII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2014. december 6.

8. évfolyam

1. András 40 másodperc alatt kerekezett végig egy kört a versenypályán. Balázs ugyanakkor és ugyanonnan indulva, de ellenkező irányba kerekezve 15 másodpercenként találkozott Andrással. Hány másodperc alatt tesz meg Balázs egy kört? (Mindketten egyenletes sebességgel bicikliztek.)

2. Határozd meg a satírozott terület nagyságát, ha ismert, hogy a kis félkörök sugara $1\,cm$!



3. Egy hatjegyű szám számjegyei 1, 2, 3, 4, 5 és 6. Az első két számjegyből álló szám páros. Az első három számjegyből álló szám osztható hárommal, az első négy számjegyből álló néggyel, az első ötből álló öttel, maga a szám pedig hattal. Melyik ez a szám?

4. Pisti felírta a táblára a számokat 1-től 12-ig. Ferivel a következő játékot játsszák: Felváltva letörölnek a tábláról két számot, és a letörölt számok helyett fölírják a két szám összegénél 1-gyel kisebb számot. A játék addig tart, amíg egyetlen egy szám marad a táblán. Ha ez a szám páros, akkor Pisti nyert, ha páratlan, akkor Feri. Hogyan játsszon Pisti, ha ő kezd, és mindenképpen nyerni szeretne Feri bármilyen „törlései” mellett?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2014. december 6.

9. évfolyam

1. Pisti felírta a táblára a számokat 1-től 12-ig. Ferivel a következő játékot játsszák: Felváltva letörölnek a tábláról két számot, és a letörölt számok helyett fölírják a két szám összegénél 1-gyel kisebb számot. A játék addig tart, amíg egyetlen egy szám marad a táblán. Ha ez a szám páros, akkor Pisti nyert, ha páratlan, akkor Feri. Hogyan játsszon Pisti, ha ő kezd, és mindenképpen nyerni szeretne Feri bármilyen „törlései" mellett?

2. A szirakúzai Hieron király 16 font aranyat és 4 font ezüstöt utalt ki az udvari ötvösnek, hogy ebből készítsen neki koronát. (A font a tömeg egy mértékegysége.) A kész korona tömege pontosan 20 font volt, a király mégis gyanút fogott, hogy a derék ötvös a kiutalt arany egy részét ezüsttel pótolta. A dolog kivizsgálásával a híres ókori tudóst, Arkhimédészt bízta meg, aki megmérte a koronát vízben és megállapította, hogy a korona vízben $1\frac{1}{4}$ fontot veszített a tömegéből. Mivel Arkhimédész tudta, hogy 20 font arany vízben 1 fontot, 21 font ezüst vízben pedig 2 fontot veszít a tömegéből, így kiszámolta, hogy az arany egy részét valóban ezüsttel pótolták.
A kiutalt aranyból hány fontot helyettesített az udvari ötvös ezüsttel?

3. Az $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^2 \cdot 5^1 \cdot 6^1 \cdot 7^2 \cdot 8^3 \cdot 9^2 \cdot 10^1$ szorzat eredményére András az 1053455154300, Andrea az 1053455154600 számot kapta. Melyik lehet közülük a helyes?

4. Legyen F az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja! Rajzold meg az AC, illetve BC oldalakra kifelé az $ACPQ$, illetve $BCSR$ négyzeteket! Bizonyítsd be, hogy $PS = 2CF$.

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2014. december 6.

10. évfolyam

1. Egy kétjegyű szám jegyei közé egy nullát írtunk. A kapott háromjegyű szám és az eredeti kétjegyű szám számtani közepe az eredeti kétjegyű szám fordítottjával egyenlő. Melyik kétjegyű számról van szó?

2. A szirakúzai Hieron király 16 font aranyat és 4 font ezüstöt utalt ki az udvari ötvösnek, hogy ebből készítsen neki koronát. (A font a tömeg egy mértékegysége.) A kész korona tömege pontosan 20 font volt, a király mégis gyanút fogott, hogy a derék ötvös a kiutalt arany egy részét ezüsttel pótolta. A dolog kivizsgálásával a híres ókori tudóst, Arkhimédészt bízta meg, aki megmérte a koronát vízben és megállapította, hogy a korona vízben $1\frac{1}{4}$ fontot veszített a tömegéből. Mivel Arkhimédész tudta, hogy 20 font arany vízben 1 fontot, 21 font ezüst vízben pedig 2 fontot veszít a tömegéből, így kiszámolta, hogy az arany egy részét valóban ezüsttel pótolták.
A kiutalt aranyból hány fontot helyettesített az udvari ötvös ezüsttel?

3. Egy szabályos háromszög oldalaira kifelé négyzeteket írtunk, majd egy olyan kört szerkesztettünk, amely áthalad a négyzeteknek a háromszög csúcsaitól különböző csúcsain. Mekkora a háromszög oldala, ha a kör sugara *r*?

4. 229 db papírlap közül néhányat kettévágunk, majd a meglevő összes papírlap közül kétszer annyit, mint előbb újra kettévágunk. Ezután az eljárást valahányszor megismételjük. Hány lapot vágtunk ketté legelőször, ha legvégül 2014 db papírlap keletkezett?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2014. december 6.

11. évfolyam

1. Határozd meg mindazokat a k, m, n természetes számokat, amelyekre $2^k + 10^m - 10^n = 2014$.

2. Oldd meg a valós számok halmazán a $\dfrac{\sin x + \mathrm{tg} x}{\cos x + \mathrm{ctg} x} > 0$ **egyenlőtlenséget!**

3. Legyenek B' és C' az ABC háromszög B és C csúcsainak merőleges vetületei a háromszög szemközti oldalára. Bizonyítsd be, hogy az A csúcsból a $B'C'$ egyenesre húzott merőleges tartalmazza a háromszög körülírt körének középpontját!

4. Állítsd elő az

$$S = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{1}{2013^2}+\frac{1}{2014^2}}$$

összeget $S = \dfrac{p}{q}$ **alakban, ahol** $p, q \in N$ **és** p, q **relatív prímek!**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2014. december 6.

12. évfolyam

1. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sqrt{\log_{0,04} x+1}+\sqrt{\log_{0,2} x+3}=1\,.$$

2. Oldd meg a valós számok halmazán a $\dfrac{\sin x+\mathrm{tg}x}{\cos x+\mathrm{ctg}x}>0$ **egyenlőtlenséget!**

3. Igazold, hogy bármely téglatest V **térfogata és** F **felszíne között fennáll a** $216V^2\le F^3$ **egyenlőtlenség! Mikor állhat fenn egyenlőség?**

4. Állítsd elő az

$$S=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{2013^2}+\frac{1}{2014^2}}$$

összeget $S=\dfrac{p}{q}$ **alakban, ahol** $p,q\in N$ **és** p,q **relatív prímek!**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

A XII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

5. évfolyam

1. Három szám összege 2014. Az első szám négyszerese a másodiknak, a második szám 14-gyel nagyobb, mint a harmadik. Melyik ez a három szám?

Megoldás. Ha a harmadik számot a-val jelöljük, akkor a szöveg alapján a második szám $a+14$, az első szám pedig $(a+14)+(a+14)+(a+14)+(a+14)$. Ebből következik: $(4\cdot a+4\cdot 14)+(a+14)+a=2014$. Vagyis a három szám összege $6a+70$. Mivel ez 2014, ezért $6a=1944$, vagyis $a=324$. Ebből következik, hogy a három szám: 1352, 338 és 324.

2. Tíz számkártyára felírtuk a természetes számokat 1-től 10-ig, mindegyikre különbözőt. Anna, Balázs, Csaba, Dénes és Éva húzott 2-2 számkártyát. A rajtuk lévő számokat összeadták, és a következő eredményeket kapták: Anna 17-et, Balázs 7-et, Csaba 4-et, Dénes 16-ot és Éva 11-et. Milyen kártyákat húztak a gyerekek külön-külön?

Megoldás. Mivel $4=1+3=2+2$, és a számkártyákon különböző számok voltak, Csaba csak az 1-est és a 3-ast húzhatta. Mivel $7=1+6=2+5=3+4$, és az 1-est és a 3-ast már kihúzták, Balázs csak a 2-est és az 5-öst húzhatta. Mivel $11=1+10=2+9=3+8=4+7=5+6$, és az 1-est, 2-est, 3-ast és az 5-öst már kihúzták, Éva csak a 4-est és a 7-est húzhatta. Mivel $17=7+10=8+9$, és a 7-est már kihúzták, Anna csak a 8-ast és a 9-est húzhatta. Így a Dénes által kihúzott számok a 6-os és a 10-es.

3. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 és 7 számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával – belőlük számokat alkotva, műveleti jeleket használva, ha kell zárójeleket is – állítsd elő a 100-at! Írj nyolc megoldást!

Megoldás.

$1+(2+3)\cdot 4\cdot 5+6-7$

$7\cdot 6+5\cdot 4\cdot 3-2\cdot 1$

$3\cdot 5\cdot 7-6+4-2-1$

$3\cdot 4\cdot 7+5\cdot 2+6\cdot 1$

$(7+3+6+4)\cdot 5\cdot(2-1)$

$3\cdot 5\cdot 6+7+4+1-2$

$54+36+7+2+1$

$(7\cdot 6+5+3)\cdot(4-2)\cdot 1$

$(7\cdot 6+4+5)\cdot 2-3+1$

$5\cdot 7\cdot 2+(6+4)\cdot 3\cdot 1$

$(7-6-1+2+3)\cdot 5\cdot 4$

$2\cdot 6\cdot 7+3\cdot 4+5-1$

$4\cdot 5\cdot 6-7\cdot 3+2-1$

$27+43+5\cdot 6\cdot 1$

$[(7+1)\cdot 3+5-4]\cdot(6-2)$

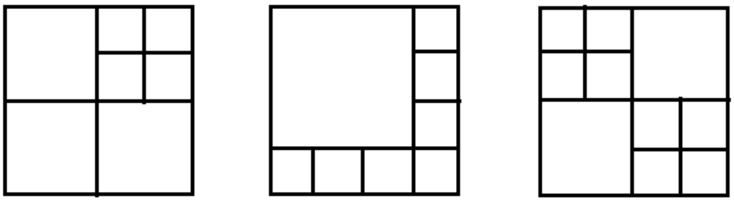
$(1+4+7-6:3)\cdot 5\cdot 2$

$[(4+3)\cdot 7+1]\cdot 2\cdot(6-5)$

$2\cdot 6\cdot 7+5\cdot 4-3-1$

4. Hogyan lehet feldarabolni egy négyzetet 7, 8 és 10 kisebb (nem feltétlenül azonos méretű) négyzetre?

Megoldás. Egy-egy lehetséges megoldás minden esetre az ábrán látható.



6. évfolyam

1. Hány olyan háromjegyű szám van, amelyben a páros számjegyek száma páratlan?

I. megoldás. Háromjegyű számok esetén, ha a páros számjegyek száma páratlan, akkor egy vagy három páros számjegyet tudunk leírni. Egy páros számjegy esetén, 350 ilyen háromjegyű szám van (100 db, amikor a százasok helyén áll a páros számjegy; 125-125 db, amikor a tízesek vagy az egyesek helyén áll a páros számjegy). Három páros számjegy esetén, $4\cdot5\cdot5=100$ ilyen háromjegyű szám van. Összesen 450 ilyen háromjegyű szám van.

II. megoldás. $9\cdot10\cdot5=450$ ilyen háromjegyű szám van. A százasok helyén nem lehet 0. Így, a százasok helyére 9 számjegy közül választhatunk. A második jegy lehet nulla is, tehát itt 10 számjegy közül választhatunk. Ha eddig páros számú páros számjegyet választottunk, akkor az utolsó jegy 0, 2, 4, 6 vagy 8 lehet. Ha eddig páratlan számú páros számjegyet választottunk, akkor az utolsó jegy 1, 3, 5, 7 és 9 lehet. Mivel mindkét esetben 5 lehetőség van, így összesen $9\cdot10\cdot5=450$ lehetőség van.

2. Egy könyv oldalait megszámoztuk 1-gyel kezdve és 2014-gyel bezárólag. Számozás közben hányszor írtuk le az 1-es számjegyet?

Megoldás. Ha a számokat tízesével csoportosítjuk, akkor az egyesek helyén minden csoportban 1 darab 1-es lesz. 2000-ig 200 csoport van, ez 200 darab 1-est jelent, és a 2001-ben illetve a 2011-ben van még 2 darab 1-es, így az egyesek helyén összesen 202 darab 1-es van.
Ha a számokat százasával csoportosítjuk, akkor a tízesek helyén minden csoportban 10 darab 1-es lesz. 2000-ig 20 csoport van, ez 200 darab 1-est jelent (2001-től 2014-ig van még 5 darab 1-es), így az tízesek helyén összesen 205 darab 1-es van.
A százasok helyén az első ezer számban és a második ezer számban is 100-100 darab, tehát összesen 200 darab 1-es van.
Az ezresek helyén 1000-től 1999-ig minden számban van 1-es, ezek száma 1000.
Tehát az 1-esek száma $202+205+200+1000=1607$.

3. A „*MATEK*” szó minden betűjének megfeleltetünk egy számjegyet. A számjegyekre igazak a következők:

$$M+A+T+E+K=21,$$
$$M+A+T=12,$$
$$A\cdot T=21,$$
$$T+E=8,$$
$$K:M=2.$$

Melyik ötjegyű számot rejti a „*MATEK*” szó?

Megoldás. A harmadik egyenletből $A \cdot T = 21$, ahonnan következik, hogy $A = 3$ és $T = 7$ vagy $A = 7$ és $T = 3$.
a) Ha $A = 3$ és $T = 7$, akkor a $T + E = 8$ egyenlőségből következik, hogy $E = 1$.
$M + A + T + E + K = 21$ és $M + A + T = 12$ egyenlőségek miatt $12 + 1 + K = 21$, azaz $K = 8$.
$M + A + T = 12$ egyenlőségből következik, hogy $M + 3 + 7 = 12$, tehát $M = 2$.
Ekkor viszont $K : M = 2$ nem teljesül, tehát ez nem megoldás.
b) Ha $A = 7$ és $T = 3$, akkor a $T + E = 8$ egyenlőségből következik, hogy $E = 5$.
$M + A + T + E + K = 21$ és $M + A + T = 12$ egyenlőségek miatt $12 + 5 + K = 21$, azaz $K = 4$.
$M + A + T = 12$ egyenlőségből következik, hogy $M + 7 + 3 = 12$, tehát $M = 2$.
Ekkor $K : M = 2$ is teljesül. A kapott számok valamennyi egyenletet igazzá teszik.
A keresett ötjegyű szám: 27354.

4. Egy kocka minden lapját pirosra vagy kékre festhetjük. Hány különböző kockát tudunk így készíteni, ha csak azokat a kockákat tekintjük különbözőnek, amelyeket elmozgatással nem lehet fedésbe hozni?

Megoldás. Számoljuk meg a különböző színezéseket aszerint, hogy hány lap piros:
- amikor a piros lapok száma 0, akkor 1 színezés lehetséges,
- amikor a piros lapok száma 1, akkor 1 színezés lehetséges,
- amikor a piros lapok száma 2, akkor 2 színezés lehetséges (a két piros lap vagy élben lesz szomszédos, vagy pedig két szemközti lap),
- amikor a piros lapok száma 3, akkor 2 színezés lehetséges (két szemközti lap és valamelyik oldalsó lap piros, vagy 3 olyan lap, melyeknek van egy közös csúcsa),
- amikor a piros lapok száma 4, akkor 2 színezés lehetséges (ha a piros lapok száma 4, akkor a kék lapok száma 2, a két kék lap vagy élben lesz szomszédos, vagy pedig két szemközti lap),
- amikor a piros lapok száma 5, akkor 1 színezés lehetséges,
- amikor a piros lapok száma 6, akkor 1 színezés lehetséges.
Összegezve: 10 különböző módon lehet a kocka lapjait két színnel színezni.

7. évfolyam

1. Peti és édesapja életkorának összege 41. Peti 17 év múlva feleannyi idős lesz mint édesapja, és 14 év múlva feleannyi, mint édesanyja. Hány évesek a családtagok most?

Megoldás. Peti és édesapja 17 év múlva együtt 34 évvel lesznek idősebbek mint most, azaz összesen 75 évesek lesznek. Ekkor Peti 25, édesapja pedig 50 éves lesz. Ez azt jelenti, hogy most 8 illetve 33 évesek. 14 év múlva Peti 22 éves, feleannyi, mint édesanyja, aki ekkor 44 éves. Így Peti édesanyja most 30 éves.

2. A „*MATEK*” szó minden betűjének megfeleltetünk egy számjegyet. A számjegyekre igazak a következők:

$$M+A+T+E+K=21,$$
$$M+A+T=12,$$
$$A\cdot T=21,$$
$$T+E=8,$$
$$K:M=2.$$

Melyik ötjegyű számot rejti a „*MATEK*” szó?

Megoldás. A harmadik egyenletből $A\cdot T=21$, ahonnan következik, hogy $A=3$ és $T=7$ vagy $A=7$ és $T=3$.
a) Ha $A=3$ és $T=7$, akkor a $T+E=8$ egyenlőségből következik, hogy $E=1$.
$M+A+T+E+K=21$ és $M+A+T=12$ egyenlőségek miatt $12+1+K=21$, azaz $K=8$.
$M+A+T=12$ egyenlőségből következik, hogy $M+3+7=12$, tehát $M=2$.
Ekkor viszont $K:M=2$ nem teljesül, tehát ez nem megoldás.
b) Ha $A=7$ és $T=3$, akkor a $T+E=8$ egyenlőségből következik, hogy $E=5$.
$M+A+T+E+K=21$ és $M+A+T=12$ egyenlőségek miatt $12+5+K=21$, azaz $K=4$.
$M+A+T=12$ egyenlőségből következik, hogy $M+7+3=12$, tehát $M=2$.
Ekkor $K:M=2$ is teljesül. A kapott számok valamennyi egyenletet igazzá teszik.
A keresett ötjegyű szám: 27354.

3. A 2015 olyan szám, amely osztható 5-tel és a számjegyeinek a szorzata 0. Hány ilyen négyjegyű szám van?

Megoldás. A feltételeknek azok a négyjegyű számok tesznek eleget, amelyek számjegyei között van nulla (nem az első helyen) és 0-ra vagy 5-re végződnek.
1. Először számoljuk össze a 0-ra végződő ilyen számokat:

$$\_\ \_\ \_\ 0.$$

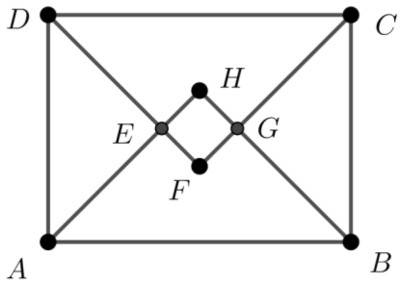
A három vonalra beírható a 100, $101,\ldots,$ 999, ez összesen $999-99=900$ szám.

2. Most számoljuk meg azokat a számokat, amelyek 5-re végződnek és pontosan 1 darab 0-t tartalmaznak. Ez a nulla legyen a második helyen:

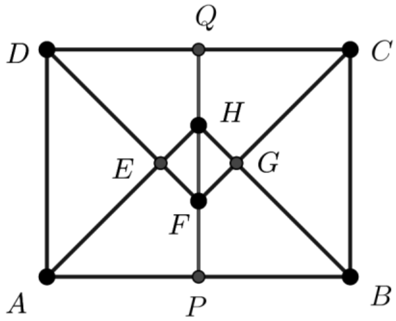
$$\_\ 0\ \_\ 5.$$

A vonalkák helyére 10-től 99-ig bármelyik számot be lehet írni, kivéve a 10-et, 20-at,..., 90-et. Ez összesen $99-9-9=81$ lehetőség. Ugyanez a helyzet akkor is, ha a nullát a harmadik helyen rögzítjük. Vagyis 162 lehetőséget számoltunk össze.
3. Most számoljuk meg azokat a számokat, amelyek 5-re végződnek és pontosan két 0-t tartalmaznak: $\_\ 005$. Ezekből összesen 9 van.
Mivel kimerítettük a feltételeknek megfelelő számok halmazát, és mindegyiket csak egyszer számoltuk, így a megoldás: $900+162+9=1071$ szám.

4. Az $ABCD$ téglalap szomszédos oldalainak hossza $8\,cm$ és $6\,cm$. A belső szögfelezőinek metszéspontjai az E, F, G, H pontok (lásd az ábrán!). Mekkora az FH szakasz hossza?



Megoldás. Az FH szakaszra illesszünk egy egyenest. Ez az egyenes az AB oldalt a P, a CD oldalt a Q pontban metszi (lásd az ábrát!).



Az ábra szimmetriája miatt a PQ szakasz merőlegesen felezi a téglalapot, vagyis $APF\angle$ derékszög és P pont oldalfelezőpont. Mivel az AE félegyenes a $PAD\angle$ szögfelezője, ezért $HAP\angle = 45°$. Így az APH háromszög egyik szöge derékszög, a másik 45°, azaz APH háromszög egy egyenlő szárú derékszögű háromszög és $PH = AP$. Ezek alapján

$$HQ = QP - PH = AD - AP = AD - \frac{AB}{2} = 6 - \frac{8}{2} = 2.$$

Hasonlóan $FP = 2$. Ezek alapján

$$FH = PQ - (PF - HQ) = 6 - (2+2) = 2,$$

azaz a kérdéses szakasz $2\,cm$.

8. évfolyam

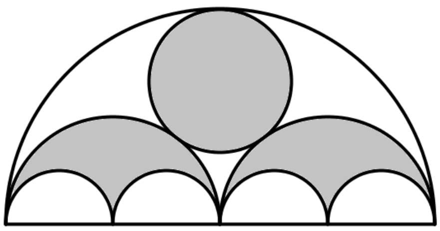
1. András 40 másodperc alatt kerekezett végig egy kört a versenypályán. Balázs ugyanakkor és ugyanonnan indulva, de ellenkező irányba kerekezve 15 másodpercenként találkozott Andrással. Hány másodperc alatt tesz meg Balázs egy kört? (Mindketten egyenletes sebességgel bicikliztek.)

Megoldás. Az első találkozáskor (15 másodperc után) András megtette a 40 másodperces körútjának a $\frac{15}{40}=\frac{3}{8}$-ad részét. Ugyanekkor (15 másodperc alatt) Balázs megtette a kör $1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$-ad részét. Innen egyenes arányossággal adódik a megoldás. Legyen b a Balázs számára szükséges idő a teljes kör megtételéhez. Ekkor

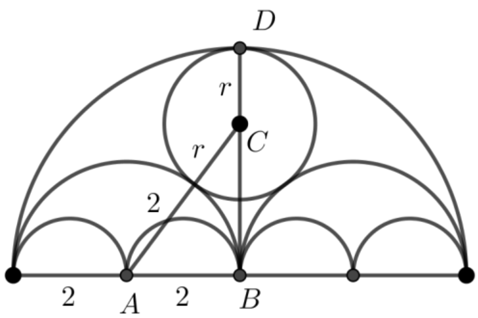
$$\frac{5}{8}:15=1:b\,.$$

Innen b-t kifejezve kapjuk, hogy b = 24, azaz 24 másodpercre van szüksége Balázsnak a teljes kör megtételéhez.

2. Határozd meg a satírozott terület nagyságát, ha ismert, hogy a kis félkörök sugara $1\,cm$!



Megoldás. A kis félkörök sugara $1\,cm$, a közepeseké $2\ cm$, a nagy félköré pedig $4\ cm$.



A teljes kör sugarát az ABC derékszögű háromszög segítségével tudjuk kiszámolni.

$$(2+r)^2=2^2+(4-r)^2$$
$$12r=16$$
$$r=\frac{4}{3}$$

A megfelelő sugarak ismeretében kiszámolható a satírozott rész területe:

$$T=\left(\frac{4}{3}\right)^2\pi+2\left(\frac{2^2\pi}{2}-2\frac{\pi}{2}\right)=3\frac{7}{9}\pi\approx 11{,}87\ cm^2\,.$$

3. Egy hatjegyű szám számjegyei 1, 2, 3, 4, 5 és 6. Az első két számjegyből álló szám páros. Az első három számjegyből álló szám osztható hárommal, az első négy számjegyből álló néggyel, az első ötből álló öttel, maga a szám pedig hattal. Melyik ez a szám?

Megoldás. Az ötödik számjegy csak az 5 lehet. A páros helyeken páros számok állnak, ezért az első és harmadik helyen az 1 és a 3 áll valamilyen sorrendben. Az első három számjegy összege osztható hárommal, ezért a második helyen csak a 2 állhat. A negyedik helyen nem állhat a négyes, mert sem a 14 sem a 34 nem osztható néggyel, így a negyedik számjegy a 6 lesz, a hatodik pedig a 4.
Két ilyen szám van, az 123654 és a 321654.

4. Pisti felírta a táblára a számokat 1-től 12-ig. Ferivel a következő játékot játsszák: Felváltva letörölnek a tábláról két számot, és a letörölt számok helyett fölírják a két szám összegénél 1-gyel kisebb számot. A játék addig tart, amíg egyetlen egy szám marad a táblán. Ha ez a szám páros, akkor Pisti nyert, ha páratlan, akkor Feri. Hogyan játsszon Pisti, ha ő kezd, és mindenképpen nyerni szeretne Feri bármilyen „törlései” mellett?

Megoldás. Kezdőhelyzetben a táblán lévő számok összege: $1+2+\cdots+12=78$. Minden törlés után az összeg 1-gyel csökken, és minden törlés után egy számmal kevesebb van a táblán. Vagyis a 12 darab számból 11 törlés után egyetlen szám marad, ekkor ér véget a játék, közben az összeg éppen 11-gyel csökkent, vagyis 67 lesz. Ezek szerint ez egy nagyon igazságtalan játék Pistivel szemben, mert Feri kezdőként akárhogy játszik, nyerni fog.

9. évfolyam

1. Pisti felírta a táblára a számokat 1-től 12-ig. Ferivel a következő játékot játsszák: Felváltva letörölnek a tábláról két számot, és a letörölt számok helyett fölírják a két szám összegénél 1-gyel kisebb számot. A játék addig tart, amíg egyetlen egy szám marad a táblán. Ha ez a szám páros, akkor Pisti nyert, ha páratlan, akkor Feri. Hogyan játsszon Pisti, ha ő kezd, és mindenképpen nyerni szeretne Feri bármilyen „törlései” mellett?

Megoldás. Kezdőhelyzetben a táblán lévő számok összege: $1+2+\dots+12=78$. Minden törlés után az összeg 1-gyel csökken, és minden törlés után egy számmal kevesebb van a táblán. Vagyis a 12 darab számból 11 törlés után egyetlen szám marad, ekkor ér véget a játék, közben az összeg éppen 11-gyel csökkent, vagyis 67 lesz. Ezek szerint ez egy nagyon igazságtalan játék Pistivel szemben, mert Feri kezdőként akárhogy játszik, nyerni fog.

2. A szirakúzai Hieron király 16 font aranyat és 4 font ezüstöt utalt ki az udvari ötvösnek, hogy ebből készítsen neki koronát. (A font a tömeg egy mértékegysége.) A kész korona tömege pontosan 20 font volt, a király mégis gyanút fogott, hogy a derék ötvös a kiutalt arany egy részét ezüsttel pótolta. A dolog kivizsgálásával a híres ókori tudóst, Arkhimédészt bízta meg, aki megmérte a koronát vízben és megállapította, hogy a korona vízben $1\frac{1}{4}$ fontot veszített a tömegéből. Mivel Arkhimédész tudta, hogy 20 font arany vízben 1 fontot, 21 font ezüst vízben pedig 2 fontot veszít a tömegéből, így kiszámolta, hogy az arany egy részét valóban ezüsttel pótolták.
A kiutalt aranyból hány fontot helyettesített az udvari ötvös ezüsttel?

Megoldás. Jelölje x a koronában levő arany tömegét (fontban), y pedig a koronában levő ezüst tömegét (fontban). Ekkor $x+y=20$.
x font arany vízben $\frac{x}{20}\cdot 1$ fontot, y font ezüst vízben pedig $\frac{y}{21}\cdot 2$ fontot veszít a tömegéből, s ez a két mennyiség összesen $1\frac{1}{4}$ font tömegveszteséget jelent, azaz

$$\frac{x}{20}+\frac{2y}{21}=1\frac{1}{4}.$$

Most meg kell oldani az

$$\begin{aligned} x+y&=20\\ \frac{x}{20}+\frac{2y}{21}&=\frac{5}{4}, \end{aligned}$$

azaz az

$$\begin{aligned} x+y&=20\\ 21x+40y&=525 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. A megoldás

$$x=\frac{275}{19}=14\frac{9}{19},\ y=\frac{105}{19}=5\frac{10}{19}.$$

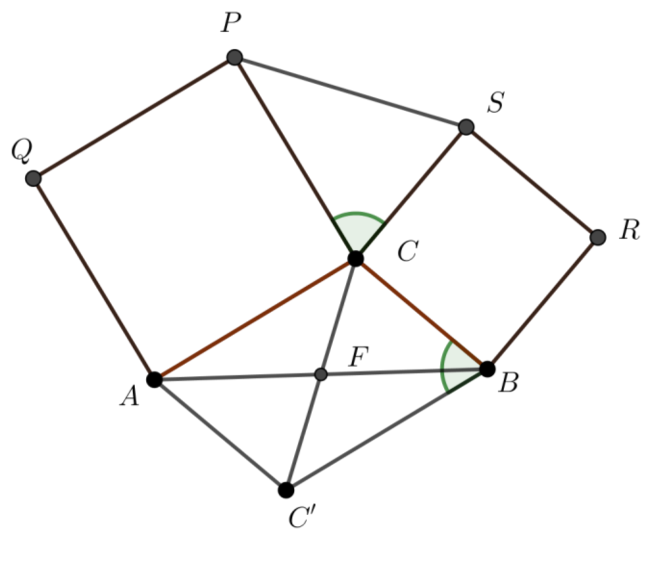
Tehát az udvari ötvös $\frac{29}{19}$ font aranyat helyettesített ezüsttel.

3. Az $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^2 \cdot 5^1 \cdot 6^1 \cdot 7^2 \cdot 8^3 \cdot 9^2 \cdot 10^1$ szorzat eredményére András az 1053455154300, Andrea az 1053455154600 számot kapta. Melyik lehet közülük a helyes?

Megoldás. A szorzat osztható 8-cal, tehát a megadott szám utolsó számjegyének is oszthatónak kell lennie vele.
A 300 nem osztható 8-cal, tehát az András által közölt szám nem lehet helyes.
A szorzat osztható 9-cel, tehát a megadott szám számjegyei összegének is oszthatónak kell lennie vele.
Andrea esetében a számjegyek összege 39, az általa megadott szám emiatt nem helyes.
Az előzőek miatt sem András, sem Andrea száma nem lehet jó.

4. Legyen F az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja! Rajzold meg az AC, illetve BC oldalakra kifelé az $ACPQ$, illetve $BCSR$ négyzeteket! Bizonyítsd be, hogy $PS = 2CF$.

Megoldás. A C csúcs tükörképe az F pontra legyen C'. Legyen továbbá $ACB\angle = \gamma$. A középpontos tükrözés tulajdonságai miatt az $AC'BC$ négyszög paralelogramma, így $AC = BC'$, valamint $CC' = 2 \cdot CF$, mert a paralelogramma átlói felezik egymást. A CBC' háromszög egybevágó a PCS háromszöggel, mert $PC = (AC =)BC'$, valamint $CS = CB$ ugyanazon négyzet oldalai. Megegyezik tehát két-két oldal. Az ezek által közbezárt szög mindkét háromszögben $180° - \gamma$, vagyis a két háromszög egybevágó. Így harmadik oldalaik is egyenlő hosszúak, azaz $PS = CC' = 2 \cdot CF$. Ezzel az állítást beláttuk.



<u>**10. évfolyam**</u>

1. Egy kétjegyű szám jegyei közé egy nullát írtunk. A kapott háromjegyű szám és az eredeti kétjegyű szám számtani közepe az eredeti kétjegyű szám fordítottjával egyenlő. Melyik kétjegyű számról van szó?

Megoldás. Legyen a keresett kétjegyű szám $\overline{ab}$. Ekkor a feltételek szerint $\frac{\overline{ab}+\overline{a0b}}{2}=\overline{ba}$, vagyis $\frac{10a+b+100a+b}{2}=10b+a$, átrendezve pedig kapjuk, hogy $b=6a$. Mivel az a és b egyjegyű számok és nem lehetnek egyenlőek 0-val, így a lehetséges $a=1$ esetén $b=6$. Tehát a keresett szám a 16.

2. A szirakúzai Hieron király 16 font aranyat és 4 font ezüstöt utalt ki az udvari ötvösnek, hogy ebből készítsen neki koronát. (A font a tömeg egy mértékegysége.) A kész korona tömege pontosan 20 font volt, a király mégis gyanút fogott, hogy a derék ötvös a kiutalt arany egy részét ezüsttel pótolta. A dolog kivizsgálásával a híres ókori tudóst, Arkhimédészt bízta meg, aki megmérte a koronát vízben és megállapította, hogy a korona vízben $1\frac{1}{4}$ fontot veszített a tömegéből. Mivel Arkhimédész tudta, hogy 20 font arany vízben 1 fontot, 21 font ezüst vízben pedig 2 fontot veszít a tömegéből, így kiszámolta, hogy az arany egy részét valóban ezüsttel pótolták.
A kiutalt aranyból hány fontot helyettesített az udvari ötvös ezüsttel?

Megoldás. Jelölje x a koronában levő arany tömegét (fontban), y pedig a koronában levő ezüst tömegét (fontban). Ekkor $x+y=20$.
x font arany vízben $\frac{x}{20}\cdot 1$ fontot, y font ezüst vízben pedig $\frac{y}{21}\cdot 2$ fontot veszít a tömegéből, s ez a két mennyiség összesen $1\frac{1}{4}$ font tömegveszteséget jelent, azaz

$$\frac{x}{20}+\frac{2y}{21}=1\frac{1}{4}.$$

Most meg kell oldani az

$$\begin{aligned} x+y&=20 \\ \frac{x}{20}+\frac{2y}{21}&=\frac{5}{4}, \end{aligned} \qquad \text{azaz} \qquad \begin{aligned} x+y&=20 \\ 21x+40y&=525 \end{aligned}$$

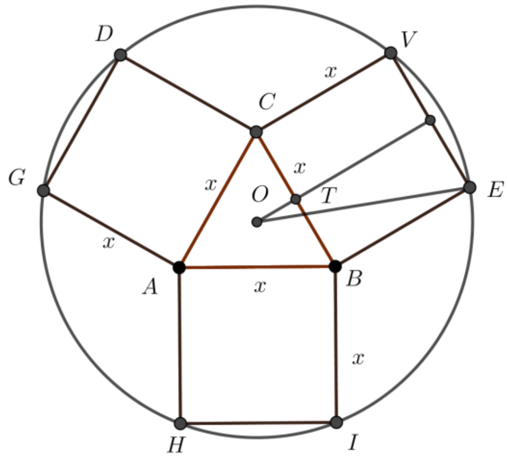
egyenletrendszert. A megoldás

$$x=\frac{275}{19}=14\frac{9}{19},\ y=\frac{105}{19}=5\frac{10}{19}.$$

Tehát az udvari ötvös $\frac{29}{19}$ font aranyat helyettesített ezüsttel.

3. Egy szabályos háromszög oldalaira kifelé négyzeteket írtunk, majd egy olyan kört szerkesztettünk, amely áthalad a négyzeteknek a háromszög csúcsaitól különböző csúcsain. Mekkora a háromszög oldala, ha a kör sugara *r*?

Megoldás. Az ABC háromszög és a négyzetek oldalait jelöljük x-szel. Az EFO háromszögben



$OE = r,\ EF = \frac{x}{2},\ FO = x + TO$, ahol a TO szakasz az x oldalú szabályos háromszög magasságának harmada.

Mivel $TO = \frac{1}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{6}$, így $FO = x + \frac{x\sqrt{3}}{6}$ Az EFO háromszögre alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt:

$$\left[x\left(1+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\right]^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = r^2,$$

azaz $x^2\left(\frac{12+1+3+4\sqrt{3}}{12}\right) = r^2$,

így $x^2\left(\frac{4+\sqrt{3}}{3}\right) = r^2$, tehát $x = r\sqrt{\frac{3}{4+\sqrt{3}}}$, $\left(x \approx r \cdot 0,7234\right)$.

4. 229 **db papírlap közül néhányat kettévágunk, majd a meglevő összes papírlap közül kétszer annyit, mint előbb újra kettévágunk. Ezután az eljárást valahányszor megismételjük. Hány lapot vágtunk ketté legelőször, ha legvégül** 2014 **db papírlap keletkezett?**

Megoldás. Jelölje n a legelőször kettévágott papírlapok számát $\left(n \le 229\right)$. Így az első vágás után keletkező papírlapok száma:

$$2n + 229 - n = 229 + n.$$

Másodszor $2n$ db lapot vágtunk ketté, így a keletkező lapok száma:

$$4n + 229 + n - 2n = 229 + 3n = 229 + 4n - n.$$

Harmadszor $4n$ lapot vágunk ketté és összesen $229 + 8n - n$ lesz a lapok száma, tehát a k-adik vágás után

$$229 + 2^k n - n$$

lapunk lesz. A feladatot így a $229 + 2^k n - n = 2014$ egyenlettel kell megoldani, ahol k és n pozitív egész számok. Átrendezve adódik

$$(2^k - 1)n = 1785,$$

ahol az 1785-öt kell két pozitív egész szám szorzatára bontani.

Mivel $1785 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$, így a szám 229-nél kisebb osztói:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 15,\ 17,\ 21,\ 35,\ 51,\ 85,\ 105,\ 119.$$

Táblázatba írva ezeket, azt tapasztaljuk, hogy csak $n = 7$ és $n = 119$ esetén kapunk 2 hatványánál eggyel kevesebbet, ezért $k = 8$, valamint $k = 16$ lesz a megoldás. Ezek szerint, ha a feladatban leírt eljárást végrehajtva 2014 db papírlap keletkezett, akkor első alkalommal vagy 7 db papírlapot vágtunk ketté és az eljárást 8-szor hajtottuk végre, vagy pedig 119 lapot vágtunk el legelőször és 4-szer vágtunk összesen.

11. évfolyam

1. Határozd meg mindazokat a k, m, n természetes számokat, amelyekre $2^k + 10^m - 10^n = 2014$.

Megoldás. Ha $k > 1,\ m > 1,\ n > 1$, akkor az egyenlet bal oldala osztható néggyel, ami ellentmondás, mert 2014 viszont nem osztható néggyel, tehát a $k,\ m,\ n$ természetes számok közül legalább egyik egyenlő eggyel.
Ha $k = 1$, akkor az egyesek helyén álló számjegy 2, ami ugyancsak lehetetlen, mert a 2014 számban az egyesek helyén 4 áll.
Ha $m = 1$, akkor az egyenlet $2^k - 2004 = 10^n$ alakú, ami azt jelenti, hogy $2^k > 2004$, vagyis $k > 10$. Mivel a $2^k - 2004$ osztható néggyel, de nyolccal nem, az eredmény $n = 2$, ez viszont ellentmondás, mert a 2104 nem a kettőnek a hatványa.
Ha $n = 1$, akkor $2^k + 10^m = 2024$ azaz $10^m < 2024$, vagyis $m \le 3$.
A megoldás tehát $(k,\ m,\ n) = (10,\ 3,\ 1)$.

2. Oldd meg a valós számok halmazán a $\dfrac{\sin x + \mathrm{tg} x}{\cos x + \mathrm{ctg} x} > 0$ egyenlőtlenséget!

Megoldás.

$$\frac{\sin x + \mathrm{tg} x}{\cos x + \mathrm{ctg} x} = \frac{\sin^2 x(\cos x + 1)}{\cos^2 x(\sin x + 1)} > 0$$

Értelmezési tartomány:

$$\sin x \neq 0, \cos x \neq 0, \sin x \neq -1, \text{ azaz } x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in Z .$$

Tudjuk, hogy $\sin^2 x > 0$ és $\cos^2 x > 0$. Ekkor

$$\frac{\sin^2 x(\cos x + 1)}{\cos^2 x(\sin x + 1)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\cos x + 1}{\sin x + 1} > 0,$$

amely összevetve az értelmezési tartománnyal is, akkor teljesül, ha:

a) $\sin x + 1 > 0 \wedge \cos x + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x > -1 \wedge \cos x > -1 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \dfrac{k\pi}{2},\ k \in Z$,

b) $\sin x + 1 < 0 \wedge \cos x + 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x < -1 \wedge \cos x < -1$.

amiből viszont nem kapunk megoldást.

Összefoglalva, az egyenlőtlenség megoldáshalmaza:

$$M = R \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}, k \in Z .$$

3. Legyenek B' és C' az ABC háromszög B és C csúcsainak merőleges vetületei a háromszög szemközti oldalára. Bizonyítsd be, hogy az A csúcsból a $B'C'$ egyenesre húzott merőleges tartalmazza a háromszög körülírt körének középpontját!

Megoldás. Az A csúcsból húzott $B'C'$ egyenesre merőleges n egyenes metszi a $B'C'$ egyenest D pontban, az ABC háromszög köré írt kört pedig E pontban metszi. A derékszögek miatt a $BCB'C'$ húrnégyszög, azaz

$$AB'C'\angle \cong ABC\angle .$$

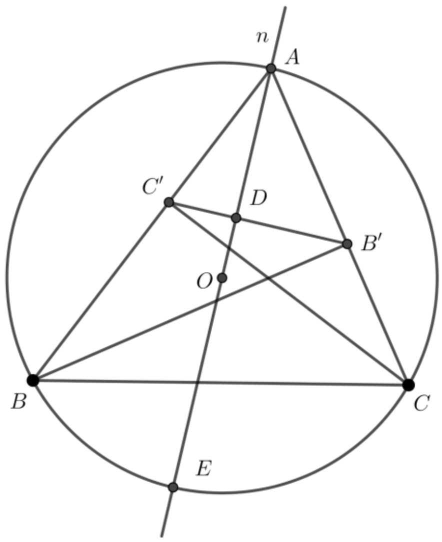
Mivel $AD \perp B'C'$, ahonnan

$$B'AD\angle = 90° - AB'C'\angle = 90° - ABC\angle$$

valamint $EAC\angle \cong EBC\angle$, mert azonos húr feletti kerületi szögek, ezért

$$ABC\angle + CBE\angle = 90° \Rightarrow ABE\angle = 90°,$$

s ez azt jelenti AE átmérő.



4. Állítsd elő az $S=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2013^2}+\frac{1}{2014^2}}$ **összeget** $S=\frac{p}{q}$ **alakban, ahol** $p,q\in N$ **és** p,q **relatív prímek!**

Megoldás. Alakítsuk a gyök alatti kifejezéseket a következőképpen:

$$1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{n^2(n^2+2n+1)+n^2+2n+1+n^2}{n^2(n+1)^2}=$$

$$=\frac{n^4+2n^3+n^2+n^2+2n+1+n^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{n^4+n^2+1+2n^3+2n^2+2n}{n^2(n+1)^2}=\frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2},$$

így

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\sqrt{\frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}}=\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}=\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Ekkor

$$S=\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{2012}-\frac{1}{2013}\right)+\left(1+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}\right)$$

$$S=2013+1-\frac{1}{2014}=2014-\frac{1}{2014}=\frac{2014^2-1}{2014},$$

vagyis

$$S=\frac{4\,056\,195}{2014}.$$

1. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sqrt{\log_{0,04} x+1}+\sqrt{\log_{0,2} x+3}=1.$$

Megoldás. Az értelmezési tartomány meghatározása a következő gondolatmenettel történik:

$$x>0 \quad \wedge \quad \log_{0,04} x>-1 \quad \wedge \quad \log_{0,2} x>-3$$

$$x>0 \quad \wedge \quad \log_{0,04} x \geq \log_{0,04}(0,04)^{-1} \quad \wedge \quad \log_{0,2} x \geq \log_{0,2}(0,2)^{-3}$$

$$x>0 \quad \wedge \quad x \leq \frac{100}{4} \quad \wedge \quad x \leq \left(\frac{10}{2}\right)^3$$

$$x>0 \quad \wedge \quad x \leq 25 \quad \wedge \quad x \leq 125$$

$$0<x \leq 25.$$

Használjuk fel, hogy $\log_{0,04} x=\log_{0,2^2} x=\frac{1}{2}\log_{0,2} x$, és vezessük be a $\log_{0,2} x=t$ helyettesítést. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{\frac{1}{2}t+1}+\sqrt{t+3}=1,$$

illetve négyzetre emeléssel

$$\frac{1}{2}t+1+2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}t+1}\cdot\sqrt{t+3}+t+3=1$$

$$2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}t+1}\cdot\sqrt{t+3}=-\frac{3}{2}t-3, \qquad -\frac{3}{2}t-3\geq 0$$

$$4\cdot\left(\frac{1}{2}t+1\right)\cdot(t+3)=\frac{9}{4}t^2+9t+9,$$

$$(2t+4)\cdot(t+3)=\frac{9}{4}t^2+9t+9,$$

$$2t^2+10t+12=\frac{9}{4}t^2+9t+9,$$

$$-\frac{1}{4}t^2+t+3=0,$$

$$t^2-4t-12=0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1=6 \ \vee \ t_2=-2$$

A $t_1=6$ megoldás nem elégíti ki a $-\frac{3}{2}t-3\geq 0$ feltételt, s így az egyetlen megoldás a

$$t_2=-2 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{0,2} x=-2 \quad \Leftrightarrow \quad x=0,2^{-2}=5^2 \quad \Leftrightarrow \quad x=25.$$

2. Oldd meg a valós számok halmazán a $\frac{\sin x+\mathrm{tg}x}{\cos x+\mathrm{ctg}x}>0$ **egyenlőtlenséget!**

Megoldás.

$$\frac{\sin x+\mathrm{tg}x}{\cos x+\mathrm{ctg}x}=\frac{\sin^2 x(\cos x+1)}{\cos^2 x(\sin x+1)}>0$$

Értelmezési tartomány: $\sin x \neq 0, \cos x \neq 0, \sin x \neq -1$, azaz $x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in Z$.

Tudjuk, hogy $\sin^2 x > 0$ és $\cos^2 x > 0$. Ekkor

$$\frac{\sin^2 x(\cos x+1)}{\cos^2 x(\sin x+1)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\cos x+1}{\sin x+1} > 0$$

amely összevetve az értelmezési tartománnyal is, akkor teljesül, ha:

a) $\sin x+1>0 \ \wedge\ \cos x+1>0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x>-1 \ \wedge\ \cos x>-1 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in Z$

b) $\sin x+1<0 \ \wedge\ \cos x+1<0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x<-1 \ \wedge\ \cos x<-1$

amiből pedig nem kapunk megoldást.
Összefoglalva, az egyenlőtlenség megoldáshalmaza:

$$M = R \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}, k \in Z .$$

3. Igazold, hogy bármely téglatest V térfogata és F felszíne között fennáll a $216V^2 \leq F^3$ egyenlőtlenség! Mikor állhat fenn egyenlőség?

Megoldás. Ha a téglatest élei $a, b, c,$ akkor $V = abc,\ F = 2(ab+bc+ac).$
A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt

$$\frac{ab+bc+ac}{3} \geq \sqrt[3]{abbcac} = \sqrt[3]{(abc)^2} = \sqrt[3]{V^2} ,$$

s így

$$F = 2\left(ab+bc+ac\right) = 6\cdot\frac{ab+bc+ac}{3} \geq 6\cdot\sqrt[3]{V^2},$$

amelyből köbre emeléssel kapjuk, hogy $F^3 \geq 216\cdot V^2$ (ezt kellett bizonyítani). Az egyenlőség akkor áll fenn, amikor $ab = bc = ac,$ ami ekvivalens azzal, hogy $a = b = c$, vagyis amikor a téglatest kocka:

$$ab = bc \Leftrightarrow ab-bc = 0 \Leftrightarrow b(a-c) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \vee a = c ,$$

mivel $b = 0$ nem lehetséges, így $a = c$. Hasonlóan $b = c$, illetve $a = c$.

4. Állítsd elő az

$$S = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + ... + \sqrt{1+\frac{1}{2013^2}+\frac{1}{2014^2}}$$

összeget $S = \frac{p}{q}$ alakban, ahol $p, q \in N$ és p, q relatív prímek!

Megoldás. Alakítsuk a gyök alatti kifejezéseket a következőképpen:

$$1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{\left(n+1\right)^2} = \frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{n^2(n^2+2n+1)+n^2+2n+1+n^2}{n^2(n+1)^2} =$$

$$= \frac{n^4+2n^3+n^2+n^2+2n+1+n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{n^4+n^2+1+2n^3+2n^2+2n}{n^2(n+1)^2} = \frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2} ,$$

így

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{\left(n+1\right)^2}}=\sqrt{\frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}}=\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}=\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Ekkor

$$S=\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{2012}-\frac{1}{2013}\right)+\left(1+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}\right)$$

$$S=2013+1-\frac{1}{2014}=2014-\frac{1}{2014}=\frac{2014^2-1}{2014},$$

vagyis

$$S=\frac{4\ 056\ 195}{2014}.$$

A XII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

5. évfolyam

1. Kovács Alex, Petőfi Brigád Általános Iskola, Kúla, **I. díj**
2. Sinkovics Alex, Hunyadi János Általános Iskola, Csantavér, **III. díj**
3. Apró Dorottya, Október 10. Általános Iskola, Szabadka, **III. díj**
4. Gál József, Ady Endre Kísérleti Általános Iskola, Kishegyes, **III. díj**

6. évfolyam

1. Fehér Konrád, Jovan Mikić Általános Iskola, Szabadka, **I. díj**
2. Csikós Réka, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **I. díj**
3. Tóth Noémi, Jovan Mikić Általános Iskola, Szabadka, **II. díj**
4. Tóth Tamás, Hunyadi János Általános Iskola, Csantavér, **II. díj**
5. Molnár Dávid, Kizur István Általános Iskola, Szabadka, **II. díj**
6. Süli Ákos, Széchenyi István Általános Iskola, Szabadka, **III. díj**
7. Bognár Emese, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **III. díj**

7. évfolyam

1. Hugyik Kornél, Testvériség-Egység Általános Iskola, Bajsa, **I. díj**
2. Besnyi Levente, Jovan Jovanovic Zmaj Általános Iskola, Szabadka, **I. díj**
3. Kőrösi Zalán, November 11. Általános Iskola, Zenta, **II. díj**
4. Kószó Emília, Ady Endre Általános Iskola, Torda, **II. díj**
5. Bózsó Szintia, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **III. díj**
6. Zabos Péter, November 11. Általános Iskola, Zenta, **III. díj**
7. Paróczi Orsolya, Ady Endre Kísérleti Általános Iskola, Kishegyes, **III. díj**

8. évfolyam

1. Szögi Roland, Kis Ferenc Általános Iskola, Orom, **I. díj**
2. Rúzsa Ákos, November 11. Általános Iskola, Zenta, **II. díj**
3. Apró János, Október 10. Általános Iskola, Szabadka, **II. díj**
4. Tóth Péter, Ady Endre Kísérleti Általános Iskola, Kishegyes, **III. díj**
5. Szabó Imre, Október 10. Általános Iskola, Horgos, **III. díj**

9. évfolyam

1. Illés Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Szilágyi Éva, Jovan Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék, **I. díj**
3. Besnyi Botond, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **II. díj**
4. Pilisi Réka, Deák Ferenc Gimnázium, Szeged, **III. díj**
5. Szabadi Baranyi László, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **III. díj**

10. évfolyam

1. Fenyvesi Abigél, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Szögi Evelin, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Fodor Ádám Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Szűcs Áron, Békéscsaba, **II. díj**
5. Gulyás Oldal Laura, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**
6. Szalaji Natália, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**
7. Polyák Gabriella, Becsei Gimnázium, Óbecse, **III. díj**
8. Bíró Nikolett, Békéscsaba, **III. díj**
9. Farkas Krisztián, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **III. díj**

11. évfolyam

1. Dobó Márk, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Terhes Balázs, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Kőrösi Ágota, Műszaki Iskola, Ada, **II. díj**
4. Huszár Lídia, Svetozar Marković Gimnázium Szabadka, **II. díj**
5. Tóth Rebeka, Békéscsaba, **II. díj**
6. Horti Katalin, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

12. évfolyam

1. Szilágyi Krisztina, Jovan Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék, **I. díj**
2. Csipak Levente, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Téglás Ervin, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Kovacsics Viola, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **III. díj**
5. Vrábel Máté Dávid, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

Örömteli pillanatok. :)

A XIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

A versenyzők lelkesen dolgoznak a feladatokon.

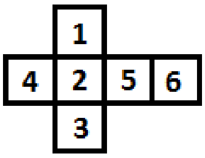
XIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2015. december 5.

<u>5. évfolyam</u>

1. Négy város (A**,** B**,** C **és** D**) között ismert néhány távolság:** $AB = 15\ km$**,** $BC = 64\ km$**,** $CD = 17\ km$**,** $DA = 32\ km$**. Milyen messze van az** A **város a** C **várostól?**

2. Legalább hány darab és milyen fémpénznek kell lennie a trafikos kasszájában ahhoz, hogy 20 **dinárból vissza tudjon adni, bármennyi egész dinárt is kell fizetnie a vevőnek?**

3. Az ábrán levő kockahálózatot összehajtjuk kockává. Kiszámítjuk minden csúcsnál az oda befutó három lapon levő számok szorzatát. Hány különböző szorzatot kapunk ily módon? Mekkora ezen számok közül a legnagyobb?



4. Okoska elhatározta, hogy mindennap matematikai fejtörőket fog megoldani. Az első napon egyet, a másodikon kettőt, a harmadikon hármat, ezután újra 1**-et,** 2**-t,** 3**-at és így tovább. A hét melyik napján oldotta meg az** 1**. feladatot, ha a** 100**. feladatot vasárnap oldotta meg?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

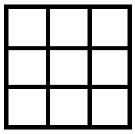
XIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2015. december 5.

6. évfolyam

1. Melyik az a legnagyobb természetes szám, amely oda-vissza olvasva is ugyanannyit ér? Tudjuk még róla, hogy számjegyeinek összege 30, és benne legfeljebb háromszor fordulhat elő ugyanaz a számjegy.

2. Mennyi lehet azon négy egymástól különböző prímszám szorzata, amelyek összege 34?

3. Ez egy 3×3-as „rács”. Egységnyi oldalú négyzetekből áll. Rakd össze:
a) nyolc darab három egység hosszúságú cérnából,
b) négy darab hat egység hosszúságú cérnából,
c) hat darab négy egység hosszúságú cérnából!
A cérnát elvágni nem szabad.



4. Melyek azok a kétjegyű számok, amelyeket 13-mal osztva a kapott maradék annyi, mint a szám 11-gyel való osztásakor kapott hányados, és a 11-gyel való osztáskor kapott maradék is annyi, mint a 13-mal való osztáskor kapott hányados?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2015. december 5.

7. évfolyam

1. Nevezzünk egy számot *négyosztó*nak, ha négyjegyű, minden számjegye különböző, és mindegyik számjegye osztója a négyjegyű számnak.
a) Melyik a legkisebb *négyosztó* szám?
b) Melyik a legnagyobb *négyosztó* szám?
c) Adj meg még egy *négyosztó* számot, amely különbözik a fenti két számtól.
(A nulla nem osztója egyik számnak sem.)

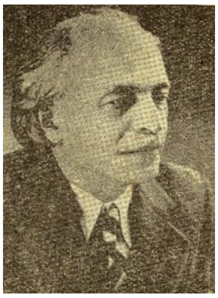
2. Összeadjuk a páratlan számokat 1205-től 2015-ig.
a) Hány számot adunk így össze?
b) Melyik szám áll az így kapott összegben az egyesek helyén?
c) Osztható-e ez az összeg 3-mal?

3. Egy téglalap átlójának felezőmerőlegese a hosszabb oldalból a rövidebb oldallal egyenlő hosszúságú szakaszt metsz ki. Mekkora szöget zárnak be a téglalap átlói?
(Minden egyes számolási lépésnél hivatkozz arra az összefüggésre, amely alapján a számolást végzed.)

4. Anti és Benő barátok, $70\ km$-re laknak egymástól. Egy reggel Benő 6 órakor, Anti 8 órakor kerékpárral elindult barátja lakása felé, és egyenletes sebességgel haladva 10 órakor találkoztak. Ekkor megállapították, hogy Anti és Benő sebességének az aránya $3:2$ volt. Hány kilométert kerékpározott Anti illetve Benő a találkozásig?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



XIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2015. december 5.

8. évfolyam

1. Megkérdezték Furfangos Fannyt, mennyi a házszáma és ő így válaszolt:
„Ha a házszámom osztható 3-mal, akkor 50 és 59 között van.”
„Ha a házszámom nem osztható 4-gyel, akkor 60 és 69 között van.”
„Ha a házszámom nem osztható 6-tal, akkor 70 és 79 között van.”
Ezek alapján mennyi Furfangos Fanny házszáma?

2. Hány olyan nyolcjegyű páros szám van, amelynek minden számjegye 1-es vagy 4-es, és a páros számú helyeken álló számjegyek összege egyenlő a páratlan számú helyeken álló számjegyek összegével?

3. Fel lehet-e írni az 1, 2, $3,\ldots$, 9 számokat egy kör kerületére úgy, hogy bármelyik két szomszédos szám összegét számolva olyan számot kapjunk, amelyik nem osztható sem 3-mal, sem 5-tel, sem 7-tel?

4. Adott a $36\,cm^2$ területű $ABCD$ négyzet. Az AB oldal A csúcshoz közelebbi harmadolópontját nevezzük P-nek, a CD oldal C-hez közelebbi harmadolópontját pedig Q-nak. Az AC, DP, PC és QB szakaszok egy négyszöget határoznak meg. Mekkora ennek a négyszögnek a területe?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2015. december 5.

9. évfolyam

1. Határozd meg mindazokat az x és y természetes számokat, amelyekre

$$x^2 - 1 = y^2 + 2014.$$

2. Inci és Anci filmnézés közben limonádét iszogattak a moziban. Inci közepes limonádét vásárolt, Anci pedig nagy limonádét, amely 50%-kal nagyobb, mint a közepes limonádé. Miután mindketten megitták limonádéjuk $\frac{3}{4}$ részét, Anci Incinek adta megmaradt limonádéja egyharmadát és még $0.5\ dl$-t. Miután a film befejeződött és megitták az összes limonádét, megállapították, hogy mindketten ugyanannyi mennyiségű limonádét fogyasztottak el. Hány deciliter limonádét ivott meg összesen Inci és Anci?

3. Hány olyan konvex (domború) sokszög van amelynek három egymást követő csúcsa $A(5,0)$, $B(5,5)$ és $C(0,5)$ koordinátájú pont, a többi csúcsának koordinátái pedig szintén nem negatív egész számok?

4. Legyen ABC tetszőleges háromszög. Az adott háromszög $\overline{AD}$ magasságvonalán kijelölünk egy E pontot. Bizonyítsd be, hogy igaz az $|AC|^2 - |CE|^2 = |AB|^2 - |EB|^2$ egyenlőség!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2015. december 5.

10. évfolyam

1. Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$x^2 - y^2 = 2(x+y),$$
$$x^2 + y^2 = 5(x-y).$$

2. Van-e olyan számrendszer, amelyben az 572 **alakú szám osztható a** 275 **alakú számmal?**

3. Az $ABCD$ **paralelogramma** AB **oldalának** A**-hoz közelebbi harmadoló pontja** H**, a** BC **oldalának felezőpontja** F **és** DA **oldalának** A**-hoz legközelebb levő negyedelő pontja** G**. Bizonyítsd be, hogy** FG**,** CH **és** DB **egyenesek egy ponton mennek át!**

4. Hány olyan konvex (domború) sokszög van amelynek három egymást követő csúcsa $A(5,0)$**,** $B(5,5)$ **és** $C(0,5)$ **koordinátájú pont, a többi csúcsának koordinátái pedig szintén nem negatív egész számok?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2015. december 5.

11. évfolyam

1. Az ABC hegyesszögű háromszögben legyen D pont a C csúcsból húzott magasság talppontja úgy, hogy $AD = BC$ érvényes. Ha L pont a D pontból húzott merőleges talppontja az A csúcsból szerkesztett magasságra, akkor igazold, hogy a BL az $ABC\angle$ szögfelezője!

2. Oldd meg az egyenletrendszert!

$$\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2,$$
$$\log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2,$$
$$\log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2.$$

3. Határozd meg mindazon x és y valós számokat, amelyekre

$$x^2 - 2x\cos(xy) + 1 = 0 \text{.}$$

4. Melyik n természetes szám esetén van a $\left(2+x^2\right)^n + \left(2+\frac{1}{x^2}\right)^n = 18$ egyenletnek legtöbb különböző valós gyöke?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2015. december 5.

12. évfolyam

1. Egy természetes számot sikeresnek nevezünk akkor, ha tízes számrendszerbeli alakjában szereplő számjegyeit két csoportra lehet osztani úgy, hogy a csoportokban lévő számjegyek összege megegyezzen. Keresd meg azt a legkisebb N természetes számot, amelyre N is és $N+1$ is sikeres!

2. Az ABC hegyesszögű háromszögben legyen D pont a C csúcsból húzott magasság talppontja úgy, hogy $AD=BC$ érvényes. Ha L pont a D pontból húzott merőleges talppontja az A csúcsból szerkesztett magasságra, akkor igazold, hogy a BL az $ABC\angle$ szögfelezője!

3. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\log_{0,5}\left(x-1\right).$$

4. Határozd meg, hogy mely n természetes számok esetén lesz az

$$S=2015^n+2015^{n-1}+\ldots+2015+1$$

kifejezés osztható 2014**-gyel! Határozd meg a két legkisebb ilyen számot!**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

A XIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

5. évfolyam

1. Négy város (A**,** B**,** C **és** D**) között ismert néhány távolság:** $AB=15\ km$**,** $BC=64\ km$**,** $CD=17\ km$**,** $DA=32\ km$**. Milyen messze van az** A **város a** C **várostól?**

Megoldás. Ha az A, B, C és D városok nem feküdnének egy egyenesen, akkor a három legkisebb távolság összege nagyobb lenne a legnagyobb oldalnál.
Ám ez nincs így, hiszen

$$AB+CD+DA=15\ km+17\ km+32\ km=64\ km=BC.$$

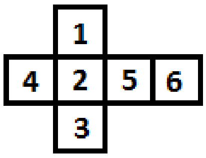
Ezért az említett városok egy egyenes mentén helyezkednek el B, A, D, C (vagy C, D, A, B) sorrendben. A D város tehát az A és C városok között van, azaz

$$AC=AD+DC=32\ km+17\ km=49\ km.$$

2. Legalább hány darab és milyen fémpénznek kell lennie a trafikos kasszájában ahhoz, hogy 20 **dinárból vissza tudjon adni, bármennyi egész dinárt is kell fizetnie a vevőnek?**

Megoldás. Az 5 dinárnál kevesebb pénz visszaadásához csak 1 és 2 dináros érméket használhat. Ezekből egy darab nyilván nem elegendő. Két darab érme esetén sem lehetséges ez. (Két darab 1 dináros érme esetén 3 és 4 dinárt, két darab 2 dináros érme esetén 1 és 3 dinárt, egy darab 1 dináros és egy darab 2 dináros esetén 4 dinárt nem tud visszaadni.) Ezek alapján a trafikosnak az 1 és 2 dináros érmékből legalább három darabra van szüksége. Ez a három darab érme lehet két darab 1 dináros és egy darab 2 dináros vagy egy darab 1 dináros és két darab 2 dináros érme. Ennek a három érmének az összege nem nagyobb 5 dinárnál, ezért még legalább 14 dinár értékű érmékre van szüksége. Ehhez pedig legalább további két érme szükséges (egy darab 5 dináros és egy darab 10 dináros).
Tehát legalább öt darab fémpénzre van szükség. Ez kétféle módon állhat elő:
a) két darab 1 dináros, egy-egy darab 2, 5 és 10 dináros érmével, illetve
b) két darab 2 dináros, egy-egy darab 1, 5 és 10 dináros érmével.

3. Az ábrán levő kockahálózatot összehajtjuk kockává. Kiszámítjuk minden csúcsnál az oda befutó három lapon levő számok szorzatát. Hány különböző szorzatot kapunk ily módon? Mekkora ezen számok közül a legnagyobb?



Megoldás. Legtöbb nyolc különböző szorzatot kaphatunk, mivel nyolc csúcsa van a kockának. Ezek a következők:

$1\cdot2\cdot4=8$	$1\cdot5\cdot6=30$
$3\cdot2\cdot4=24$	$3\cdot5\cdot6=90$
$1\cdot2\cdot5=10$	$1\cdot4\cdot6=24$
$3\cdot2\cdot5=30$	$3\cdot4\cdot6=72$

Ez alapján hat különböző szorzatot kapunk: 8, 10, 24, 30, 72 és 90.
A feltételeknek megfelelő legnagyobb szorzat a 90.

4. Okoska elhatározta, hogy mindennap matematikai fejtörőket fog megoldani. Az első napon egyet, a másodikon kettőt, a harmadikon hármat, ezután újra 1-et, 2-t, 3-at és így tovább. A hét melyik napján oldotta meg az 1. feladatot, ha a 100. feladatot vasárnap oldotta meg?

Megoldás. 3 nap alatt $1+2+3=6$ fejtörőt oldott meg. Mivel $16\cdot 6+4=100$, és $16\cdot 3=48$, ezért 48 nap alatt 96 fejtörővel végzett. A fennmaradó 4 fejtörőből a 49. napon megoldott 1-et, az 50. napon kettőt. Az 51. napra már csak egy fejtörő maradt, ez volt a századik. Ha ez a nap vasárnap volt, akkor $51-49=2$, vagyis a 2. nap is vasárnap volt, az azt megelőző nap pedig csak szombat lehetett. Tehát Okoska az első feladatot szombaton oldotta meg.

6. évfolyam

1. Melyik az a legnagyobb természetes szám, amely oda-vissza olvasva is ugyanannyit ér? Tudjuk még róla, hogy számjegyeinek összege 30, és benne legfeljebb háromszor fordulhat elő ugyanaz a számjegy.

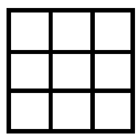
Megoldás. A keresett szám akkor lesz a legnagyobb, ha a lehető legtöbb számjegyből áll, vagyis a 30-at a lehető legtöbb egyjegyű természetes szám összegeként kellene előállítani.
Ehhez minél nagyobb alaki értékű számjegyeket kell választani, de úgy, hogy az összegük (a): $30:3=10<a\le 15=30:2$ legyen, mivel a keresett számban legfeljebb háromszor, de az oda-vissza olvasás miatt legalább kétszer előfordulhat ugyanaz a számjegy.
A három azonos számjegy a szám közepén kell, hogy álljon és páros szám kell hogy legyen, mivel a jegyek összege páros.
A legtöbb jegyű akkor lesz a szám, ha a három azonos jegy a 0 és $2\cdot(0+1+2+3+4+5)=2\cdot 15=30$ miatt a számban kétszer szereplő számjegyek: az 1, 2, 3, 4 és 5.
Így egy 13-jegyű palindrom-számhoz jutunk, amely az 5432100012345.

2. Mennyi lehet azon négy egymástól különböző prímszám szorzata, amelyek összege 34?

Megoldás. A 34-nél kisebb prímszámokból, azaz a 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 számok közül kell négy különbözőt kiválasztanunk, amelyek összege 34. Mivel a három legkisebb összege: $2+3+5=10$, ezért a legnagyobb nem haladhatja meg a 23-at. Tehát a választási lehetőségünk a
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23
számokra szűkül. Csak két esetben találunk megfelelő számnégyest:

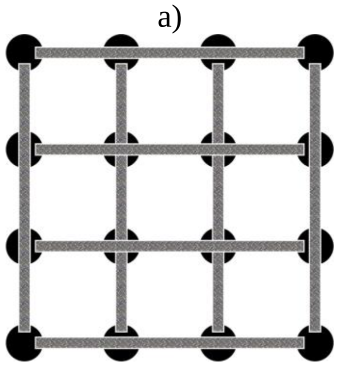
$3+5+7+19=34$, ekkor a szorzat: $3\cdot 5\cdot 7\cdot 19=1995$,
$3+7+11+13=34$, ekkor a szorzat: $3\cdot 7\cdot 11\cdot 13=3003$.

3. Ez egy 3×3-as „rács”. Egységnyi oldalú négyzetekből áll. Rakd össze:
a) nyolc darab három egység hosszúságú cérnából,
b) négy darab hat egység hosszúságú cérnából,
c) hat darab négy egység hosszúságú cérnából!
A cérnát elvágni nem szabad.

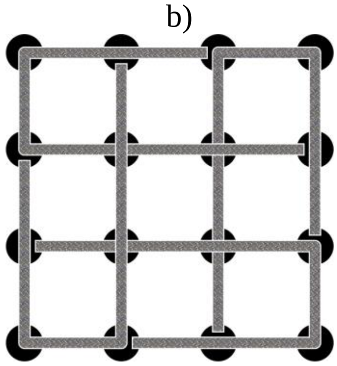


Megoldás.

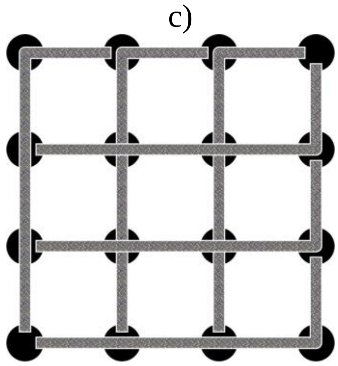
a)



b)



c)



4. Melyek azok a kétjegyű számok, amelyeket 13-mal osztva a kapott maradék annyi, mint a szám 11-gyel való osztásakor kapott hányados, és a 11-gyel való osztáskor kapott maradék is annyi, mint a 13-mal való osztáskor kapott hányados?

Megoldás. Legyen a keresett n szám 13-as osztási maradéka b, a hányadosa pedig a. Ekkor $n=13a+b$. Hasonlóan, ha az n szám 11-es osztási maradéka y, a hányadosa pedig x, akkor $n=11x+y$. A feladat szerint $a=y$ és $b=x$, azaz $13a+b=11b+a$, ahonnan $12a=10b$, tehát $6a=5b$. Az a és b egész számok, minden megoldás az $a=5$ és $b=6$ egy többszöröse. Ha $a=0$ és $b=0$, akkor $n=0$, ami nem kétjegyű. Ha $a=5$ és $b=6$, akkor $n=71$.
Ha $a=10$ és $b=12$, akkor már $n>100$, tehát csak egy ilyen kétjegyű szám van, és ez a szám a 71.

7. évfolyam

1. Nevezzünk egy számot *négyosztó*nak, ha négyjegyű, minden számjegye különböző, és mindegyik számjegye osztója a négyjegyű számnak.
a) Melyik a legkisebb *négyosztó* szám?
b) Melyik a legnagyobb *négyosztó* szám?
c) Adj meg még egy *négyosztó* számot, amely különbözik a fenti két kérdésben szereplő számtól.
(A nulla nem osztója egyik számnak sem.)

Megoldás. a) A legkisebb négyjegyű szám, amelynek számjegyei különböznek az 1234. Ez nem osztható hárommal. Az 1235 nem jöhet szóba, mert a második számjegye miatt párosnak kell lennie. Nézzük a következőt, az 1236-ot. Mivel itt mindegyik számjegy osztója a számnak, ezért ez a keresett legkisebb szám.
b) Nézzük a legnagyobb különböző számjegyű négyjegyű számot: 9876. Ez nem osztható 9-cel, mert a számjegyek összege 30. A legnagyobb szám, amely 9876-nál kisebb és osztható 9-cel a 9873. Ez viszont páratlan lévén 8-cal nem osztható. Hogy a 9-cel való oszthatóságot megőrizzük, nézzük a következő kilenccel kisebb számot, a 9864-et. Ez megfelel a feltételeknek, így ez a legnagyobb ilyen szám.
c) Sokféle válasz lehetséges.

2. Összeadjuk a páratlan számokat 1205**-től** 2015**-ig.**
a) Hány számot adunk így össze?
b) Melyik szám áll az így kapott összegben az egyesek helyén?
c) Osztható-e ez az összeg 3**-mal?**

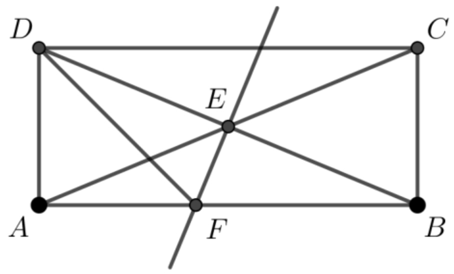
Megoldás. a) 1205-től 2015-ig összesen $2015-1204=811$ szám van. Mivel a felsorolást páratlan számmal kezdtük és azzal is fejeztük be, így 1-gyel több páratlan szám van, mint páros. A páratlan számok száma tehát $(811-1):2+1=405+1=406$.

	az összeg utolsó számjegye
1205	5
1207	2
1209	1
1211	2
1213	5
1215	0
1217	7
1219	6
1221	7
1223	0
1225	5

b) Kezdjük elvégezni az összeadást, és figyeljük, hogyan alakul az összeg utolsó számjegye.
A táblázatból leolvasható, hogy 1205-től kezdve összeadogatva a számokat 1225-nél ismét 5-ösre végződik. Mivel ez 20-asával ismétlődik, ezért 1245, 1265, 1285,…, 2005 összege is ötösre fog végződni. Ehhez a további 5 számot hozzáadva leolvasható, hogy az összeg 0-ra végződik.

c) Megfigyelhetjük, hogy csak 3, 6, 9,… darab szomszédos páratlan szám összege osztható hárommal, azaz a hárommal való oszthatóság szükséges feltétele, hogy a tagok összege osztható legyen hárommal. Mivel a) szerint 406 tag van és ez nem osztható hárommal, így az összeg sem osztható hárommal.

3. Egy téglalap átlójának felezőmerőlegese a hosszabb oldalból a rövidebb oldallal egyenlő hosszúságú szakaszt metsz ki. Mekkora szöget zárnak be a téglalap átlói?
(Minden egyes számolási lépésnél hivatkozz arra az összefüggésre, amely alapján a számolást végzed.)



Megoldás. Tekintsük az ábrán látható téglalapot. A feladat feltételei szerint $DB \perp EF$ és $AF = AD$. Mivel az F pont a DB átló szakaszfelező merőlegesén van, ezért egyenlő távolságra van a D és B pontoktól, tehát $FD = FB$. Így FBD háromszög egyenlő szárú.
Mivel a feltételek alapján az AFD háromszög is egyenlő szárú és derékszögű, ezért az alapon fekvő szögei egyenlők:

$$AFD = ADF = (180° - 90°) : 2 = 45°.$$

BFD szög kiegészítő szöge az AFD szögnek: $BFD\angle = 180° - 45° = 135°$. Korábban láttuk, hogy az FBD háromszög egyenlő szárú, így

$$FBD\angle = (180° - 135°) : 2 = 45° : 2 = 22{,}5°.$$

Mivel FBD szög és DBC szög pótszögek, így $DBC\angle = 90° - 22{,}5° = 67{,}5°$. Az EBC háromszög is egyenlő szárú a téglalap átlóinak tulajdonságából következően, így az átlók által bezárt szög nagysága $BEC\angle = 180° - 2 \cdot 67{,}5° = 180° - 135° = 45°$.

4. Anti és Benő barátok, $70\ \text{km}$**-re laknak egymástól. Egy reggel Benő** 6 **órakor, Anti** 8 **órakor kerékpárral elindult barátja lakása felé, és egyenletes sebességgel haladva** 10 **órakor találkoztak. Ekkor megállapították, hogy Anti és Benő sebességének az aránya** $3:2$ **volt. Hány kilométert kerékpározott Anti illetve Benő a találkozásig?**

I. megoldás. A fizikában ismert jelöléseket használva a két fiú mozgására felírhatjuk a következőket:

$$\begin{aligned} s_A &= 2v_A \\ s_B &= 4v_B \end{aligned}.$$

A megfelelő oldalakat összeadva, és fölhasználva azt, hogy $s_A + s_B = 70$ és $v_A = \frac{3}{2}v_B$, kapjuk: $70 = 2 \cdot \frac{3}{2}v_B + 4v_B$, ahonnan $v_B = 10$, $v_A = 15$. Ezeket a fenti egyenletrendszerbe behelyettesítve megkapjuk, hogy Anti $30\ km$-t, Benő $40\ km$-t kerékpározott.

II. megoldás. Mivel Anti másfélszer gyorsabb volt, így ugyanannyi idő alatt az Anti és Benő által megtett út aránya $3:2$. De mivel Benő kétszer annyi ideig biciklizett, ezért ez az arány $3:4$. Így a 70 kilométerből Anti $30\ km$-t, Benő $40\ km$-t tett meg.

8. évfolyam

1. Megkérdezték Furfangos Fannyt, mennyi a házszáma és ő így válaszolt:
„Ha a házszámom osztható 3-mal, akkor 50 és 59 között van."
„Ha a házszámom nem osztható 4-gyel, akkor 60 és 69 között van."
„Ha a házszámom nem osztható 6-tal, akkor 70 és 79 között van."
Ezek alapján mennyi Furfangos Fanny házszáma?

Megoldás. Legyen k Furfangos Fanny házszáma. Ekkor,
a) ha k osztható 3-mal, akkor $50 \le k \le 59$, vagyis $k \in \{51, 54, 57\}$, de mivel ezek nem oszthatóak 4-gyel, akkor ellentmondásra jutunk, mert $k \le 59$ és $k \ge 60$.
b) ha k nem osztható 3-mal, akkor nem osztható 6-tal sem, tehát $70 \le k \le 79$, és hasonlóan az előző esethez, a házszám osztható 4-gyel. Így az egyetlen lehetséges szám a 76, mert a 72 nem lehet, hiszen osztható 3-mal.

2. Hány olyan nyolcjegyű páros szám van, amelynek minden számjegye 1-es vagy 4-es, és a páros számú helyeken álló számjegyek összege egyenlő a páratlan számú helyeken álló számjegyek összegével?

Megoldás. A csupa 1-esekből álló szám páratlan. Az utolsó számjegy a 4-es. Mivel az utolsó helyen 4-es áll, ezért a páratlan helyeken is kell lennie négyesnek. Ha csak 1-eseket írnánk a páratlan helyekre, akkor nem lehetne egyenlő a két összeg. Bontsuk fel a feladatot esetekre!
I. Két 4-est helyezünk el, a többi 1-es. A páros helyeken már elhelyeztük, a páratlan helyeken pedig négy közül választhatunk. Ez 4 számot jelent.
II. Négy 4-est helyezünk el (és négy 1-est). A három szabad páros helyre egy 4-est helyezünk el, ezt háromféleképpen tehetjük meg. A négy páratlan helyre két 4-est helyezünk el, ami hatféleképpen lehetséges. Ez összesen $3 \cdot 6 = 18$ számot jelent.
III. Hat 4-est és két 1-est helyezünk el. Ebben az esetben egyszerűbb az egyesek lehetséges elhelyezkedését számolni. Páros helyeken három lehetőségünk van, páratlan helyeken pedig négy. Összesen 12 szám.
IV. Végül, ha nyolc számegy 4-es, 1-es pedig nincs. Egy ilyen szám van.
Összesen $4+18+12+1=35$ a feltételeknek megfelelő szám van.

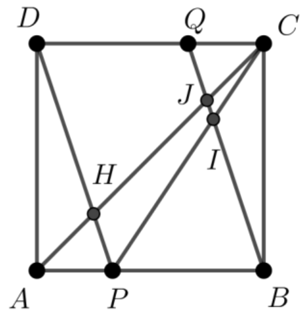
3. Fel lehet-e írni az $1,\ 2,\ 3, \ldots,\ 9$ számokat egy kör kerületére úgy, hogy bármelyik két szomszédos szám összegét számolva olyan számot kapjunk, amelyik nem osztható sem 3-mal, sem 5-tel, sem 7-tel?

Megoldás. A számokat egy kör kerületére írva mindegyiknek két szomszédja lesz. A legkisebb összeg a 3, a legnagyobb a 17. Figyelembe véve, hogy két szomszédos szám összege nem lehet osztható 3-mal, 5-tel és 7-tel, a lehetséges összegek: 4, 8, 11, 13, 16, 17. Ekkor az egyes számok szomszédai a következők lehetnek:

szám	1	2	3	4	5	6	7	8	9
lehetséges szomszéd	3 7	6 9	1 5 8	7 9	3 6 8	2 5 7	1 4 6 9	3 5 9	2 4 7 8

Mivel az 1-esnek, a 4-esnek és a 2-esnek csak a 3-7, 7-9, 9-6 lehetnek a szomszédai, ezért a 3-1-7-4-9-2-6 csak ilyen (vagy fordított) sorrendben követhetik egymást. A még fel nem használt számok közül a 6-ost csak az 5-ös, azt pedig csak a 8-as követheti, aminek a 3-as lesz a másik szomszédja. A kapott felírás teljesíti a feltételeket, és mivel minden lépés egyértelmű volt, csak ez az egy megoldás van.

4. Adott a $36\,\mathrm{cm}^2$ területű $ABCD$ négyzet. Az AB oldal A csúcshoz közelebbi harmadolópontját nevezzük P-nek, a CD oldal C-hez közelebbi harmadolópontját pedig Q-nak. Az AC, DP, PC és QB szakaszok egy négyszöget határoznak meg. Mekkora ennek a négyszögnek a területe?



Megoldás. Készítsünk ábrát, és jelöljük a négyszög csúcsait. A négyzet oldala $6\,cm$ hosszú. Figyeljük meg a hasonló háromszögeket! $APH\Delta \sim DHC\Delta$, mert a megfelelő szögeik egybevágóak (csúcsszögek, illetve váltószögek). Mivel a háromszögek hasonlóságának aránya $1:3$, ezért a párhuzamos alapokra húzott magasságaik aránya is $1:3$. Innen az $APH\Delta$ AP alapra húzott magassága $\frac{3}{2}\,cm$, valamint $T_{APH\Delta} = \frac{2\cdot\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{2}\,cm^2$.

Hasonlóan a $PBI\Delta \sim ICQ\Delta$, a hasonlóság aránya $2:1$. Innen a $PBI\Delta$ PB alapjára húzott magassága $4\,cm$, a területe pedig : $T_{PBI\Delta} = \frac{4\cdot 4}{2} = 8\,cm^2$.

Végül az $ABJ\Delta \sim JCQ\Delta$, a hasonlóság aránya $3:1$. Az $ABJ\Delta$ magassága $\frac{9}{2}\,cm$,

területe: $T_{ABJ\Delta} = \frac{6\cdot\frac{9}{2}}{2} = \frac{27}{2}\,cm^2$.

A kapott területekből kiszámítható, hogy:

$$T_{PIJH} = T_{ABJ\Delta} - (T_{APH\Delta} + T_{PBI\Delta}) = \frac{27}{2} - \frac{3}{2} - 8 = 4\,\mathrm{cm}^2.$$

9. évfolyam

1. Határozd meg mindazokat az x és y természetes számokat, amelyekre

$$x^2-1=y^2+2014.$$

Megoldás. Az $x^2-1=y^2+2014$ kifejezést átírhatjuk $x^2-y^2=2015$, illetve $(x-y)(x+y)=2015$ formába. Mivel $x,y\in N$, ezért $x-y<x+y$.

Mivel $2015=5\cdot13\cdot31$, ezért a következő lehetőségek állnak fenn:

$$2015=1\cdot2015$$
$$2015=5\cdot403$$
$$2015=13\cdot155$$
$$2015=31\cdot65.$$

$x-y=1$ és $x+y=2015$ esetén $x=1008$ és $y=1007$.

$x-y=5$ és $x+y=403$ esetén $x=204$ és $y=199$.

$x-y=13$ és $x+y=155$ esetén $x=84$ és $y=71$.

$x-y=31$ és $x+y=65$ esetén $x=48$ és $y=17$.

2. Inci és Anci filmnézés közben limonádét iszogattak a moziban. Inci közepes limonádét vásárolt, Anci pedig nagy limonádét, amely 50%-kal nagyobb, mint a közepes limonádé. Miután mindketten megitták limonádéjuk $\frac{3}{4}$ részét, Anci Incinek adta megmaradt limonádéja egyharmadát és még $0.5\ dl$-t. Miután a film befejeződött és megitták az összes limonádét, megállapították, hogy mindketten ugyanannyi mennyiségű limonádét fogyasztottak el. Hány deciliter limonádét ivott meg összesen Inci és Anci?

Megoldás. Ha x jelöli a közepes limonádé mennyiségét deciliterben, amit Inci vásárolt, akkor Anci $1.5x$ deciliter limonádét vett. Inci Ancitól

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot1.5x+0.5=\frac{1}{8}x+0.5$$

deciliter limonádét kapott. Ez azt jelenti, hogy Inci összesen $x+\frac{1}{8}x+0.5=\frac{9}{8}x+0.5$ deciliter limonádét ivott meg.

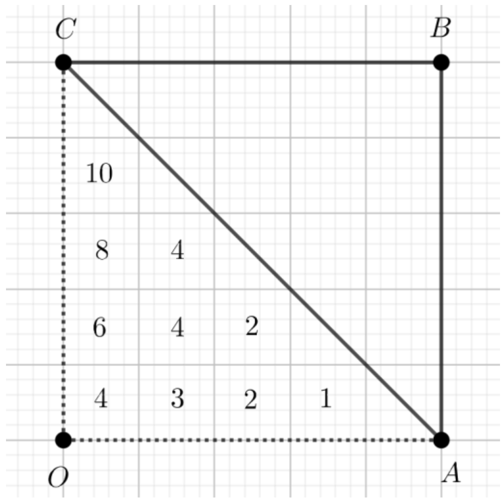
Anci viszont összesen $1.5x-\left(\frac{1}{8}x+0.5\right)=\frac{11}{8}x-0.5$ deciliter limonádét fogyasztott el.

Ekkor $\frac{11}{8}x-0.5=\frac{9}{8}x+0.5$, azaz $\frac{2}{8}x=1$, ahonnan következik, hogy $x=4$.

Ez azt jelenti, hogy a közepes limonádé mennyisége $4\ dl$, a nagy limonádé mennyisége $6\ dl$, és összesen $10\ dl$ limonádét ittak meg a filmvetítés ideje alatt.

3. Hány olyan konvex (domború) sokszög van amelynek három egymást követő csúcsa $A(5,0)$, $B(5,5)$ és $C(0,5)$ koordinátájú pont, a többi csúcsának koordinátái pedig szintén nem negatív egész számok?

Megoldás. Háromszög 1 van. Négyszög negyedik csúcsa olyan rácspont lehet, amely az ACO háromszög belsejében vagy az AO illetve CO oldalon van. Az ilyen pontok száma 15, így ennyi négyszög van. Ötszögnél a negyedik D csúcs helyét rögzítsük először, az ötödik csúcs lehetséges helyzeteinek számát D helyének megfelelően rácspontra írjuk. Például, $D(3,1)$ pont után csak a $E(4,0)$ ponttal kapunk konvex ötszöget, ezért E-hez 1-et írunk.
Összesen
$10+8+4+6+4+2+4+3+2+1=44$
ötszög lehetséges.



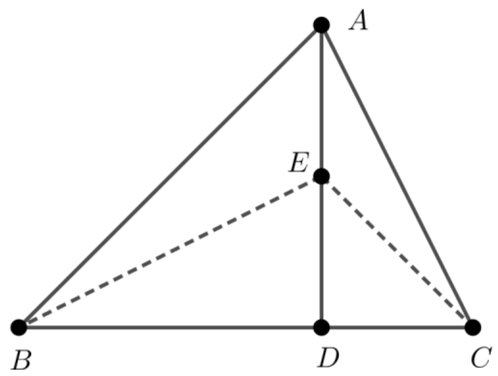
Hasonló módon számolhatjuk össze a hatszögeket, amelyekből $8+5+2+1=16$ van.

Hétszög pedig csak 1 van.

Több csúcsú sokszög nem lehetséges, mert akkor az A, B és C csúcsokon kívül legalább 5 csúcsból vagy legalább 2-nek megegyezik az első vagy második koordinátája és így a sokszög konkáv vagy három csúcs egy egyenesre esik.
Így az összes lehetséges sokszög száma: $1+15+44+16+1=77$.

4. Legyen ABC tetszőleges háromszög. Az adott háromszög $\overline{AD}$ magasságvonalán kijelölünk egy E pontot. Bizonyítsd be, hogy igaz az $|AC|^2-|CE|^2=|AB|^2-|EB|^2$ egyenlőség!

Megoldás. A BDA és BDE háromszögekre alkalmazva a Pitagorasz tételt adódik:
$|AB|^2=|AD|^2+|BD|^2$, $|EB|^2=|ED|^2+|BD|^2$ és $|AB|^2-|EB|^2=|AD|^2-|ED|^2$.
Az ADC és EDC háromszögekre alkalmazva a Pitagorasz tételt adódik:
$|AC|^2=|AD|^2+|DC|^2$, $|EC|^2=|ED|^2+|DC|^2$ és $|AC|^2-|EC|^2=|AD|^2-|ED|^2$.
Ebből következik, hogy $|AC|^2-|CE|^2=|AB|^2-|EB|^2$.



10. évfolyam

1. Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$x^2 - y^2 = 2(x+y),$$
$$x^2 + y^2 = 5(x-y).$$

Megoldás. Az első egyenlet bal oldalát tényezőre bontjuk, mint $(x-y)(x+y) = 2(x+y)$, majd átrendezéssel tényezőkre bontjuk: $(x+y)(x-y-2) = 0$. A szorzat nulla, ha legalább az egyik tényezője nulla, így két lehetőségünk van.

I. Ha $x+y=0$, akkor ebből x-et behelyettesítve a második egyenletbe kapjuk, hogy $2y^2 = -10y$. Átrendezéssel adódik, hogy $y(y+5)=0$, amelyből $y_1 = 0$, illetve $y_2 = -5$. Ennek megfelelően kapjuk meg, hogy $x_1 = 0$, illetve $x_2 = 5$.

II. Ha $x-y-2=0$, akkor ebből x-et behelyettesítve a második egyenletbe kapjuk, hogy $2y^2+4y-6=0$, amelyből $y_3 = 1$, illetve $y_4 = -3$. Ennek megfelelően kapjuk meg, hogy $x_3 = 3$, illetve $x_4 = -1$. Az egyenletrendszer megoldáshalmaza:

$$M = \{(0,0),(5,-5),(3,1),(-1,-3)\}.$$

2. Van-e olyan számrendszer, amelyben az 572 **alakú szám osztható a** 275 **alakú számmal?**

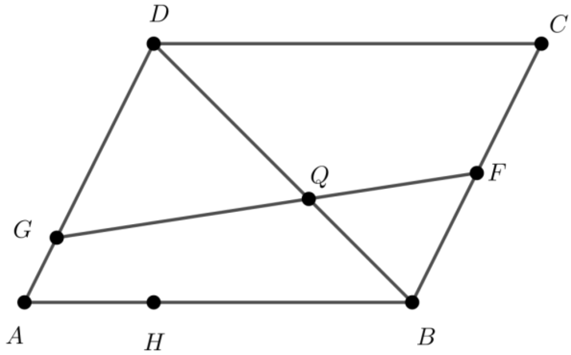
Megoldás. Tegyük fel, hogy van ilyen számrendszer, s ennek x alapszáma 1-nél nagyobb egész szám. Az oszthatóság pontosan akkor teljesül, ha az osztandó és osztó hányadosa egész szám, azaz ha

$$\frac{5x^2+7x+2}{2x^2+7x+5} = \frac{(5x+2)(x+1)}{(2x+5)(x+1)} = \frac{5x+2}{2x+5} = \frac{2(2x+5)+x-8}{2x+5} = 2 + \frac{x-8}{2x+5}.$$

Vizsgáljuk most meg az $\frac{x-8}{2x+5} < 1$ egyenlőséget. Mivel $2x+5>0$, ezért $x-8 < 2x+5$, azaz $x > -13$, így az egyenlőtlenség minden 1-nél nagyobb egész szám esetén teljesül.

A törtrész csak akkor nulla, ha a számláló nulla, azaz ha $x = 8$. Ebből következik, hogy az oszthatóság csak a 8-as számrendszerben teljesül.

3. Az $ABCD$ **paralelogramma** AB **oldalának** A**-hoz közelebbi harmadoló pontja** H**, a** BC **oldalának felezőpontja** F **és** DA **oldalának** A**-hoz legközelebb levő negyedelő pontja** G**. Bizonyítsd be, hogy** FG**,** CH **és** DB **egyenesek egy ponton mennek át!**



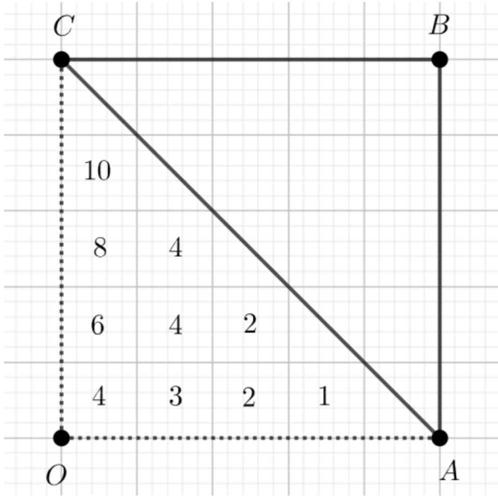
Megoldás. Megmutatjuk, hogy GF és CH ugyanabban a pontban metszik a DB átlót. Jelölje P a CH és DB metszéspontját, Q pedig a GF és DB metszéspontját.

A HBP és a CDP háromszögek hasonlók, mert a szögeik egyenlők. A hasonlóság miatt

$BP : PD = BH : DC = 2:3$.
A FQB és a GQD háromszögek hasonlók, mert a szögeik egyenlők. A hasonlóság miatt $BQ : QD = BF : DG = 2:3$.
Azt kapjuk, hogy $BP : PD = 2:3 = BQ : QD$, ez csak akkor lehetséges ha P és Q egybeesik. Tehát FG, CH és DB egy ponton mennek át.

4. Hány olyan konvex (domború) sokszög van amelynek három egymást követő csúcsa $A(5,0)$, $B(5,5)$ és $C(0,5)$ koordinátájú pont, a többi csúcsának koordinátái pedig szintén nem negatív egész számok?

Megoldás. Háromszög 1 van. Négyszög negyedik csúcsa olyan rácspont lehet, amely az ACO háromszög belsejében vagy az AO illetve CO oldalon van. Az ilyen pontok száma 15, így ennyi négyszög van. Ötszögnél a negyedik D csúcs helyét rögzítsük először, az ötödik csúcs lehetséges helyzeteinek számát D helyének megfelelően rácspontra írjuk. Például, $D(3,1)$ pont után csak a $E(4,0)$ ponttal kapunk konvex ötszöget, ezért E-hez 1-et írunk.
Összesen $10+8+4+6+4+2+4+3+2+1=44$ ötszög lehetséges.



Hasonló módon számolhatjuk össze a hatszögeket, amelyekből $8+5+2+1=16$ van.

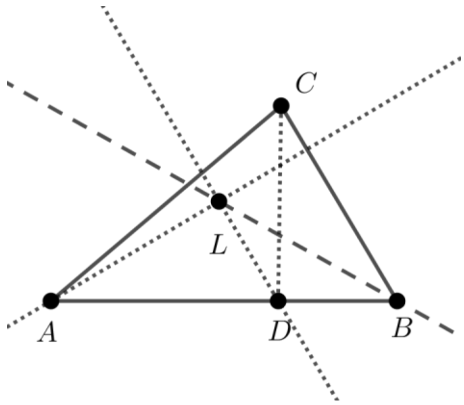
Hétszög pedig csak 1 van.

Több csúcsú sokszög nem lehetséges, mert akkor az A, B és C csúcsokon kívül legalább 5 csúcsból vagy legalább 2-nek megegyezik az első vagy második koordinátája és így a sokszög konkáv vagy három csúcs egy egyenesre esik.
Így az összes lehetséges sokszög száma: $1+15+44+16+1=77$.

11. évfolyam

1. Az ABC hegyesszögű háromszögben legyen D pont a C csúcsból húzott magasság talppontja úgy, hogy $AD = BC$ érvényes. Ha L pont a D pontból húzott merőleges talppontja az A csúcsból szerkesztett magasságra, akkor igazold, hogy a BL az $ABC\angle$ szögfelezője!

Megoldás. Mivel $DAL\angle = 90° - ABC\angle = BCD\angle$ és $AD = CB$, a két derékszögű háromszög, ALD és BCD a SZÖG-OLDAL-SZÖG egybevágósági tétel alapján egybevágó, és ezért befogóik is egybevágóak, azaz $LD = BD$. Tehát LDB háromszög egyenlő szárú, s így $DLB\angle = DBL\angle$.



Ezek alapján $180° = LAB\angle + ABL\angle + BLA\angle = 90° - ABC\angle + ABL\angle + 90° + ABL\angle$, amiből következik, hogy $2 \cdot ABL\angle = ABC\angle$, amit bizonyítani kellett.

2. Oldd meg az egyenletrendszert!

$$\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2,$$
$$\log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2,$$
$$\log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2.$$

Megoldás. Az egyenletrendszer értelmezési tartománya miatt $x > 0, y > 0, z > 0$, ezért átalakítható a következő alakba:

$$\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 y + \frac{1}{2}\log_2 z = \log_2 4,$$
$$\log_3 y + \frac{1}{2}\log_3 z + \frac{1}{2}\log_3 x = \log_3 9,$$
$$\log_4 z + \frac{1}{2}\log_4 x + \frac{1}{2}\log_4 y = \log_4 16,$$

Illetve

$$x\sqrt{yz} = 4, \quad y\sqrt{zx} = 9, \quad z\sqrt{xy} = 16.$$

Összeszorozva a fenti egyenleteket adódik, hogy $(xyz)^2 = 576 = 24^2$, vagyis $xyz = 24$.

Visszahelyettesítve a kapott értéket az első egyenletbe, kapjuk a megoldásokat:

$$x = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{27}{8}, \quad z = \frac{32}{3}.$$

3. Határozd meg mindazon x és y valós számokat, amelyekre

$$x^2-2x\cos(xy)+1=0 \,\textbf{.}$$

Megoldás. Az adott egyenlet átalakítás után:

$x^2-2x\cos(xy)+\cos^2(xy)+\sin^2(xy)=0$, azaz $(x-\cos(xy))^2+\sin^2(xy)=0$ alakban írható fel, s ez a rendszer ekvivalens az $x-\cos(xy)=0$ és $\sin(xy)=0$ egyenletrendszerrel. Ha $\sin(xy)=0$, akkor $\cos(xy)=\pm1$, ahonnan $x=1$ vagy $x=-1$.
Ha $x=1$, akkor $\cos y=1$, ahonnan $y=2k\pi$.
Ha $x=-1$, akkor $\cos(-y)=-1$, ahonnan $y=(2m+1)\pi$.
Az egyenlet megoldáshalmaza: $M=\{(1,2k\pi),k\in\mathbb{Z}\}\cup\{(-1,(2m+1)\pi),m\in\mathbb{Z}\}$.

4. Melyik n természetes szám esetén van a $\left(2+x^2\right)^n+\left(2+\frac{1}{x^2}\right)^n=18$ egyenletnek legtöbb különböző valós gyöke?

Megoldás. Felhasználva a számtani (aritmetikai) és a mértani (geometriai) közép közti egyenlőtlenséget, valamint, hogy $(\forall a)(a\in\mathbb{R}\Rightarrow a^2+\frac{1}{a^2}\geq 2)$, felírhatjuk, hogy

$$18=\left(2+x^2\right)^n+\left(2+\frac{1}{x^2}\right)^n\geq 2\cdot\sqrt{\left(2+x^2\right)^n\cdot\left(2+\frac{1}{x^2}\right)^n}=2\cdot\sqrt{\left(4+2\cdot\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+1\right)^n}\geq$$

$$\geq 2\cdot\sqrt{(4+2\cdot2+1)^n}=2\cdot3^n.$$

Ebből következik, hogy $18\geq2\cdot3^n$ és adódik, hogy $n\in\{0,1,2\}$. Ha $n=0$, akkor $\left(2+x^2\right)^0+\left(2+\frac{1}{x^2}\right)^0=18$ esetén nincs valós megoldás. Ha $n=1$, akkor $\left(2+x^2\right)^1+\left(2+\frac{1}{x^2}\right)^1=18$, s a valós megoldások az $x^4-14x^2+1=0$ egyenlet megoldásai, vagyis $x^2=7\pm4\sqrt{3}=4\pm2\cdot2\sqrt{3}+3=\left(\pm2\pm\sqrt{3}\right)^2$, amiből következik, hogy a megoldások halmaza $M=\left\{2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3},\ -2+\sqrt{3},\ -2-\sqrt{3}\right\}$. Ha $n=2$, akkor $\left(2+x^2\right)^2+\left(2+\frac{1}{x^2}\right)^2=18$ alakú az egyenlet, s a valós megoldások az $x^4+4x^2-10+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^2}=0$ szimmetrikus egyenlet megoldásai. Tehát $x^2+\frac{1}{x^2}=a$ helyettesítéssel kapjuk az $\left(a^2-2\right)+4a-10=0$ egyenletet, amelynek a megoldásai $a_1=2$, $a_2=-6$, innen, első esetben $x^2+\frac{1}{x^2}=2$, ahonnan $x^4-2x^2+1=0$, amelynek megoldásai $x=1$ és $x=-1$, a második esetben pedig $x^2+\frac{1}{x^2}=-6$, illetve $x^4+6x^2+1=0$, amely nem ad valós megoldást. A keresett érték $n=1$.

12. évfolyam

1. Egy természetes számot sikeresnek nevezünk akkor, ha tízes számrendszerbeli alakjában szereplő számjegyeit két csoportra lehet osztani úgy, hogy a csoportokban lévő számjegyek összege megegyezzen. Keresd meg azt a legkisebb N természetes számot, amelyre N is és $N+1$ is sikeres!

Megoldás. Nyilvánvaló, hogy egy tetszőleges sikeres szám számjegyeinek összege páros. N és $N+1$ egyszerre csak akkor lehet sikeres, ha N kilencesre végződik. Ellenkező esetben ugyanis N és $N+1$ számjegyei összegének paritása eltérő lenne. N nem lehet kétjegyű szám, mert az egyetlen lehetséges kétjegyű szám ekkor az $N=99$ lenne, de ekkor $N+1=100$ nem sikeres szám. Tehát a háromjegyű N számokat kell vizsgálni, vagyis:

$$N=\overline{xy9}$$

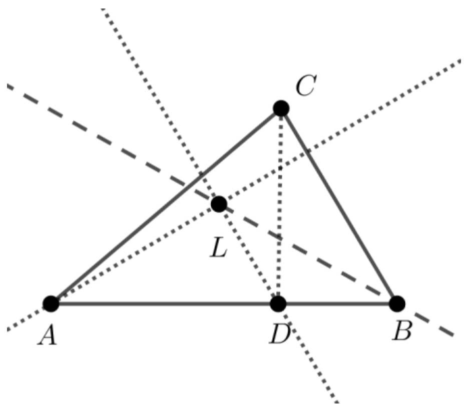
ahol $y<9$, így

$$N+1=\overline{x(y+1)0}\,.$$

Ekkor $x+y=9$ és $x=y+1$, amiből $x=5,\ y=4$. A keresett sikeres számok tehát az 549 és 550.

2. Az ABC hegyesszögű háromszögben legyen D pont a C csúcsból húzott magasság talppontja úgy, hogy $AD=BC$ érvényes. Ha L pont a D pontból húzott merőleges talppontja az A csúcsból szerkesztett magasságra, akkor igazold, hogy a BL az $ABC\angle$ szögfelezője!

Megoldás. Mivel $DAL\angle=90°-ABC\angle=BCD\angle$ és $AD=CB$, a két derékszögű háromszög, ALD és BCD a SZÖG-OLDAL-SZÖG egybevágósági tétel alapján egybevágó, és ezért befogóik is egybevágóak, azaz $LD=BD$. Tehát LDB háromszög egyenlő szárú, s így $DLB\angle=DBL\angle$.



Ezek alapján $180°=LAB\angle+ABL\angle+BLA\angle=90°-ABC\angle+ABL\angle+90°+ABL\angle$, amiből következik, hogy $2\cdot ABL\angle=ABC\angle$, amit bizonyítani kellett.

3. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\log_{0,5}(x-1).$$

Megoldás. Mivel az egyenlet bal oldala nemnegatív, így $\log_{0,5}(x-1)\geq 0$ kell legyen, ahonnan $0<x-1\leq 1\Rightarrow 1<x\leq 2$. Így az egyenlet értelmezési tartománya $D=(1,2]$. Vegyük észre továbbá, hogy

$$x-2\sqrt{x-1}=\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2$$

és

$$x+2\sqrt{x-1}=\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2,$$

ezért az egyenlet felírható a következő alakban:

$$\left|x-\sqrt{x-1}\right|+\left|x+\sqrt{x-1}\right|=\log_{0,5}(x-1).$$

Ha figyelembe vesszük az értelmezési tartományt, akkor az egyenlet felírható abszolút értékek nélkül a

$$\sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1=\log_{0,5}(x-1)$$

alakban, ahonnan

$$\log_{0,5}(x-1)=2.$$

Innen

$$x-1=0,5^2 \Leftrightarrow x=1+\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=\frac{5}{4}.$$

Könnyen leellenőrizhető, hogy ez a szám valóban megoldása az egyenletnek.

4. Határozd meg, hogy mely n természetes számok esetén lesz az

$$S=2015^n+2015^{n-1}+...+2015+1$$

kifejezés osztható 2014**-gyel! Határozd meg a két legkisebb ilyen számot!**

Megoldás. Először belátjuk, hogy $S-(n+1)$ osztható 2014-gyel. Mivel

$$\begin{aligned}&S-(n+1)=\\&=S-(1+1+...+1)=\\&=\left(2015^n-1\right)+\left(2015^{n-1}-1\right)+...+(2015-1)+(1-1),\end{aligned}$$

Ezért bármely $k>0$ természetes szám esetén

$$2015^k-1=(2015-1)\left(2015^{k-1}+2015^{k-2}+...+1\right),$$

így a $\left(2015^k-1\right)$ tagok mindegyike, illetve $S-(n+1)$ is osztható 2014-gyel.

Ebből következik, hogy S akkor és csakis akkor osztható 2014-gyel, ha $(n+1)$ is osztható 2014-gyel.

A két legkisebb természetes szám, amelyekre S osztható 2014-gyel, a 2013 és a 4027.

A XIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

5. évfolyam
1. Csikós Petra, Október 10. Általános Iskola, Szabadka, **I. díj**
2. Árok Anna, Jovan Jovanović Zmaj Általános Iskola, Magyarkanizsa, **II. díj**
3. Nagy Albert, Petőfi Sándor Általános Iskola, Hajdújárás, **II. díj**
4. Erdélyi Szonya, Arany János Általános Iskola, Oromhegyes, **III. díj**
5. Lázár Anna, Jovan Jovanović Zmaj Általános Iskola, Magyarkanizsa, **III. díj**

6. évfolyam
1. Kovács Alex, Petőfi Brigád Általános Iskola, Kúla, **I. díj**
2. Gál József, Ady Endre Kisérleti Általános Iskola, Kishegyes, **II. díj**
3. Apró Dorottya, Jovan Mikić Általános Iskola, Szabadka, **III. díj**

7. évfolyam
1. Fodor Gábor, Majsai úti Általános Iskola, Szabadka, **I. díj**
2. Süli Ákos, Széchenyi István Általános Iskola, Szabadka, **II. díj**
3. Fehér Konrád, Jovan Mikić Általános Iskola, Szabadka, **II. díj**
4. Molnár Dávid, Kizur István Általános Iskola, Szabadka **III. díj**

8. évfolyam
1. Besnyi Levente, Jovan Jovanovic Zmaj Általános Iskola, Szabadka, **I. díj**
2. Paróczi Orsolya, Ady Endre Kísérleti Általános Iskola, Kishegyes, **II. díj**
3. Kószó Emília, Ady Endre Általános Iskola, Torda, **III. díj**

10. évfolyam
1. Szilágyi Éva, Jovan Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék, **I. díj**
2. Illés Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

11. évfolyam
1. Szögi Evelin, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Gulyás Oldal Laura, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**

12. évfolyam
1. Dobó Márk, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Gyarmati Edvárd, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **II. díj**
3. Varga Somogyi Árpád, Svetozar Marković Gimnázium, Újvidék, **III. díj**
4. Borsos Teodóra, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

A XIV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

A versenyzők és az általuk állított fraktál-karácsonyfa.

XIV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2016. december 3.

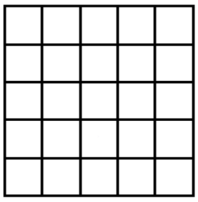
5. évfolyam

1. Egy játékkészletben 3 kocka tömege annyi, mint 2 hengeré, 10 hengeré annyi, mint 6 téglatesté, 5 kockáé pedig annyi, mint 3 gömbé. Hány gömb nyom annyit, mint 4 téglatest?

2. Hány lapos az a könyv, amelynek oldalait a $3.$ oldallal kezdték számozni, és a számozáshoz 1090 db számjegyet használtak fel?

3. Egy zenei osztályban kétszer annyi diák tanul zongorázni, mint ahány hegedül. Öten mindkét hangszeren játszanak. Hányan zongoráznak és hányan hegedülnek ebben az osztályban, ha összesen 22 tanuló játszik a két hangszer valamelyikén?

4. Az 5×5-ös négyzetet a rácsvonalak mentén darabold fel hét téglalapra úgy, hogy a téglalapok között ne legyen két egyforma!



A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

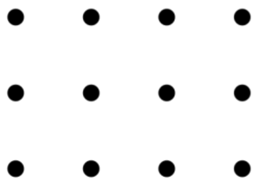
Jó munkát!

XIV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2016. december 3.

6. évfolyam

1. Hány olyan téglalap van, amelynek csúcsai az alábbi négyzetrács rácspontjaira esnek?



2. Azonos betűk azonos természetes számokat rejtenek. Fejtsd meg a betűk jelentését:

$$a+b=28,\ 5\cdot b=c,\ c-d=47,\ c:9=a.$$

3. Egy lottóhúzás eredménye a következő volt: 35, 40, 44, 46, 55. **A számokat persze más sorrendben húzták ki. Gabi a televízió képernyője előtt ülve figyelte a húzást és megállapította, hogy a kihúzott számok átlaga mindig egész szám volt. Milyen sorrendben húzhatták ki a lottószámokat?**

4. Oszd fel az óra számlapját három részre úgy, hogy az egyes részekben a számjegyek mennyisége és a számok összege is három egymást követő természetes szám legyen!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XIV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2016. december 3.

7. évfolyam

1. **A** 2016 **olyan négyjegyű szám, amelynek ha az utolsó számjegyét elosztom az első számjegyével, akkor az első három számjegyének összegét kapom, azaz** $6:2=2+0+1$**. Hány ilyen tulajdonságú négyjegyű szám van összesen?**

2. Pista leírt egy számsorozatot, amelynek első három tagja: 1, 0, 2**. A következő tagot úgy kapta meg, hogy az előző kettőt összeszorozta (**$0\cdot 2$**), majd a kapott szorzathoz hozzáadta a közvetlenül előttük lévőt:** $0\cdot 2+1=1$**. Ekkor a sorozat már négytagú lett:** 1, 0, 2, 1**. Majd folytatta ennek a szabálynak az alkalmazását mindaddig, amíg el nem jutott a sorozat** 2016**. tagjáig. Vajon a** 2016**. tag páros vagy páratlan szám?**

3. Az ABC **háromszög** AB **oldalán adott a** D **pont, az** AC **oldalán pedig az** E **pont úgy, hogy a** DEB **töröttvonal az** ABC **háromszöget három egyenlő területű háromszögre osztja. Az** ADE **háromszög egy** $6\ cm$ **oldalú szabályos háromszög. Mekkora az** AB **és az** AC **oldal hossza? Lehet-e a** BC **oldal hossza** $14\ cm$**?**

4. Anna Csókáról biciklizett hazafelé. Azt tervezte, hogy $15:00$ **órakor ér haza. Mivel az út** $3/4$ **részét a tervezett idő** $2/3$**-a alatt tette meg, ezért lassított és így a tervezett időre ért haza. Milyen arányban van az „első” sebesség a „második” sebességgel?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XIV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2016. december 3.

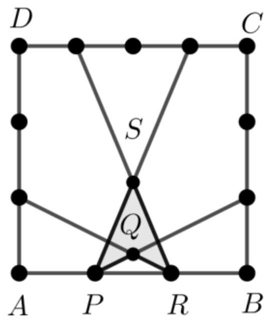
8. évfolyam

1. Pista leírt egy számsorozatot, amelynek első három tagja: 1, 0, 2**. A következő tagot úgy kapta meg, hogy az előző kettőt összeszorozta** $(0 \cdot 2)$**, majd a kapott szorzathoz hozzáadta a közvetlenül előttük lévőt:** $0 \cdot 2 + 1 = 1$**. Ekkor a sorozat már négytagú lett:** 1, 0, 2, 1**. Majd folytatta ennek a szabálynak az alkalmazását mindaddig, amíg el nem jutott a sorozat** 2016**. tagjáig. Vajon a** 2016**. tag páros vagy páratlan szám?**

2. Az $x < y < z < t < s$ **az öt legkisebb egymást követő természetes szám, melyek rendre oszthatóak** 7**-tel,** 6**-tal,** 5**-tel,** 4**-gyel és** 3**-mal. Melyek ezek a számok?**

3. Fekete Kalóz kapitány és legénysége hosszas küzdelem után elfoglalt egy kereskedőhajót. A hajón talált arannyal teli kincsesláda tartalmának harmadát Fekete Kalóz kapitány megtartotta magának. A többit szétosztotta a legénység tagjai között. A rangidős kapott 20 **aranyat és a maradék tizedét, a következő** 40 **aranyat és a maradék tizedét, a harmadik** 60 **aranyat és a maradék tizedét és így tovább. Így a legénység tagjai mind ugyanannyi aranyat kaptak. Összesen hány kalóz élte túl a küzdelmet és osztozott a kincsen? Mennyi arany volt a ládában?**

4. Az $ABCD$ **négyzet három oldalát három, a negyediket pedig négy egyenlő részre osztottuk, majd a megfelelő pontok összekötésével megkaptuk a satírozott** $PQRS$ **négyszöget. Határozd meg a satírozott és a nem satírozott terület arányát!**



A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XIV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2016. december 3.

9. évfolyam

1. Fekete Kalóz kapitány és legénysége hosszas küzdelem után elfoglalt egy kereskedőhajót. A hajón talált arannyal teli kincsesláda tartalmának harmadát Fekete Kalóz kapitány megtartotta magának. A többit szétosztotta a legénység tagjai között. A rangidős kapott 20 aranyat és a maradék tizedét, a következő 40 aranyat és a maradék tizedét, a harmadik 60 aranyat és a maradék tizedét és így tovább. Így a legénység tagjai mind ugyanannyi aranyat kaptak. Összesen hány kalóz élte túl a küzdelmet és osztozott a kincsen? Mennyi arany volt a ládában?

2. Legyenek $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2015}, x_{2016}$ egymást követő egész számok, és legyen

$$-x_0 + x_1 - x_2 + x_3 - \dots - x_{2014} + x_{2015} - x_{2016} = 2017.$$

Mennyivel egyenlő az x_{2016} szám?

3. Legyen ABC olyan derékszögű háromszög (derékszöggel a C csúcsnál), amelyben $|AC| > |BC|$ teljesül. Legyen D az $\overline{AB}$ átfogó felezőpontja, p pedig a D ponton áthaladó CD egyenesre merőleges egyenes. A p egyenes a BC egyenest E pontban, az $\overline{AC}$ szakaszt pedig F pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy a C csúcsból az átfogóra húzott merőleges felezi az $\overline{EF}$ szakaszt!

4. Fekete Kalóz kapitány kalózhajóján a matrózoknak pontosan kétharmada félszemű, háromnegyede falábú, négyötöde kampókezű, és öthatoda kopasz. A hajón a matrozók közül pontosan azok tisztek, akik félszeműek, falábúak, kampókezűek és kopaszok is egyben. A tisztek száma 5, és azt is tudjuk, hogy a tisztek matrózoknak is számítanak! Hány fős a kalózhajó legénysége?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XIV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2016. december 3.

10. évfolyam

1. Melyik az a legkisebb n természetes szám, amelyre

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)<0,51\textbf{?}$$

2. Létezik-e olyan 2 egység oldalhosszúságú rombusz, amelyben az átlók összege egész szám? Ha van ilyen, akkor add meg az átlók hosszának pontos értékét!

3. A valós másodfokú $p(x)=ax^2+bx+c$ polinom (ahol az a nem nulla) minden x valós értékre teljesíti a $p(x)=\left(\frac{p(x+1)-p(x-1)}{2}\right)^2$ összefüggést. Add meg az $S=p(-3)-2p(0)+p(3)$ összeg pontos értékét!

4. Fekete Kalóz kapitány kalózhajóján a matrózoknak pontosan kétharmada félszemű, háromnegyede falábú, négyötöde kampókezű, és öthatoda kopasz. A hajón a matrozók közül pontosan azok tisztek, akik félszeműek, falábúak, kampókezűek és kopaszok is egyben. A tisztek száma 5, és azt is tudjuk, hogy a tisztek matrózoknak is számítanak! Hány fős a kalózhajó legénysége?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XIV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2016. december 3.

<u>11. évfolyam</u>

1. Oldd meg az

$$x^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}} = y^2 \cdot \sqrt[3]{y^2}$$
$$y^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}} = \sqrt[3]{x^2}$$

egyenletrendszert a valós számok halmazán!

2. Számítsd ki a $\sin 6° \cdot \sin 42° \cdot \sin 66° \cdot \sin 78°$ **szorzat értékét!**

3. Határozd meg mindazokat az (a,b) **valós számpárokat, amelyekre teljesül az** $(a+ib)^{2016} = a - ib$ **egyenlőség!**

4. Az ABC **háromszögbe írt kör középpontján keresztül a** $BC = a$**,** $CA = b$ **és** $AB = c$ **oldalakkal párhuzamos egyeneseket húzunk, amelyeken a háromszög sorra** m, n, p **szakaszokat metsz ki. Bizonyítsd be, hogy teljesül az**

$$\frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{p}{c} = 2$$ **egyenlőség!**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XIV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2016. december 3.

12. évfolyam

1. Melyik az a négyjegyű négyzetszám, melynek első két számjegye is és az utolsó két számjegye is egyenlő egymással?

2. Számold ki, hogy mennyivel egyenlő a $\sqrt[3]{3a+1+(a+3)\sqrt{a}}+\sqrt[3]{3a+1-(a+3)\sqrt{a}}$ **kifejezés értéke, ha tudjuk, hogy az** $a>0$ **egyenlőtlenség teljesül!**

3. Igazold, hogy ha valamely háromszögben a szögek tangensei számtani sorozatot képeznek, akkor a szögek kétszeresének szinuszai szintén számtani sorozatot alkotnak!

4. Az ABC **háromszögbe írt kör középpontján keresztül a** $BC=a$**,** $CA=b$ **és** $AB=c$ **oldalakkal párhuzamos egyeneseket húzunk, amelyeken a háromszög sorra** m, n, p **szakaszokat metsz ki. Bizonyítsd be, hogy teljesül az**

$$\frac{m}{a}+\frac{n}{b}+\frac{p}{c}=2$$ **egyenlőség!**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

A XIV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

5. évfolyam

1. Egy játékkészletben 3 kocka tömege annyi, mint 2 hengeré, 10 hengeré annyi, mint 6 téglatesté, 5 kockáé pedig annyi, mint 3 gömbé. Hány gömb nyom annyit, mint 4 téglatest?

Megoldás. A kockát jelölje K, a hengert H, a téglatestet T, a gömböt pedig G. A feltételek alapján:

$$3K = 2H$$

$$10H = 6T$$

$$5K = 3G$$

Ha $3K = 2H$, akkor $15K = 10H = 6T$. Ugyanakkor $5K = 3G$, azaz $15K = 9G$. A $15K$-t kétféleképpen is kifejeztük: ezek összehasonlításából következik, hogy $9G = 6T$, azaz $3G = 2T$, vagyis $6G = 4T$. Négy téglatest tömege tehát hat gömb tömegével egyenlő.

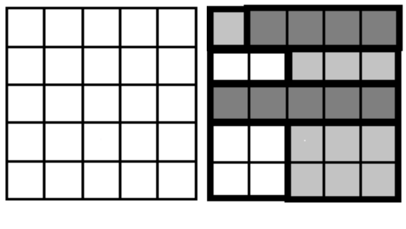
2. Hány lapos az a könyv, amelynek oldalait a 3. oldallal kezdték számozni, és a számozáshoz 1090 db számjegyet használtak fel?

Megoldás. A számozást a 3. oldalon kezdték, így 7 db egyjegyű számot kellett leírni. Ha az összes kétjegyű számot leírjuk, akkor $90 \cdot 2 = 180$ számjegyet kell leírni. Így az első 99 oldal számozásához 187 db számjegyet kell felhasználni.
A könyv 1000-nél kevesebb oldalas, hiszen akkor az összes háromjegyű számot le kell írni, ez pedig további $3 \cdot 900 = 2700$ db számjegyet jelent. Ennyit azonban nem írtak le. Ebből következik, hogy $1090 - 187 = 903$ db számjeggyel háromjegyű számokat írtak le. Ezzel 301 db háromjegyű számot lehet leírni. Így viszont a könyv $99 + 301 = 400$ oldalas, azaz 200 lapos.

3. Egy zenei osztályban kétszer annyi diák tanul zongorázni, mint ahány hegedül. Öten mindkét hangszeren játszanak. Hányan zongoráznak és hányan hegedülnek ebben az osztályban, ha összesen 22 tanuló játszik a két hangszer valamelyikén?

Megoldás. Ha összeadjuk a zongorázni és a hegedülni tanuló diákok számát, akkor a mindkét hangszeren játszó tanulókat kétszer számoltuk. Így ez az összeg $22 + 5 = 27$. Mivel zongorázni kétszer annyian tanulnak, mint hegedülni, ezért a zongorázni tanulók száma 18, a hegedülni tanulók száma 9.

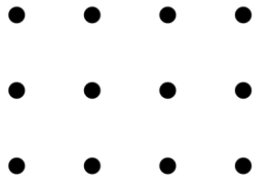
4. Az 5×5-ös négyzetet a rácsvonalak mentén darabold fel hét téglalapra úgy, hogy a téglalapok között ne legyen két egyforma!



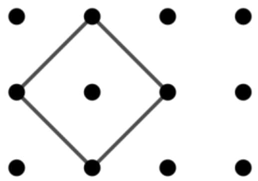
Megoldás. Lásd az ábrát!

6. évfolyam

1. Hány olyan téglalap van, amelynek csúcsai az alábbi négyzetrács rácspontjaira esnek?

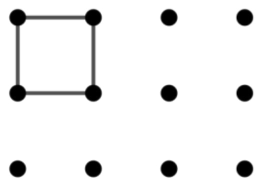


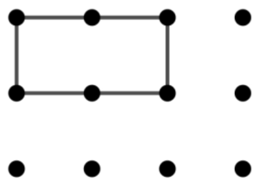
Megoldás. A téglalapok oldalai lehetnek „ferdék” vagy „állók”.
Ferde téglalap csak egyféle lehet:

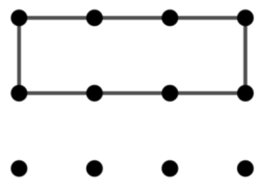


Ebből kettő van.

Az álló téglalapokat oldaluk hossza szerint csoportosíthatjuk.
Először az egy egység magasságúakat vesszük:

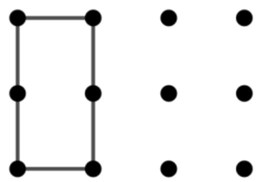


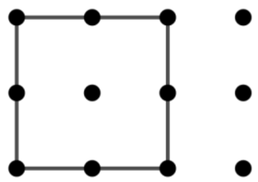


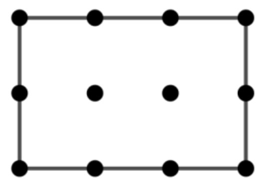


Ebből hat darab van. Ebből négy darab van. Ebből két darab van.

Majd a két egység magasak következnek:







Ebből három darab van. Ebből két darab van. Ebből egy darab van.

Összesen: húsz téglalap van.

2. Azonos betűk azonos természetes számokat rejtenek. Fejtsd meg a betűk jelentését:

$$a+b=28,\ 5\cdot b=c,\ c-d=47,\ c:9=a.$$

Megoldás. Az utolsó összefüggésből következik, hogy a c szám osztható 9-cel. A másodikból az olvasható ki, hogy a c szám az 5 többszöröse, a harmadikból pedig az, hogy c nagyobb, mint 47. Ezért a c legkisebb értéke 90. A $c=90$-et az összefüggésekbe helyettesítve kapjuk, hogy $a=10$, $b=18$, $d=43$.
A c szám következő értéke a 135 lehetne. Ekkor azonban $a=15$, az első összefüggésből $b=13$, a másodikból viszont $b=18$. A c értéke tehát nem lehet 135. A c értékét tovább növelve nem kapunk megoldásokat.

3. Egy lottóhúzás eredménye a következő volt: 35, 40, 44, 46, 55. A számokat persze más sorrendben húzták ki. Gabi a televízió képernyője előtt ülve figyelte a húzást és megállapította, hogy a kihúzott számok átlaga mindig egész szám volt. Milyen sorrendben húzhatták ki a lottószámokat?

Megoldás. Ha az öt számot összeadjuk 220-at kapunk, ami osztható öttel, tehát az öt szám átlaga egész szám. Visszafelé gondolkodva meg kell találnunk azt a négy számot melynek összege osztható 4-gyel. Ezt kétféle módon tudjuk elérni: a 40 vagy a 44 kivonásával. Ha a 40-et különítjük el, akkor 180-at kapunk, ami ugyan osztható 4-gyel, de nem tudunk tovább haladni visszafelé. Ha a 44-et különítjük el, akkor 176-ot kapunk, ami szintén osztható 4-gyel, tehát az utoljára kihúzott szám a 44. A 176 hárommal osztva kettőt ad maradékul, így csak a 35 lehet a negyedik kihúzott szám. Harmadikként az 55-öt húzták ki, mert az első két szám összegének párosnak kell lennie. Így két féle húzási sorrend lehetséges: 40, 46, 55, 35, 44 vagy 46, 40, 55, 35, 44.

4. Oszd fel az óra számlapját három részre úgy, hogy az egyes részekben a számjegyek mennyisége és a számok összege is három egymást követő természetes szám legyen!

Megoldás. 1-től 12-ig a számokban összesen 15 számjegy van. Ezért a számjegyek száma az egyes részekben: 4, 5 és 6 lesz. Az óra számlapján lévő számok összege 78. A középső összeg tehát $78:3=26$. A három összeg ezért: 25, 26 és 27. A két feltétel csak akkor teljesül egyszerre, ha az első részben a 8, 9, 10 (4 számjegy, összegük 27), a másodikban a 3, 4, 5, 6, 7 (5 számjegy, összegük 25), a harmadikban pedig az 1, 2, 11, 12 (6 számjegy, összegük 26) számok kerülnek.

7. évfolyam

1. A 2016 olyan négyjegyű szám, amelynek ha az utolsó számjegyét elosztom az első számjegyével, akkor az első három számjegyének összegét kapom, azaz $6:2=2+0+1$. Hány ilyen tulajdonságú négyjegyű szám van összesen?

Megoldás. Rendszerezzük a keresett számokat az első majd az utolsó számjegyük szerint emelkedő sorrendben:

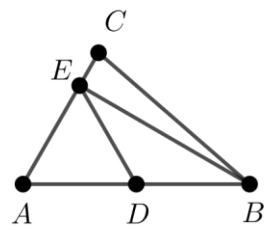
$1\_\_1$: 1 db (középen 00 áll)
$1\_\_2$: 2 db (középen 01 és 10 állhat)
$1\_\_3$: 3 db (középen 02, 11, 20 állhat)
$1\_\_4$: 4 db (középen 03, 12, 21, 30 állhat)
$1\_\_5$: 5 db (középen 04, 13, 22, 31, 40 állhat)
$1\_\_6$: 6 db (középen 05, 14, 23, 32, 41, 50 állhat)
$1\_\_7$: 7 db (középen 06, 15, 24, 33, 42, 51, 60 állhat)
$1\_\_8$: 8 db (középen 07, 16, 25, 34, 43, 52, 61, 70 állhat)
$1\_\_9$: 9 db (középen 08, 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80 állhat)
$2\_\_4$: 1 db (középen 00 áll)
$2\_\_6$: 2 db (középen 01 és 10 állhat)
$2\_\_8$: 3 db (középen 02, 11, 20 állhat)
$3\_\_9$: 1 db (középen 00 áll)

Összesen: $1+2+3+4+5+6+7+8+9+1+2+3+1=45+7=52$, tehát 52 ilyen szám létezik.

2. Pista leírt egy számsorozatot, amelynek első három tagja: 1, 0, 2. A következő tagot úgy kapta meg, hogy az előző kettőt összeszorozta ($0\cdot 2$), majd a kapott szorzathoz hozzáadta a közvetlenül előttük lévőt: $0\cdot 2+1=1$. Ekkor a sorozat már négytagú lett: 1, 0, 2, 1. Majd folytatta ennek a szabálynak az alkalmazását mindaddig, amíg el nem jutott a sorozat 2016. tagjáig. Vajon a 2016. tag páros vagy páratlan szám?

Megoldás. Konkrét számok helyett számoljunk azok paritásával: Jelölje n a páratlan, s pedig a páros számokat. Ekkor a sorozat első három tagját így írhatjuk föl: n,s,s. A negyedik tag: $s\cdot s+n=s+n=n$. Az első négy tag így: n,s,s,n. Az ötödik tag: $s\cdot n+s=s+s=s$. Az első öt tag: n,s,s,n,s. A hatodik tag: $n\cdot s+s=s+s=s$. Így az első hat tag: n,s,s,n,s,s. Mivel a sorozatképzési szabály csak a legutolsó három tagot veszi figyelembe, és az utolsó három tag megegyezik azzal a három taggal, amely a harmadik tag képzése után volt utolsó három, így a további tagok is úgy folytatódnak, ahogyan a sorozat a negyedik tagtól folytatódik. Ezt a gondolatmenetet megismételve kapjuk a következő sorozatot: $n,s,s,n,s,s,n,s,s,n,s,s,...$.
A sorozatban azokon a sorszámú helyeken, amelyek hárommal oszthatóak, s áll. Ilyen szám a 2016 is, így a 2016. helyen is s áll.

3. Az ABC háromszög AB oldalán adott a D pont, az AC oldalán pedig az E pont úgy, hogy a DEB töröttvonal az ABC háromszöget három egyenlő területű háromszögre osztja. Az ADE háromszög egy $6\ cm$ oldalú szabályos háromszög. Mekkora az AB és az AC oldal hossza? Lehet-e a BC oldal hossza $14\ cm$?



Megoldás. Tekintsük a mellékelt ábrát. Ha a DEB töröttvonal harmadolja a háromszöget, akkor az ED szakasz felezi az ABE háromszöget, így D felezőpontja az AB oldalnak, vagyis $AB = 12\ cm$.
Továbbá, ha DEB töröttvonal harmadolja a háromszöget, akkor az EB szakasz $2:1$ arányban osztja a területét, vagyis az E pont is $2:1$ arányban osztja az AC oldalt, tehát $AC = 9\ cm$.
A háromszög A csúcsnál lévő szöge $60°$, a másik két szög közül egyik szög kisebb, a másik nagyobb nála. Ez igaz a szemben fekvő oldalakra is, vagyis a BC oldal $9\ cm$-nél nagyobb és $12\ cm$-nél kisebb, tehát nem lehet $14\ cm$ hosszú.

4. Anna Csókáról biciklizett hazafelé. Azt tervezte, hogy $15:00$ órakor ér haza. Mivel az út $3/4$ részét a tervezett idő $2/3$-a alatt tette meg, ezért lassított és így a tervezett időre ért haza. Milyen arányban van az „első” sebesség a „második” sebességgel?

Megoldás. Az első sebességgel az út $3/4$ részét az egész útra tervezett idő $2/3$-a alatt tette meg. Mivel egyenletesen haladt, ezért fele annyi idő alatt fele annyi utat tett meg, vagyis $1/3$ idő alatt az út $3/8$-át. Lassítás után az út hátralévő $1/4$ részét az egész útra szánt idő $1/3$-a alatt tette meg. Ezek szerint azonos idő alatt az első sebességgel az út $3/8$-át, a második sebességgel $1/4$ részét tette meg. Az azonos idő alatt megtett utak úgy aránylanak egymáshoz, mint a sebességek, tehát

$$v_1 : v_2 = \frac{3}{8} : \frac{1}{4} = \frac{3}{8} : \frac{2}{8} = 3:2,$$

vagyis a keresett arány $3:2$.

8. évfolyam

1. Pista leírt egy számsorozatot, amelynek első három tagja: $1, 0, 2$. A következő tagot úgy kapta meg, hogy az előző kettőt összeszorozta ($0\cdot 2$), majd a kapott szorzathoz hozzáadta a közvetlenül előttük lévőt: $0\cdot 2+1=1$. Ekkor a sorozat már négytagú lett: $1, 0, 2, 1$. Majd folytatta ennek a szabálynak az alkalmazását mindaddig, amíg el nem jutott a sorozat 2016. tagjáig. Vajon a 2016. tag páros vagy páratlan szám?

Megoldás. Konkrét számok helyett számoljunk azok paritásával: Jelölje n a páratlan, s pedig a páros számokat. Ekkor a sorozat első három tagját így írhatjuk föl: n,s,s. A negyedik tag: $s\cdot s+n=s+n=n$. Az első négy tag így: n,s,s,n. Az ötödik tag: $s\cdot n+s=s+s=s$. Az első öt tag: n,s,s,n,s. A hatodik tag: $n\cdot s+s=s+s=s$. Így az első hat tag: n,s,s,n,s,s. Mivel a sorozatképzési szabály csak a legutolsó három tagot veszi figyelembe, és az utolsó három tag megegyezik azzal a három taggal, amely a harmadik tag képzése után volt utolsó három, így a további tagok is úgy folytatódnak, ahogyan a sorozat a negyedik tagtól folytatódik. Ezt a gondolatmenetet megismételve kapjuk a következő sorozatot: $n,s,s,n,s,s,n,s,s,n,s,s,\ldots$.
A sorozatban azokon a sorszámú helyeken, amelyek hárommal oszthatóak, s áll. Ilyen szám a 2016 is, így a 2016. helyen is s áll.

2. Az $x<y<z<t<s$ az öt legkisebb egymást követő természetes szám, melyek rendre oszthatóak 7-tel, 6-tal, 5-tel, 4-gyel és 3-mal. Melyek ezek a számok?

Megoldás. Ha x osztható 7-tel, akkor $x+7$ is osztható 7-tel. Ha y osztható 6-tal, akkor $y+6$ is osztható 6-tal, és így tovább. Mivel

$$x+7=y+6=z+5=t+4=s+3,$$

ezért $x+7$ osztható 7-tel, 6-tal, 5-tel, 4-gyel és 3-mal. A legkisebb ilyen szám a

$$3\cdot 4\cdot 5\cdot 7=420,$$

tehát az x értéke 413. A keresett számok tehát: $413<414<415<416<417$.

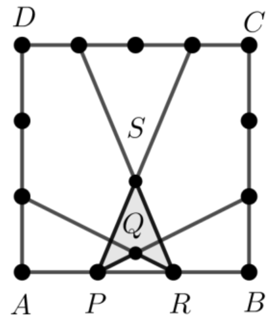
3. Fekete Kalóz kapitány és legénysége hosszas küzdelem után elfoglalt egy kereskedőhajót. A hajón talált arannyal teli kincsesláda tartalmának harmadát Fekete Kalóz kapitány megtartotta magának. A többit szétosztotta a legénység tagjai között. A rangidős kapott 20 aranyat és a maradék tizedét, a következő 40 aranyat és a maradék tizedét, a harmadik 60 aranyat és a maradék tizedét és így tovább. Így a legénység tagjai mind ugyanannyi aranyat kaptak. Összesen hány kalóz élte túl a küzdelmet és osztozott a kincsen? Mennyi arany volt a ládában?

Megoldás. A legénység x aranypénzen osztozik. Az első két kalóz ugyanannyi aranyat kapott, ezért felírható, hogy:

$$20+\frac{x-20}{10}=40+\frac{x-60-\frac{x-20}{10}}{10},$$

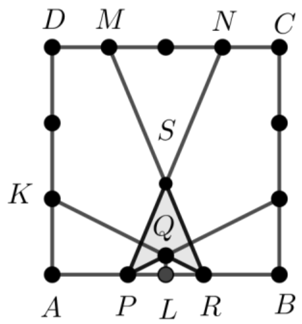
ahonnan $x=1620$. Az első két matróz 180 aranyat kapott, így a többiek is ennyit, azaz 9-en osztoztak a 1620 aranyon. A kapitány is él, és ő 810 aranyat zsebelt be.

Tízen élték túl a küzdelmet és összesen 2430 aranyat találtak.



4. Az $ABCD$ négyzet három oldalát három, a negyediket pedig négy egyenlő részre osztottuk, majd a megfelelő pontok összekötésével megkaptuk a satírozott $PQRS$ négyszöget. Határozd meg a satírozott és a nem satírozott terület arányát!

Megoldás. Legyen a négyzet oldala a. A PRS és SNM háromszögek egyenlő szárúak és az S csúcsnál lévő szögeik egybevágóak, ezért a két háromszög hasonló. Magasságaik aránya egyenlő az alapjaik arányával, ami $3:2$. Innen következik, hogy a PRS háromszög magassága $\frac{2a}{5}$. A Q pontból merőlegest húzunk az AB oldalra. Az így kapott QLR háromszög hasonló a KAR háromszöggel, hiszen mindkettő derékszögű és az R csúcsnál lévő szögük közös. Oldalaik aránya $1:4$. Innen következik, hogy a PRQ háromszög magassága $\frac{a}{12}$. A satírozott terület nagysága:



$$T_s = \frac{a}{3}\cdot\frac{2a}{5}\cdot\frac{1}{2} - \frac{a}{3}\cdot\frac{a}{12}\cdot\frac{1}{2} = \frac{a^2}{15} - \frac{a^2}{72} = \frac{19a^2}{360}.$$

A fehér terület nagysága:

$$T_f = a^2 - T_s = \frac{341a^2}{360},$$

a keresett arány pedig: $\frac{19}{341}$.

9. évfolyam

1. Fekete Kalóz kapitány és legénysége hosszas küzdelem után elfoglalt egy kereskedőhajót. A hajón talált arannyal teli kincsesláda tartalmának harmadát Fekete Kalóz kapitány megtartotta magának. A többit szétosztotta a legénység tagjai között. A rangidős kapott 20 aranyat és a maradék tizedét, a következő 40 aranyat és a maradék tizedét, a harmadik 60 aranyat és a maradék tizedét és így tovább. Így a legénység tagjai mind ugyanannyi aranyat kaptak. Összesen hány kalóz élte túl a küzdelmet és osztozott a kincsen? Mennyi arany volt a ládában?

Megoldás. A legénység x aranypénzen osztozik. Az első két kalóz ugyanannyi aranyat kapott, ezért felírható, hogy:

$$20+\frac{x-20}{10}=40+\frac{x-60-\frac{x-20}{10}}{10},$$

ahonnan $x=1620$. Az első két matróz 180 aranyat kapott, így a többiek is ennyit, azaz 9-en osztoztak a 1620 aranyon. A kapitány is él, és ő 810 aranyat zsebelt be. Tizen élték túl a küzdelmet és összesen 2430 aranyat találtak.

2. Legyenek $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2015}, x_{2016}$ egymást követő egész számok, és legyen

$$-x_0+x_1-x_2+x_3-\ldots-x_{2014}+x_{2015}-x_{2016}=2017.$$

Mennyivel egyenlő az x_{2016} szám?

Megoldás. Mivel $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2015}, x_{2016}$ egymást követő egész számok, ezért

$$-x_0+x_1=1,\ -x_2+x_3=1, \ldots,\ -x_{2014}+x_{2015}=1.$$

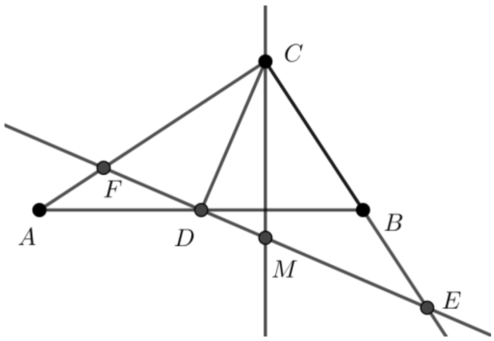
A fentiek alapján az adott egyenlőség felírható, mint

$$(-x_0+x_1)+(-x_2+x_3)+\ldots+(-x_{2014}+x_{2015})-x_{2016}=2017,$$

azaz $1008-x_{2016}=2017$, ahonnan adódik, hogy $x_{2016}=-1009$.

3. Legyen ABC olyan derékszögű háromszög (derékszöggel a C csúcsnál), amelyben $|AC|>|BC|$ teljesül. Legyen D az $\overline{AB}$ átfogó felezőpontja, p pedig a D ponton áthaladó CD egyenesre merőleges egyenes. A p egyenes a BC egyenest E pontban, az $\overline{AC}$ szakaszt pedig F pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy a C csúcsból az átfogóra húzott merőleges felezi az $\overline{EF}$ szakaszt!

Megoldás. Legyen $BAC\angle=\alpha$, $ABC\angle=\beta$ és $|AC|>|BC|$, valamint legyen az M pont a C csúcsból az átfogóra húzott merőleges és az $\overline{EF}$ szakasz metszéspontja. Mivel minden derékszögű háromszög köréírható körének középpontja az átfogó felezőpontja, így a D pont az ABC háromszög köréírható körének középpontja. Ebből adódik, hogy $|DA|=|DC|$, vagyis az ADC háromszög egyenlő szárú és ezért $DCA\angle=CAD\angle=CAB\angle=\alpha$, valamint $CEM\angle=CED\angle=DCA\angle=\alpha$, mert merőleges szárú hegyesszögek. Hasonlóan kapjuk, hogy $MCB\angle=BAC\angle=\alpha$, mert szintén merőleges szárú hegyesszögek. Ebből következik, hogy $CEM\angle=MCB\angle=MCE\angle=\alpha$, amiből jön, hogy az MEC háromszög egyenlő szárú, tehát $|MC| = |ME|$. Továbbá, $MCF\angle = MCA\angle = ABC\angle = \beta$, mert ezek is merőleges szárú hegyesszögek. Mivel a $CMF\angle$ az MEC háromszög külső szöge, ebből adódik, hogy $CMF\angle = 2\alpha$. Az MCF háromszögben teljesül, hogy $MFC\angle + MCF\angle + CMF\angle = 180°$, vagyis $MFC\angle + \beta + 2\alpha = 180°$.



Mivel $\alpha + \beta = 90°$, ezért $MFC\angle + \alpha = 90°$, azaz $MFC\angle = 90° - \alpha = \beta$. Ebből egyértelműen adódik, hogy az MCF háromszög egyenlő szárú, ahonnan $|MC| = |MF|$ következik. Ebből viszont adódik, hogy $|MC| = |MF| = |ME|$, azaz M felezi az $\overline{EF}$ szakaszt.

4. Fekete Kalóz kapitány kalózhajóján a matrózoknak pontosan kétharmada félszemű, háromnegyede falábú, négyötöde kampókezű, és öthatoda kopasz. A hajón a matrozók közül pontosan azok tisztek, akik félszeműek, falábúak, kampókezűek és kopaszok is egyben. A tisztek száma 5, és azt is tudjuk, hogy a tisztek matrózoknak is számítanak! Hány fős a kalózhajó legénysége?

Megoldás. Először belátjuk, hogy a hajón $S = 60\,m$ matróz van. A szöveg alapján a matrózok száma 3-mal, 4-gyel, 5-tel és 6-tal osztható, de akkor osztható ezek legkisebb közös többszörösével is azaz 60-nal, tehát

$$S = 60,\ S = 120,\ S = 180,\ ..., \text{ ha } m = 1, 2, 3, \ldots$$

Minden nem félszemű matróznak húzzunk a fejére egy kék sapkát, ekkor kiosztottunk $20\,m$ sapkát. Minden matróznak, aki nem falábú húzzunk a fejére egy piros sapkát, ekkor kiosztottunk $15\,m$ sapkát. Minden nem kampókezű matróznak húzzunk a fejére egy zöld sapkát, ekkor kiosztottunk $12\,m$ sapkát. Minden nem kopasz matróznak húzzunk a fejére egy fehér sapkát, ekkor kiosztottunk $10\,m$ sapkát. Így összesen $57\,m$ darab sapkát osztottunk ki. Mivel a matrózok száma $60\,m$, legalább $3\,m$ olyan matróz van, akinek a fején nincs egyetlen sapka sem, ami éppen azt jelenti, hogy legalább $3\,m$ matróz rendelkezik mind a négy tulajdonsággal. Mivel a hajón van legalább 5 matróz, ezért az m értéke 2 vagy annál nagyobb, így $3\,m$ legalább 6, azaz ezek azok, akik mind a négy tulajdonsággal rendelkeznek. Mivel ez a feladat szerint pontosan 5, ezért $m = 1$ lehetséges, vagyis a hajón pontosan 60 matróz szolgál. Hátra van még annak megmutatása, hogy 60 matrózzal kielégíthető a feladat állítása. Ezt mutatja az alábbi táblázatban az ellenőrzés:

Hány fő?	Félszemű	Falábú	Kampókezű	Kopasz
10	×	×	×	
12	×	×		×
13	×		×	×
2			×	×
18		×	×	×
5	×	×	×	×
60	40	45	48	50

10. évfolyam

1. Melyik az a legkisebb n természetes szám, amelyre

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)<0,51\textbf{?}$$

Megoldás. Közös nevezőre hozzuk a zárójelekben lévő kifejezéseket majd szorzattá alakítjuk a számlálókat és nevezőket, s az összes lehetséges egyszerűsítés elvégzése után a következő alakot kapjuk:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{4-1}{4}\cdot\frac{9-1}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-1}{n^2}=$$

$$=\frac{1\cdot3}{2\cdot2}\cdot\frac{2\cdot4}{3\cdot3}\cdot\frac{3\cdot5}{4\cdot4}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-2)n}{(n-1)(n-1)}\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}=\frac{n+1}{2n}.$$

Keressük tehát azt a legkisebb n értéket, amelyre $\frac{n+1}{2n}<0,51$, vagyis amelyre $\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{100}$, azaz $\frac{1}{2n}<\frac{1}{100}$. Az így kapott egyenlőtlenség megoldása $n>50$, így a legkisebb érték, amire teljesül az egyenlőtlenség az $n=51$.

2. Létezik-e olyan 2 egység oldalhosszúságú rombusz, amelyben az átlók összege egész szám? Ha van ilyen, akkor add meg az átlók hosszának pontos értékét!

Megoldás. Ha létezik ilyen rombusz, akkor az átlók felére és az oldalra felírt háromszög-egyenlőtlenség alapján: $\frac{e}{2}+\frac{f}{2}>2$, mert $e>2$ és $f>2$, azaz $e+f>4$, illetve $e<4$ és $f<4$, azaz $e+f<8$.
A kapott egyenlőtlenségek alapján egész megoldás csak az 5, 6 vagy 7 lehet. Viszont az $e^2+f^2=16$ egyenlőségnek is teljesülni kell az átlók merőlegessége miatt. A kapott egyenletrendszerek csak az $e+f=5$ esetén adnak megoldást. Ekkor
$e=\frac{5+\sqrt{7}}{2}$ és $f=\frac{5-\sqrt{7}}{2}$, vagy fordítva, tehát a keresett rombusz nem létezik.

3. A valós másodfokú $p(x)=ax^2+bx+c$ polinom (ahol az a nem nulla) minden x valós értékre teljesíti a $p(x)=\left(\frac{p(x+1)-p(x-1)}{2}\right)^2$ összefüggést. Add meg az $S=p(-3)-2p(0)+p(3)$ összeg pontos értékét!

Megoldás. Írjuk fel a megadott kifejezés jobb oldalát az a, b és c együtthatók segítségével:

$$p(x)=\left(\frac{p(x+1)-p(x-1)}{2}\right)^2=\left(\frac{a(x+1)^2+b(x+1)+c-a(x-1)^2-b(x-1)-c}{2}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{4ax+2b}{2}\right)^2=(2ax+b)^2=4a^2x^2+4abx+b^2.$$

Mivel ez minden x-re megegyezik a $p(x) = ax^2 + bx + c$ polinommal, ez csak úgy lehetséges, ha a megfelelő együtthatók megegyeznek, vagyis ha $a = 4a^2$, tehát ha $a = \frac{1}{4}$, mivel a nem lehet nulla, $b = 4ab = 4 \cdot \frac{1}{4} b = b$, vagyis b tetszőleges valós szám, és végül ha $c = b^2$. Ekkor $p(x) = \frac{1}{4} x^2 + bx + b^2$**.** A keresett összeg

$$S = p(-3) - 2p(0) + p(3) = \frac{1}{4} \cdot (-3)^2 - 3b + b^2 - 2b^2 + \frac{1}{4} \cdot 3^2 + 3b + b^2 = \frac{9}{2}.$$

4. Fekete Kalóz kapitány kalózhajóján a matrózoknak pontosan kétharmada félszemű, háromnegyede falábú, négyötöde kampókezű, és öthatoda kopasz. A hajón a matrozók közül pontosan azok tisztek, akik félszeműek, falábúak, kampókezűek és kopaszok is egyben. A tisztek száma 5, és azt is tudjuk, hogy a tisztek matrózoknak is számítanak! Hány fős a kalózhajó legénysége?

Megoldás. Először belátjuk, hogy a hajón $S = 60\,m$ matróz van. A szöveg alapján a matrózok száma 3-mal, 4-gyel, 5-tel és 6-tal osztható, de akkor osztható ezek legkisebb közös többszörösével is azaz 60-nal, tehát

$$S = 60,\ S = 120,\ S = 180,\ \ldots,\ \text{ha } m = 1, 2, 3, \ldots$$

Minden nem félszemű matróznak húzzunk a fejére egy kék sapkát, ekkor kiosztottunk $20\,m$ sapkát. Minden matróznak, aki nem falábú húzzunk a fejére egy piros sapkát, ekkor kiosztottunk $15\,m$ sapkát. Minden nem kampókezű matróznak húzzunk a fejére egy zöld sapkát, ekkor kiosztottunk $12\,m$ sapkát. Minden nem kopasz matróznak húzzunk a fejére egy fehér sapkát, ekkor kiosztottunk $10\,m$ sapkát. Így összesen $57\,m$ darab sapkát osztottunk ki. Mivel a matrózok száma $60\,m$, legalább $3\,m$ olyan matróz van, akinek a fején nincs egyetlen sapka sem, ami éppen azt jelenti, hogy legalább $3\,m$ matróz rendelkezik mind a négy tulajdonsággal. Mivel a hajón van legalább 5 matróz, ezért az m értéke 2 vagy annál nagyobb, így $3\,m$ legalább 6, azaz ezek azok, akik mind a négy tulajdonsággal rendelkeznek. Mivel ez a feladat szerint pontosan 5, ezért $m = 1$ lehetséges, vagyis a hajón pontosan 60 matróz szolgál. Hátra van még annak megmutatása, hogy 60 matrózzal kielégíthető a feladat állítása. Ezt mutatja az alábbi táblázatban az ellenőrzés:

Hány fő?	**Félszemű**	**Falábú**	**Kampókezű**	**Kopasz**
10	×	×	×	
12	×	×		×
13	×		×	×
2			×	×
18		×	×	×
5	×	×	×	×
60	40	45	48	50

11. évfolyam

1. Oldd meg az

$$x^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}}=y^2\cdot\sqrt[3]{y^2}$$
$$y^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}}=\sqrt[3]{x^2}$$

egyenletrendszert a valós számok halmazán!

Megoldás. A megoldás feltétele $x>0$ és $y>0$. Vegyük észre, hogy az $x=1$ és $y=1$, azaz az $(1,1)$ rendezett pár megoldása az egyenletrendszernek.
Most tegyük fel, hogy $x\neq 1,\ y\neq 1$. Ekkor tízes alapú logaritmussal átalakítjuk az egyenleteket a következő módon:

$$\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}\right)\cdot\log x=\frac{8}{3}\log y,$$
$$\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}\right)\cdot\log y=\frac{2}{3}\log x,$$

valamint

$$\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}\right)=\frac{8\log y}{3\log x},$$
$$\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}\right)=\frac{2\log x}{3\log y}.$$

ahonnan kapjuk, hogy $\frac{8\log y}{3\log x}=\frac{2\log x}{3\log y}$, azaz $4\log^2 y=\log^2 x$.
Most két esetet figyelhetünk. Ha $2\log y=\log x$, tehát $x=y^2$, visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy $2\sqrt{y}=\frac{4}{3}$, a megoldása pedig $(x,\ y)=\left(\frac{16}{81},\frac{4}{9}\right)$.
Ha viszont $2\log y=-\log x$, akkor $\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}\right)<0$, ami lehetetlen.
A megoldáshalmaz tehát: $M=\left\{(1,1),\left(\frac{16}{81},\frac{4}{9}\right)\right\}$.

2. Számítsd ki a $\sin 6°\cdot\sin 42°\cdot\sin 66°\cdot\sin 78°$ **szorzat értékét!**

Megoldás. A szorzatot megszorozzuk és elosztjuk $2\cos 6°$ kifejezéssel, majd a kétszeres szögek képletével egyszerűbb alakra hozzuk:

$$\sin 6°\cdot\sin 42°\cdot\sin 66°\cdot\sin 78°=\frac{2\sin 6°\cdot\cos 6°\cdot\sin 42°\cdot\sin 66°\cdot\sin 78°}{2\cos 6°}=$$
$$=\frac{2\sin 12°\cdot\sin 42°\cdot\sin 66°\cdot\cos 12°}{2\cdot 2\cos 6°}=\frac{2\sin 24°\cdot\sin 42°\cdot\cos 24°}{2\cdot 2\cdot 2\cos 6°}=$$
$$=\frac{2\sin 48°\cdot\cos 48°}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cos 6°}=\frac{\sin 96°}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cos 6°}=\frac{\sin 84°}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cos 6°}=\frac{\cos 6°}{16\cdot\cos 6°}=\frac{1}{16}.$$

Az átalakítás során felhasználtuk a $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$ és a $\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$ trigonometriai azonosságokat.

3. Határozd meg mindazokat az (a,b) valós számpárokat, amelyekre teljesül az $(a+ib)^{2016}=a-ib$ egyenlőség!

Megoldás. Legyen $z=a+ib$, akkor a feladat $z^{2016}=\overline{z}$, vagyis $|z|^{2016}=|z|$

I. eset: ha $|z|=0$, akkor $z=0+0i$.

II. eset: ha $|z|^{2015}=1$, akkor $|z|=1$, illetve $z^{2016}=\overline{z}$. Az utolsó egyenlőség mindkét oldalát beszorozva z -vel, adódik, hogy

$$z^{2017}=\overline{z}\cdot z=|z|^2=1,$$

azaz

$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{2017}+i\cdot\sin\frac{2k\pi}{2017},\ k=0,1,2,...,2016.$$

4. Az ABC háromszögbe írt kör középpontján keresztül a $BC=a$, $CA=b$ és $AB=c$ oldalakkal párhuzamos egyeneseket húzunk, amelyeken a háromszög sorra m, n, p szakaszokat metsz ki. Bizonyítsd be, hogy teljesül az

$$\frac{m}{a}+\frac{n}{b}+\frac{p}{c}=2 \text{ \textbf{egyenlőség!}}$$

Megoldás. Jelöljük az ABC háromszög területét T -vel, ekkor

$$T=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}.$$

Legyen r a beírt kör sugara. Mivel $ABC\Delta\sim BEF\Delta$, mert párhuzamosak az oldalaik, ezért alapjaik és magasságaik arányosak, azaz $\frac{n}{b}=\frac{h_b-r}{h_b}$. A párhuzamos oldalak miatt hasonlóan kapjuk, hogy $ABC\Delta\sim AHG\Delta$, ahonnan $\frac{m}{a}=\frac{h_a-r}{h_a}$, valamint hogy $ABC\Delta\sim CIJ\Delta$, ahonnan $\frac{p}{c}=\frac{h_c-r}{h_c}$.

Ebből adódik, hogy

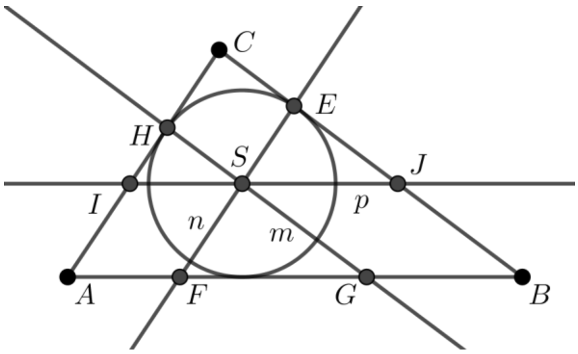
$$\frac{m}{a}+\frac{n}{b}+\frac{p}{c}=$$

$$=\frac{h_a-r}{h_a}+\frac{h_b-r}{h_b}+\frac{h_c-r}{h_c}=$$

$$=3-r\cdot\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$$

$$=3-r\cdot\left(\frac{a+b+c}{2T}\right)=$$

$$=3-r\cdot\frac{2s}{2sr}=3-1=2.$$



12. évfolyam

1. Melyik az a négyjegyű négyzetszám, melynek első két számjegye is és az utolsó két számjegye is egyenlő egymással?

Megoldás. Írjuk fel a keresett négyzetszámot a következő alakban:
$A=1000a+100a+10b+b$, ahol $a\neq 0$, valamint a és b egyjegyű.

$A=1100a+110b=11(100a+b)$, vagyis az A négyzetszám osztható 11-gyel.

Ekkor osztható kell legyen a 11 szám négyzetével is, vagyis felírható, hogy:

$$A=11(100a+b)=11^2\left(\frac{100a+b}{11}\right)=11^2\left(9a+\frac{a+b}{11}\right),$$

ahol $9a+\frac{a+b}{11}$ is egy négyzetszám, miközben $a+b$ osztható 11-gyel és a és b egyjegyű. Így csakis $a+b=11$ lehetséges. Ekkor $9a+\frac{a+b}{11}=9a+1$ négyzetszám kell legyen, és közben $a\neq 0$. Ez csakis $a=7$ esetén teljesül $\left(9a+1=64=8^2\right)$, s ekkor $b=4$.
A keresett négyzetszám tehát az $A=7744=88^2$.

2. Számold ki, hogy mennyivel egyenlő a $\sqrt[3]{3a+1+(a+3)\sqrt{a}}+\sqrt[3]{3a+1-(a+3)\sqrt{a}}$ **kifejezés értéke, ha tudjuk, hogy az** $a>0$ **egyenlőtlenség teljesül!**

Megoldás. Végezzük el a következő átalakításokat:

$$\sqrt[3]{3a+1+(a+3)\sqrt{a}}+\sqrt[3]{3a+1-(a+3)\sqrt{a}}=\sqrt[3]{3a+1+a\sqrt{a}+3\sqrt{a}}+\sqrt[3]{3a+1-a\sqrt{a}-3\sqrt{a}}=$$

$$=\sqrt[3]{a\sqrt{a}+3a+3\sqrt{a}+1}+\sqrt[3]{-a\sqrt{a}+3a-3\sqrt{a}+1}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{a}+1\right)^3}-\sqrt[3]{a\sqrt{a}-3a+3\sqrt{a}-1}=$$

$$=\sqrt[3]{\left(\sqrt{a}+1\right)^3}-\sqrt[3]{\left(\sqrt{a}-1\right)^3}=\sqrt{a}+1-\left(\sqrt{a}-1\right)=2.$$

3. Igazold, hogy ha valamely háromszögben a szögek tangensei számtani sorozatot képeznek, akkor a szögek kétszeresének szinuszai szintén számtani sorozatot alkotnak!

Megoldás. Ha például $\alpha\leq\beta\leq\gamma$, akkor a feladat feltétele szerint $\mathrm{tg}\alpha,\mathrm{tg}\beta,\mathrm{tg}\gamma$ számtani sorozatot alkotnak, és így $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\gamma=2\mathrm{tg}\beta$, vagyis

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}=2\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

$$\frac{\sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\gamma}=2\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

$$\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\cos\alpha\cos\gamma}=2\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

Mivel $\beta=180^\circ-(\alpha+\gamma)$, így $\sin\beta=\sin\left(180^\circ-(\alpha+\gamma)\right)=\sin(\alpha+\gamma)$, és ekkor

$$\frac{\sin\beta}{\cos\alpha\cos\gamma}=2\frac{\sin\beta}{\cos\beta},$$

ahonnan

$$\cos\beta=2\cos\alpha\cos\gamma\ .$$

Ekkor, a szorzat összeggé alakításának képletét alkalmazva a jobb oldalon

$$\cos\beta=2\cdot\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\gamma)+\cos(\alpha-\gamma)\right],$$

vagyis $\cos\beta=\cos(\alpha+\gamma)+\cos(\alpha-\gamma)$.

Mivel $\cos\beta=\cos\left(180^\circ-\beta\right)+\cos(\alpha-\gamma)$,

és $\cos\beta=\cos180^\circ\cos\beta+\sin180^\circ\sin\beta+\cos(\alpha-\gamma)$

így $\cos\beta=-\cos\beta+\cos(\alpha-\gamma)$,

ahonnan $\cos(\alpha-\gamma)=2\cos\beta$.

A feladat állítása szerint $\sin2\alpha+\sin2\gamma=2\sin2\beta$, ezt kellene bizonyítanunk.

A szorzattá alakítás képletéből kiindulva $\sin2\alpha+\sin2\gamma=2\sin(\alpha+\gamma)\cos(\alpha-\gamma)$.

Felhasználva az előzőleg levezetett összefüggéseket, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\sin2\alpha+\sin2\gamma&=2\sin\left(180^\circ-\beta\right)\cdot2\cos\beta=\\&=4\cos\beta\left(\sin180^\circ\cos\beta-\cos180^\circ\sin\beta\right)=\\&=4\cos\beta\sin\beta=2\left(2\sin\beta\cos\beta\right)=2\sin2\beta,\end{aligned}$$

ami azt igazolja, hogy $\sin2\alpha,\sin2\beta,\sin2\gamma$ valóban számtani sorozatot alkotnak.

4. Az ABC háromszögbe írt kör középpontján keresztül a $BC=a$, $CA=b$ és $AB=c$ oldalakkal párhuzamos egyeneseket húzunk, amelyeken a háromszög sorra m, n, p szakaszokat metsz ki. Bizonyítsd be, hogy teljesül az

$$\frac{m}{a}+\frac{n}{b}+\frac{p}{c}=2$$ **egyenlőség!**

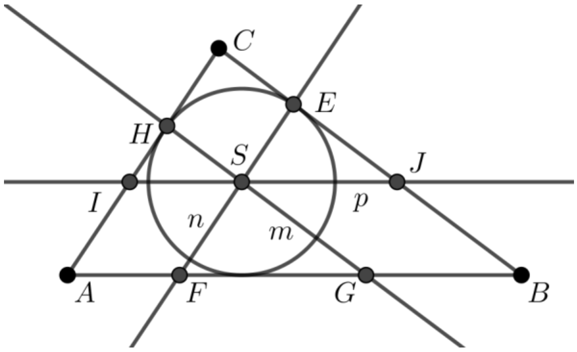
Megoldás. Jelöljük az ABC háromszög területét T-vel, ekkor

$$T=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}.$$

Legyen r a beírt kör sugara. Mivel $ABC\Delta \sim BEF\Delta$, mert párhuzamosak az oldalaik, ezért alapjaik és magasságaik arányosak, azaz $\frac{n}{b} = \frac{h_b - r}{h_b}$. A párhuzamos oldalak miatt hasonlóan kapjuk, hogy $ABC\Delta \sim AHG\Delta$, ahonnan $\frac{m}{a} = \frac{h_a - r}{h_a}$, valamint hogy $ABC\Delta \sim CIJ\Delta$, ahonnan $\frac{p}{c} = \frac{h_c - r}{h_c}$.

Ebből adódik, hogy

$$\frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{p}{c} = \frac{h_a - r}{h_a} + \frac{h_b - r}{h_b} + \frac{h_c - r}{h_c} = 3 - r \cdot \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) =$$
$$= 3 - r \cdot \left(\frac{a+b+c}{2T} \right) = 3 - r \cdot \frac{2s}{2sr} = 3 - 1 = 2.$$



A XIV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

5. évfolyam
1. Sarnyai Kitti, Arany János Általános Iskola, Oromhegyes, **I. díj**
2. Erdélyi Nimród, Petőfi Sándor Általános Iskola, Hajdújárás, **II. díj**
3. Pásztor Viktor, Kókai Imre Általános Iskola, Temerin, **II. díj**
4. Zazrovity Zsolt, Sonja Marinković Általános Iskola, Szentmihály, **III. díj**

6. évfolyam
1. Kőműves Emese, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **I. díj**
2. Árok Anna, Jovan Jovanović Zmaj Általános Iskola, Magyarkanizsa, **II. díj**
3. Csikós Petra, Október 10. Általános Iskola, Szabadka, **II. díj**
4. Nagy Albert, Petőfi Sándor Általános Iskola, Hajdújárás, **III. díj**
5. Somogyi Ákos, Petőfi Sándor Általános Iskola, Hajdújárás, **III. díj**

7. évfolyam
1. Kovács Alex, Petőfi Brigád Általános Iskola, Kúla, **I. díj**
2. Gál József, Ady Endre Kisérleti Általános Iskola, Kishegyes, **II. díj**
3. Apró Dorottya, Jovan Mikić Általános Iskola, Szabadka, **III. díj**
4. Sörös Kinga, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **III. díj**
5. Horváth Evelin, Emlékiskola, Zenta, **III. díj**

8. évfolyam
1. Süli Ákos, Széchenyi István Általános Iskola, Szabadka, **I. díj**
2. Tóth Tamás, Hunyadi János Általános Iskola, Csantavér, **II. díj**
3. Fehér Konrád, Jovan Mikić Általános Iskola, Szabadka, **II. díj**
4. Molnár Dávid, Kizur István Általános Iskola, Szabadka, **III. díj**
5. Sebastian Áron, Október 10. Általános Iskola, Szabadka, **III. díj**

9. évfolyam
1. Hugyik Kornél, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Kratok Gyula, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Paróczi Orsolya, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
4. Zabos Péter, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
5. Besnyi Levente, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

10. évfolyam
1. Szögi Roland, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Sztarek Norbert, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Brindza Mátyás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Kónya Leon, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
5. Nagy Kinga, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

11. évfolyam
1. Böröc Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Szilágyi Éva, Jovan Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék **II. díj**
3. Illés Illés Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

12. évfolyam

1. Szögi Evelin, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Gulyás Oldal Laura, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**

A díjazott általános és középiskolás tanulók a régióvezetőkkel,
Tóth Gabriellával (első kép) és Csikós Pajor Gizellával (második kép).

A XV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Pillanatkép a versenyzőkről a versenybizottság elnökével, Péics Hajnalkával.

XV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

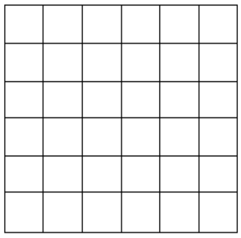
Zenta, 2017. december 2.

5. évfolyam

1. Peti az összes olyan kétjegyű, csupa különböző számjegyet tartalmazó pozitív egész számot szeretné megtalálni, amelynek a számjegyeit tetszőleges sorrendben véve mindig prímszámot kapunk. Segíts neki a keresgélésben!

2. Egy dobozban 72 darab egyforma fakocka található. Hány különböző téglatestet tudunk építeni a kockákból úgy, hogy minden kockát felhasználunk?

3. Peti egy 6×6-os négyzetrács négyzetei közül szeretne befesteni annyit, hogy minden festetlen négyzetnek legyen festett szomszédja. (Két négyzetet szomszédosnak tekintünk, ha két oldaluk teljes egészében közös.)
Legalább hány négyzetet kell befestenie Petinek, hogy teljesüljön a feltétel?



4. Peti osztálytársai, Lotti és Lilla ikrek. Egyes napokon csak igazat mondanak, más napokon csak hazudnak. Lotti hétfőn, kedden, csütörtökön és vasárnap mond igazat, Lilla pedig hétfőn, pénteken és vasárnap hazudik. Egy napon, szünetben mindketten ezt mondták Petinek: *Tegnap igazat mondtam*. A hét mely napján történt mindez?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

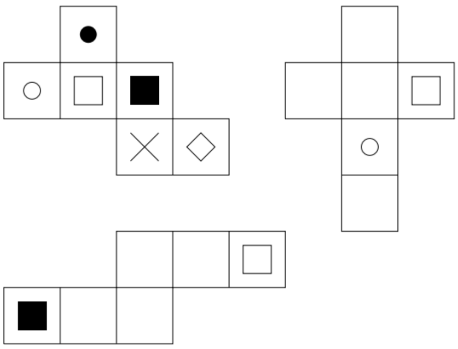
Zenta, 2017. december 2.

<u>6. évfolyam</u>

1. Egy digitális óra kijelzője négy számjeggyel jelzi az időt $00:00$-tól $23:59$-ig. Misi azt mondta az anyukájának, hogy ő csak akkor használja az okos telefonját, ha az órán látható legalább egy 4-es számjegy. Mennyi időt tölt Misi telefonhasználattal naponta, ha minden nap $22:30$-tól másnap reggel $6:30$-ig alszik, a többi időben pedig valóban betartja ezt a szabályt?

2. Egy dobozban 72 darab egyforma fakocka található. Hány különböző téglatestet tudunk építeni a kockákból úgy, hogy minden kockát felhasználunk?

3. Egy papírból készült kocka lapjaira kívülről mintákat rajzoltunk. Ezután szétnyitottuk a kockát, kiterítettük, így az első ábrán látható hálót kaptuk. A másik két hálóból pontosan ugyanilyen kockát szeretnénk hajtogatni. Rajzold be a hiányzó mintákat a megfelelő négyzetekbe! (A papír nem átlátszó, és a mintát csak az egyik oldalon rajzoljuk meg.)



4. Peti azt a legkisebb természetes számot keresi, amely osztható 7-tel, 7-re végződik és 2017-tel kezdődik. Mennyi a keresett szám számjegyeinek az összege?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2017. december 2.

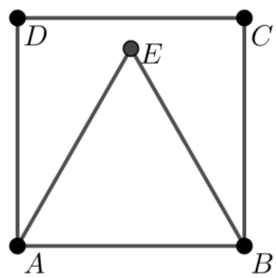
7. évfolyam

1. Egy digitális óra kijelzője négy számjeggyel jelzi az időt $00:00$-tól $23:59$-ig. Misi azt mondta az anyukájának, hogy ő csak akkor használja az okos telefonját, ha az órán látható legalább egy 4-es számjegy. Mennyi időt tölt Misi telefonhasználattal naponta, ha minden nap $22:30$-tól másnap reggel $6:30$-ig alszik, a többi időben pedig valóban betartja ezt a szabályt?

2. Hány olyan pozitív egész szám van, amelynek minden számjegye különböző és a számjegyeinek a szorzata 48?

3. Az $ABCD$ négyzet belső tartományába egy egyenlő oldalú ABE háromszöget rajzoltunk, az ábra szerint.
a) Hány fokos az ECD szög?
b) Hányad része a BEC háromszög területe az $ABCD$ négyzet területének?

Írd le részletesen a megoldás indoklását!



4. Hívjuk R-törtnek azokat a törteket, amelyeknek a számlálója 1. Egyes R-törtek felírhatóak két másik R-tört különbségeként.
a) Írd fel az $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ és $\frac{1}{20}$ R-törteket két R-tört különbségeként!
b) Az előző ötlet felhasználásával számítsd ki a következő összeget:
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}.$$

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2017. december 2.

8. évfolyam

1. Adott 101 szám egy körvonalon. Közülük bármely három egymás mellett elhelyezkedő szám összege 15. Határozd meg az adott 101 szám összegét!

2. Az ABC háromszögben $AB = BC$. A háromszög AD belső szögfelezője kétszer olyan hosszú, mint az AE magasság (a D és E pontok a BC egyenesre illeszkednek). Határozd meg a háromszög belső szögeinek nagyságát!

3. Öt prímszám szorzata egyenlő az összegük 105-szörösével. Melyek lehetnek ezek a számok?

4. Egy röplabda bajnokságon 319 pontot osztottak ki. A győzelem 3 pontot, a döntetlen 1 pontot a vereség pedig 0 pontot ért. Hány csapat vett részt a bajnokságon, ha tudjuk, hogy mindenki mindenkivel 2 meccset játszott és a döntetlenek száma megegyezik a csapatok számával?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2017. december 2.

9. évfolyam

1. Egy társaság meghatározott számú tallért oszt szét egymás között. Az első kap 10 **tallért, meg még a maradék tizedét. A második kap** 20 **tallért, és még az így megmaradt tallérok tizedét. A harmadik kap** 30 **tallért, és még az így megmaradt tallérok tizedét, és így tovább mindaddig, amíg el nem fogy az összes tallér. Ekkor kiderült, hogy mindenki ugyanannyi tallért kapott. Hány tagú a társaság?**

2. Határozd meg az összes (nem feltétlenül különböző) p, q **és** r **prímszámot, amelyre** $r-1<\frac{r}{p}+\frac{r}{q}$ **teljesül!**

3. Az $ABCDEF$ **hatszögre igaz, hogy minden szöge** $120°$**-os. Az** AB **oldala** $2\,cm$**, a** BC **oldala** $7\,cm$**, a** CD **oldala** $3\,cm$ **és a** DE **oldala** $4\,cm$ **hosszú. Milyen hosszúak az** EF**, illetve** FA **oldalak?**

4. Egy 2017 **oldalú szabályos sokszög átlói közül legkevesebb mennyit kell kiválasztanunk ahhoz, hogy minden előforduló hosszúságú átlóból biztosan legyen legalább egy?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2017. december 2.

<u>10. évfolyam</u>

1. Egy társaság meghatározott számú tallért oszt szét egymás között. Az első kap 10 tallért, meg még a maradék tizedét. A második kap 20 tallért, és még az így megmaradt tallérok tizedét. A harmadik kap 30 tallért, és még az így megmaradt tallérok tizedét, és így tovább mindaddig, amíg el nem fogy az összes tallér. Ekkor kiderült, hogy mindenki ugyanannyi tallért kapott. Hány tagú a társaság?

2. Határozd meg az összes olyan négyjegyű négyzetszámot, amelynek számjegyeit eggyel megnövelve a kapott négyjegyű szám szintén négyzetszám!

3. Egy kört az AB átmérője két ívre osztja. Ezek közül az egyiken kijelöljük a C és D pontokat. Legyen az AC és BD egyenesek metszéspontja P, az AD és BC egyenesek metszéspontja pedig Q. Mekkora szöget zár be a PQ egyenes az AB átmérővel?

4. a) Adott egy 8×8-as táblázat. Nevezzük főátlónak a bal alsó sarkot és a jobb felső sarkot összekötő szakaszt. A főátló alatti mezőket 0-kal töltjük ki, míg a többi mezőbe pozitív egész számokat írunk. A kitöltés után kiszámoljuk a sor- és az oszlopösszegeket. Lehetséges-e, hogy a sor- és az oszlopösszegekre az $1, 2, 3, \ldots, 16$ számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?
b) Ha egy 7×7-es táblázatunk van, akkor lehetséges-e olyan, a fenti módon megadott kitöltés, hogy a sor- és az oszlopösszegekre az $1, 2, 3, \ldots, 14$ számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2017. december 2.

11. évfolyam

1. Igazold, hogy $5^n\left(5^n+1\right)-6^n\left(3^n+2^n\right)$ **osztható tizenhárommal minden** n **természetes számra!**

2. Oldd meg a valós számok halmazán a $\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{17}{32}$ **egyenletet!**

3. a) Adott egy 8×8**-as táblázat. Nevezzük főátlónak a bal alsó sarkot és a jobb felső sarkot összekötő szakaszt. A főátló alatti mezőket** 0**-kal töltjük ki, míg a többi mezőbe pozitív egész számokat írunk. A kitöltés után kiszámoljuk a sor- és az oszlopösszegeket. Lehetséges-e, hogy a sor- és az oszlopösszegekre az** $1,2,3,\ldots,16$ **számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?**

b) Ha egy 7×7**-es táblázatunk van, akkor lehetséges-e olyan, a fenti módon megadott kitöltés, hogy a sor- és az oszlopösszegekre az** $1,2,3,\ldots,14$ **számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?**

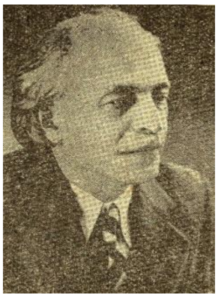
4. Az ABC **háromszög** A **csúcsból induló szögfelezője a háromszög köré írható körét** A_1 **pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy ha a háromszög** BC **oldala az** AA_1 **szakaszt felezi a** D **pontban, akkor**

a) $AC\cdot AD=DC\cdot A_1C$ **és**

b) $AB+AC=BC\cdot\sqrt{2}$ **.**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



XV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2017. december 2.

12. évfolyam

1. a) Adott egy 8×8-as táblázat. Nevezzük főátlónak a bal alsó sarkot és a jobb felső sarkot összekötő szakaszt. A főátló alatti mezőket 0-kal töltjük ki, míg a többi mezőbe pozitív egész számokat írunk. A kitöltés után kiszámoljuk a sor- és az oszlopösszegeket. Lehetséges-e, hogy a sor- és az oszlopösszegekre az $1, 2, 3, \ldots, 16$ számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?

b) Ha egy 7×7-es táblázatunk van, akkor lehetséges-e olyan, a fenti módon megadott kitöltés, hogy a sor- és az oszlopösszegekre az $1, 2, 3, \ldots, 14$ számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?

2. Határozd meg, hogy mennyi a 2017^{12^2} szám 15-tel való osztásakor keletkezett maradék!

3. Adott a p egyenes. Létezik-e olyan
a) 2017-szög,
b) 2018-szög,
amelyre érvényes hogy a p egyenes metszi az adott sokszög minden oldalát egy olyan pontban, amely nem csúcspont?

4. Oldd meg a valós számok halmazán a $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{32}$ egyenletet!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

A XV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

5. évfolyam

1. Peti az összes olyan kétjegyű, csupa különböző számjegyet tartalmazó pozitív egész számot szeretné megtalálni, amelynek a számjegyeit tetszőleges sorrendben véve mindig prímszámot kapunk. Segíts neki a keresgélésben!

Megoldás. A kétjegyű prímszámok a következők: 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Ezek közül csak a következő számok felelnek meg annak a feltételnek, hogy a számjegyeik felcserélve is prímszámot adnak: 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79 és 97. Mivel különböző számjegyeket tartalmazó számokat keresünk így a 11-et is ki kell zárni.
Tehát négy kétjegyű számpár felel meg a feltételeknek: 13 és 31, 17 és 71, 37 és 73, 79 és 97.

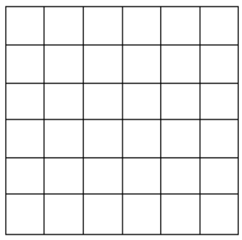
2. Egy dobozban 72 darab egyforma fakocka található. Hány különböző téglatestet tudunk építeni a kockákból úgy, hogy minden kockát felhasználunk?

Megoldás. Mivel $72 = 2^3 \cdot 3^2$, ezért 72 darab kiskockából a következő méretű téglatesteket tudjuk kirakni:

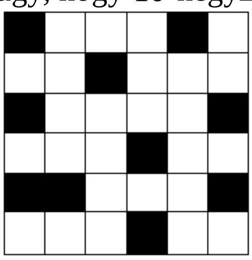
$$72 = 1\cdot 1\cdot 72 = 1\cdot 2\cdot 36 = 1\cdot 3\cdot 24 = 1\cdot 4\cdot 18 = 1\cdot 6\cdot 12 = 1\cdot 8\cdot 9 =$$
$$= 2\cdot 2\cdot 18 = 2\cdot 3\cdot 12 = 2\cdot 4\cdot 9 = 2\cdot 6\cdot 6 = 3\cdot 3\cdot 8 = 3\cdot 4\cdot 6$$

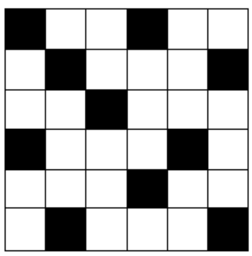
Összesen tehát 12 különböző téglatestet tudunk kirakni.

3. Peti egy 6×6-os négyzetrács négyzetei közül szeretne befesteni annyit, hogy minden festetlen négyzetnek legyen festett szomszédja. (Két négyzetet szomszédosnak tekintünk, ha két oldaluk teljes egészében közös.)
Legalább hány négyzetet kell befestenie Petinek, hogy teljesüljön a feltétel?

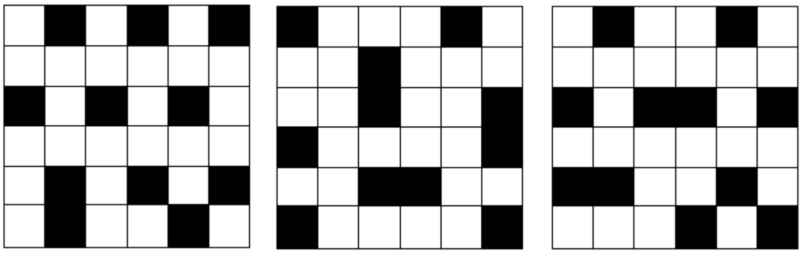


Megoldás.
Megoldható a feladat úgy, hogy 10 négyzetet festünk be:





Csökkentett pontszámért elfogadható a megoldás 11 befestett négyzettel is:



4. Peti osztálytársai, Lotti és Lilla ikrek. Egyes napokon csak igazat mondanak, más napokon csak hazudnak. Lotti hétfőn, kedden, csütörtökön és vasárnap mond igazat, Lilla pedig hétfőn, pénteken és vasárnap hazudik. Egy napon, szünetben mindketten ezt mondták Petinek: *Tegnap igazat mondtam*. A hét mely napján történt mindez?

Megoldás. Ilyet olyan napon mondhattak, amikor aznap és az előző nap is igazat mondtak, vagy mindketten hazudtak. Az alábbi táblázatban **igen** jelzi azt a napot, amikor az adott kislány mondhatta, és a **nem** azt, amikor nem mondhatta a fenti mondatot.

	hétfő	**kedd**	**szerda**	**csütörtök**	**péntek**	**szombat**	**vasárnap**
Lotti	igen	igen	nem	nem	nem	nem	nem
Lilla	igen	nem	igen	igen	nem	nem	nem

Tehát hétfőn történt mindez.

6. évfolyam

1. Egy digitális óra kijelzője négy számjeggyel jelzi az időt $00:00$-tól $23:59$-ig. Misi azt mondta az anyukájának, hogy ő csak akkor használja az okos telefonját, ha az órán látható legalább egy 4-es számjegy. Mennyi időt tölt Misi telefonhasználattal naponta, ha minden nap $22:30$-tól másnap reggel $6:30$-ig alszik, a többi időben pedig valóban betartja ezt a szabályt?

Megoldás. Minden teljes órában 15 perc van, amikor Misi használja az okostelefonját.
Például $7:00$ és $7:59$ között a megfelelő 1 perc hosszúságú időpontok: $7:04$, $7:14$, $7:24$, $7:34$, $7:40$, $7:41$, $7:42$, $7:43$, $7:44$, $7:45$, $7:46$, $7:47$, $7:48$, $7:49$, $7:54$.
Kivételt képez a $14:00$ és a $14:59$ közötti időszak, amikor minden percben használja a telefonját, tehát 60 percig.
$6:30$ és $6:59$ között csak 3 megfelelő időpont van.
$22:00$ és $22:30$ között 12 perc felel meg a feltételnek.
Az ébrenlét időszaka:

$6:30-6:59$	3 perc
$7:00-13:59$	$7\cdot 15=$ 105 perc
$14:00-14:59$	60 perc
$15:00-21:59$	$7\cdot 15=105$ perc
$22:00-22:29$	12 perc
Összesen	285 perc azaz 4 óra 45 perc

Misi tehát naponta 4 óra 45 percet használja a telefonját.

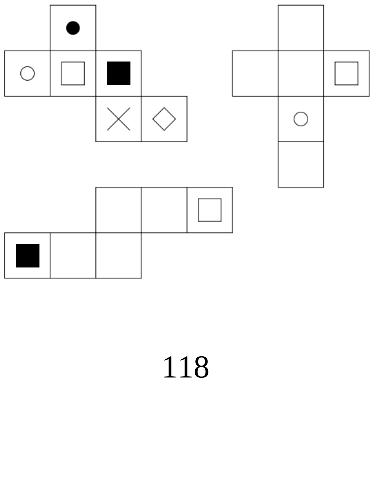
2. Egy dobozban 72 darab egyforma fakocka található. Hány különböző téglatestet tudunk építeni a kockákból úgy, hogy minden kockát felhasználunk?

Megoldás. Mivel $72=2^3\cdot 3^2$, ezért 72 darab kiskockából a következő méretű téglatesteket tudjuk kirakni:

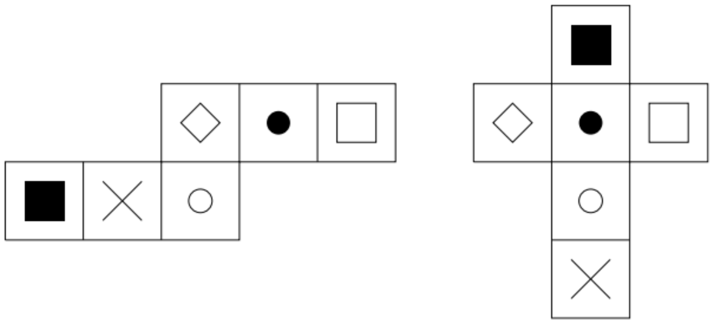
$$72=1\cdot 1\cdot 72=1\cdot 2\cdot 36=1\cdot 3\cdot 24=1\cdot 4\cdot 18=1\cdot 6\cdot 12=1\cdot 8\cdot 9=$$
$$=2\cdot 2\cdot 18=2\cdot 3\cdot 12=2\cdot 4\cdot 9=2\cdot 6\cdot 6=3\cdot 3\cdot 8=3\cdot 4\cdot 6$$

Összesen tehát 12 különböző téglatestet tudunk kirakni.

3. Egy papírból készült kocka lapjaira kívülről mintákat rajzoltunk. Ezután szétnyitottuk a kockát, kiterítettük, így az első ábrán látható hálót kaptuk. A másik két hálóból pontosan ugyanilyen kockát szeretnénk hajtogatni. Rajzold be a hiányzó mintákat a megfelelő négyzetekbe! (A papír nem átlátszó, és a mintát csak az egyik oldalon rajzoljuk meg.)



Megoldás.



4. Peti azt a legkisebb természetes számot keresi, amely osztható 7-tel, 7-re végződik és 2017-tel kezdődik. Mennyi a keresett szám számjegyeinek az összege?

I. megoldás. Annyit tudunk, hogy ha egy többjegyű számot megszorzunk 7-tel, akkor az eredmény 7-re végződik és a szorzó jegyei olyanok, hogy ha végig vezetjük a szorzást, akkor a szorzat elején rendre a 2, 0, 1, 7 jelenik meg.

$$\begin{array}{cccccccc} & \square & \square & \square & \square & \square & 1 & \cdot\ 7 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 7 & & \dots & 7 & \end{array}$$

Néhány próbálkozás után kiderül, hogy a szorzó jegyeit úgy kell megválasztani, hogy a szorzat minél kisebb legyen, és úgy folytatódjon a szorzás, hogy a „maradékkal” együtt kerüljenek elő a 7, 1, 0 és végül a 2.

$$\begin{array}{ccccccc} & 2 & 8 & 8 & 2 & 1 & \cdot\ 7 \\ \cline{2-6} 2 & 0 & 1 & 7 & 4 & 7 & \end{array}$$

Így olyan számhoz jutottunk, amely mindhárom feltételnek megfelel: osztható 7-tel, 7-re végződik és 2017-tel kezdődik.
Ebben a hatjegyű számban a számjegyek összege: $2+0+1+7+4+7=21$.

II. megoldás.

Osztással is indulhatunk:

$$\begin{array}{cccccl} 2 & 0 & 1 & 7 & \square & 7 : 7 = 288\dots 1 \\ & 6 & 1 & & & \\ & & 5 & 7 & & \\ & & & 1 & \square & \end{array}$$

Ide olyan számjegy alkalmas, amely az ott lévő 1-es maradékkal a 7 többszöröse lesz.

Legmegfelelőbb a 4-es lesz. Ezek alapján a 201747-hez jutunk, ami a legkisebb megfelelő szám. Számjegyeinek összege: $2+0+1+7+4+7=21$.

7. évfolyam

1. Egy digitális óra kijelzője négy számjeggyel jelzi az időt $00:00$-tól $23:59$-ig. Misi azt mondta az anyukájának, hogy ő csak akkor használja az okos telefonját, ha az órán látható legalább egy 4-es számjegy. Mennyi időt tölt Misi telefonhasználattal naponta, ha minden nap $22:30$-tól másnap reggel $6:30$-ig alszik, a többi időben pedig valóban betartja ezt a szabályt?

Megoldás. Minden teljes órában 15 perc van, amikor Misi használja az okostelefonját.
Például $7:00$ és $7:59$ között a megfelelő 1 perc hosszúságú időpontok: $7:04$, $7:14$, $7:24$, $7:34$, $7:40$, $7:41$, $7:42$, $7:43$, $7:44$, $7:45$, $7:46$, $7:47$, $7:48$, $7:49$, $7:54$.
Kivételt képez a $14:00$ és a $14:59$ közötti időszak, amikor minden percben használja a telefonját, tehát 60 percig.
$6:30$ és $6:59$ között csak 3 megfelelő időpont van.
$22:00$ és $22:30$ között 12 perc felel meg a feltételnek.
Az ébrenlét időszaka:

$6:30-6:59$		3 perc
$7:00-13:59$	$7\cdot15=$	105 perc
$14:00-14:59$		60 perc
$15:00-21:59$	$7\cdot15=$	105 perc
$22:00-22:29$		12 perc
Összesen		285 perc azaz 4 óra 45 perc

Misi tehát naponta 4 óra 45 percet használja a telefonját.

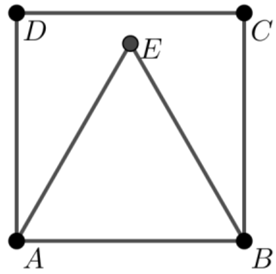
2. Hány olyan pozitív egész szám van, amelynek minden számjegye különböző és a számjegyeinek a szorzata 48?

Megoldás. A 48 prímtényezőkre bontott alakja: $2^4\cdot3$. Ezekből a tényezőkből háromféle szorzat képezhető úgy, hogy különböző számjegyek a tényezők:
$6\cdot8$, $6\cdot2\cdot4$, $8\cdot2\cdot3$,
viszont a feladat feltételeinek megfelelnek azok a szorzatok is, amiket kibővítünk még egy 1-es szorzóval:
$6\cdot8\cdot1$, $6\cdot2\cdot4\cdot1$, $8\cdot2\cdot3\cdot1$
A feladat feltételeinek egyetlen egyjegyű szám sem felel meg.

Kétjegyűek:	$6\cdot8$ $\rightarrow$	68, 86	2 db
Háromjegyűek:	$6\cdot2\cdot4$ $\rightarrow$	264, 246, 462, 426, 624, 642	6 db
	$8\cdot2\cdot3$ $\rightarrow$		6 db
	$6\cdot8\cdot1$ $\rightarrow$		6 db
Négyjegyűek:	$6\cdot2\cdot4\cdot1$ $\rightarrow$		24 db
	$8\cdot2\cdot3\cdot1$ $\rightarrow$		24 db
			68 db

Összesen 68 olyan pozitív egész szám van, ami megfelel a feladat feltételeinek.

3. Az $ABCD$ négyzet belső tartományába egy egyenlő oldalú ABE háromszöget rajzoltunk, az ábra szerint.

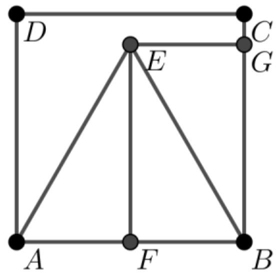


a) Hány fokos az ECD szög?

b) Hányad része a BEC háromszög területe az $ABCD$ négyzet területének?

Írd le részletesen a megoldás indoklását!

Megoldás.



a) Mivel az ABE háromszög szabályos, minden belső szöge $60°$-os. Ezért $EBC\angle = 30°$. Az $EBC\Delta$ egyenlőszárú, ezért $BEC\angle = BCE\angle = 75°$. Mivel $BCE\angle + ECD\angle = 90°$, ezért könnyen kiszámítható, hogy a keresett szög $15°$-os.

b) Jelöljük a négyzet és a háromszög oldalainak hosszát is a-val! Legyenek F és G rendre az E pontból az AB és BC oldalra bocsátott merőlegesek talppontjai. Az $EFBG$ négyszög téglalap, ezért a szembenfekvő oldalai egyenlő hosszúak: $EG = FB$.
Az EF merőleges valójában az ABE egyenlőszárú háromszög magassága is, ezért felezi az AB oldalt. Innen tudjuk, hogy $FB = \frac{a}{2} = EG$. Mivel EG a BCE háromszög BC oldalhoz tartozó magassága, a BEC háromszög területe:

$$T_{BEC\Delta} = \frac{a \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{4}.$$

Mivel az $ABCD$ négyzet területe a^2, könnyen belátható, hogy a BEC háromszög területe az $ABCD$ négyszög területének a negyedrésze.
A BEC háromszög területe tehát az $ABCD$ négyszög területének a negyedrésze.

8. évfolyam

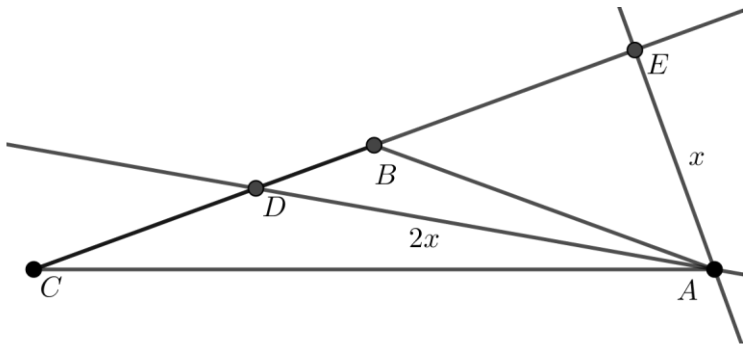
1. Adott 101 szám egy körvonalon. Közülük bármely három egymás mellett elhelyezkedő szám összege 15. Határozd meg az adott 101 szám összegét!

Megoldás. Legyen három szomszédos szám: x, y és z. Mivel bármely három szám összege 15, az y és z számok után ismét x-nek kell következnie, azaz ezek a számok ismétlődnek. A 101 hárommal osztva 2 maradékot ad, tehát a hármas ciklusok felírása után kimarad 2 szomszédos szám. Ezek egyik irányból nézve a z-t követő számok, azaz x és y, a másik irányból nézve pedig az x-et megelőző számok, vagyis y és z.

Ebből az következik, hogy minden szám megegyezik a körön és $x = y = z = \frac{15}{3} = 5$. A 101 szám összege tehát 505.

2. Az ABC háromszögben $AB = BC$. A háromszög AD belső szögfelezője kétszer olyan hosszú, mint az AE magasság (a D és E pontok a BC egyenesre illeszkednek). Határozd meg a háromszög belső szögeinek nagyságát!

Megoldás. Jelöljük az ABC háromszög alapon fekvő szögeit α-val. Vegyük észre, hogy az AED háromszög egy fél szabályos háromszög, azaz az A csúcsánál lévő szöge $60°$. Az ABE szög az ABC háromszög külső szöge és nagysága megegyezik az alapon fekvő szögek összegével, $ABE\angle = 2\alpha$. Innen kifejezhető az ABE derékszögű háromszög A csúcsnál lévő szöge is, $EAB\angle = 90° - 2\alpha$, valamint felírható a következő egyenlet: $90° - 2\alpha + \frac{\alpha}{2} = 60°$. Innen már kiszámítható a háromszög belső szögeinek nagysága.
Válasz: $\alpha = 20°$ és $\beta = 140°$.



3. Öt prímszám szorzata egyenlő az összegük 105-szörösével. Melyek lehetnek ezek a számok?

Megoldás. Legyenek ezek a prímek: p, q, r, s és t. Felírható, hogy $pqrst = 105 \cdot (p + q + r + s + t)$. Mivel prímek, és a 105 felírható a 3, 5 és 7 szorzataként, ezért az öt prímünk közül már ismert három, melyeket telszőlegesen választhatunk meg.

Az egyenlet a következő képpen alakul: $pq = 15 + p + q$. Ebből az egyenletből kifejezve az egyik változót : $p = \frac{15+q}{q-1} = 1 + \frac{16}{q-1}$. Ez azt jelenti, hogy a 16 osztható $q-1$ kifejezéssel, azaz $q-1 \in \{1,2,4,8,16\}$, vagyis $q \in \{2,3,5,9,17\}$. Innen kiszámíthatóak a p értékei, $p \in \{17,9,5,3,2\}$. Ezek a számpárok közül a feladat feltételeinek csak azok felelnek meg, amelyekben a pár mindkét tagja prím. Ezek: $q = 2$ és $p = 17$, vagy $p = q = 5$.
A keresett számok tehát a következők lehetnek: 2, 3, 5, 7, 17 vagy 3, 5, 5, 5, 7.

4. Egy röplabda bajnokságon 319 pontot osztottak ki. A győzelem 3 pontot, a döntetlen 1 pontot a vereség pedig 0 pontot ért. Hány csapat vett részt a bajnokságon, ha tudjuk, hogy mindenki mindenkivel 2 meccset játszott és a döntetlenek száma megegyezik a csapatok számával?

Megoldás. Legyen a csapatok száma n. A meccsek száma $n(n-1)$. A győzelmek száma $n(n-1) - n = n(n-2)$. A kiosztott pontok száma, tehát: $3n(n-2) + 2n = 319$. A bal oldalt átalakítva: $n(3n-4) = 319$. Mivel a 319 prímtényezői a 11 és 29, ezért a csapatok száma 11.

9. évfolyam

1. Egy társaság meghatározott számú tallért oszt szét egymás között. Az első kap 10 tallért, meg még a maradék tizedét. A második kap 20 tallért, és még az így megmaradt tallérok tizedét. A harmadik kap 30 tallért, és még az így megmaradt tallérok tizedét, és így tovább mindaddig, amíg el nem fogy az összes tallér. Ekkor kiderült, hogy mindenki ugyanannyi tallért kapott. Hány tagú a társaság?

Megoldás. A tallérok számát jelöljük x-szel. Az első személy ezek szerint $10+\frac{x-10}{10}$ tallért kapott, míg a második $20+\frac{x-10-\frac{x-10}{10}-20}{10}$ tallért kapott. A feltételek szerint ez a két mennyiség egyenlő, vagyis az

$$10+\frac{x-10}{10}=20+\frac{x-10-\frac{x-10}{10}-20}{10}$$

egyenlet megoldása adja a keresett számot: $x=810$. Mivel mindenki egyformán 90 tallért kap, ezért a társaság kilenctagú.

2. Határozd meg az összes (nem feltétlenül különböző) p, q és r prímszámot, amelyre $r-1<\frac{r}{p}+\frac{r}{q}$ teljesül!

Megoldás. Az egyenlőtlenség mindkét oldalát r-rel osztva és átrendezve az $1<\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$ alakú egyenlőtlenséget kapjuk. Ha a nevezőkben a legkisebb prímszám nem kisebb háromnál, akkor a jobb oldal legfeljebb 1 lehet, és így nem teljesül az egyenlőtlenség, tehát a keresett prímszámok között van legalább egy 2-es. Ha pontosan egy 2-es van, akkor a következő számhármasok adódnak:

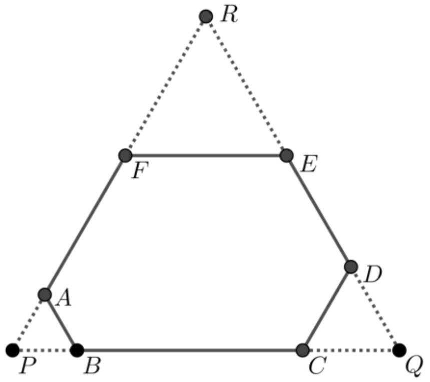
$(2,3,3)$, $(3,2,3)$, $(3,3,2)$, továbbá

$(2,3,5)$, $(2,5,3)$, $(3,2,5)$, $(3,5,2)$, $(5,2,3)$ és $(5,3,2)$.

Amennyiben legalább két 2-es van, akkor a harmadik szám bármelyik prímszám lehet: $(2,2,t)$, $(2,t,2)$ és $(t,2,2)$, ahol t tetszőleges prímszám.

3. Az $ABCDEF$ hatszögre igaz, hogy minden szöge $120°$-os. Az AB oldala $2\,cm$, a BC oldala $7\,cm$, a CD oldala $3\,cm$ és a DE oldala $4\,cm$ hosszú. Milyen hosszúak az EF, illetve FA oldalak?

Megoldás. Hosszabbítsuk meg a hatszög BC, ED és FA oldalát. Az oldalegyenesek metszéspontját jelölje P, Q és R. (Lásd az ábrát!)



Mivel a hatszög külső szögei $180°-120°=60°$, így a hozzárajzolt kis háromszögek szabályosak, tehát a PQR háromszög is szabályos.
Tekintsük a PQ szakaszt:

$$PQ = PB + BC + CQ = AB + BC + CD =$$
$$= 2 + 7 + 3 = 12\ cm$$

A PQR háromszög egyenlő oldalú volta miatt: $QR = RP = 12\ cm$.
Ekkor $EF = ER = 12 - (QD + DE) = 12 - (CD + DE) = 12 - 3 - 4 = 5\ cm$.
Hasonlóan kapjuk, hogy $FA = PR - (AP + FR) = PR - (AB + EF) = 12 - 2 - 5 = 5\ cm$.

4. Egy 2017 **oldalú szabályos sokszög átlói közül legkevesebb mennyit kell kiválasztanunk ahhoz, hogy minden előforduló hosszúságú átlóból biztosan legyen legalább egy?**

Megoldás. A sokszögnek $\frac{2017 \cdot 2014}{2} = 2031119$ átlója van. Egy csúcsból 2014 átló indul ki. Ezek $2014:2=1007$-féle hosszúságúak. Mindegyik hosszúságúból $2031119:1007=2017$ darab van. Ha $1006 \cdot 2017$-et kiválasztunk, az nyilván nem elég, mert lehet, hogy az egyik fajtából egyáltalán nem választottunk, az összes többiből meg az összeset. De ha $1006 \cdot 2017+1$-et választunk, akkor az már biztosan elég lesz, mert ha valamelyik fajta hosszúságú átló hiányozna, akkor legfeljebb $1006 \cdot 2017$ darab átló lehetne kiválasztva. A keresett szám tehát: $1006 \cdot 2017 + 1 = 2029103$.

10. évfolyam

1. Egy társaság meghatározott számú tallért oszt szét egymás között. Az első kap 10 tallért, meg még a maradék tizedét. A második kap 20 tallért, és még az így megmaradt tallérok tizedét. A harmadik kap 30 tallért, és még az így megmaradt tallérok tizedét, és így tovább mindaddig, amíg el nem fogy az összes tallér. Ekkor kiderült, hogy mindenki ugyanannyi tallért kapott. Hány tagú a társaság?

Megoldás. A tallérok számát jelöljük x-szel. Az első személy ezek szerint $10+\frac{x-10}{10}$ tallért kapott, míg a második $20+\frac{x-10-\frac{x-10}{10}-20}{10}$ tallért kapott. A feltételek szerint ez a két mennyiség egyenlő, vagyis az

$$10+\frac{x-10}{10}=20+\frac{x-10-\frac{x-10}{10}-20}{10}$$

egyenlet megoldása adja a keresett számot: $x=810$. Mivel mindenki egyformán 90 tallért kap, ezért a társaság kilenctagú.

2. Határozd meg az összes olyan négyjegyű négyzetszámot, amelynek számjegyeit eggyel megnövelve a kapott négyjegyű szám szintén négyzetszám!

Megoldás. Jelölje x^2 a keresett négyjegyű számot, y^2 pedig azt a négyjegyű számot, ahol az előző négyjegyű szám számjegyeit eggyel megnöveltük. Ebben az esetben a két szám különbsége 1111, tehát az $x^2-y^2=1111$ egyenletet kell megoldani, ahol az x és y pozitív egész számok. Az egyenletet átalakítva kapjuk:

$$(x-y)(x+y)=1111.$$

Az 1111 prímtényezői a 11 és a 101 ezért az 1111-nek az osztói: 1, 11, 101 és 1111.

Így a lehetőségek:

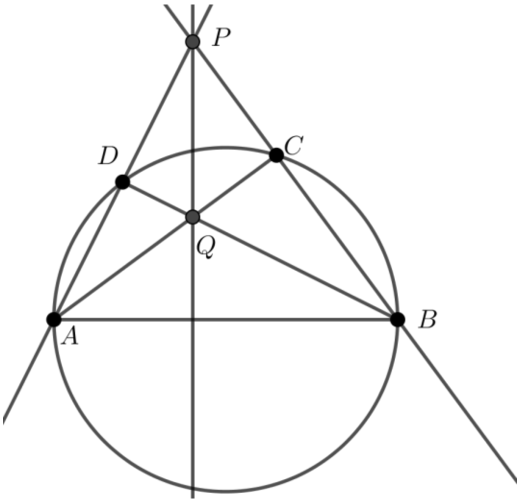
1. eset: $x-y=1$
$x+y=1111$ ebből $x=556$ és $y=555$, de ez nem megoldás.

2. eset: $x-y=11$
$x+y=101$ ebből $x=56$ és $y=45$, ez jó megoldás.

A keresett négyjegyű szám tehát a 2025.

3. Egy kört az AB átmérője két ívre osztja. Ezek közül az egyiken kijelöljük a C és D pontokat. Legyen az AC és BD egyenesek metszéspontja P, az AD és BC egyenesek metszéspontja pedig Q. Mekkora szöget zár be a PQ egyenes az AB átmérővel?

Megoldás. A Thalész-tétel alapján az ACB szög és az ADB szög derékszög. Ennek következtében az APB háromszögben AD és BC magasságvonalak. Így metszéspontjuk Q az APB háromszög magasságpontja, PQ pedig a harmadik magasságvonala, azaz a PQ egyenes merőleges az AB-re.



4. a) Adott egy 8×8-as táblázat. Nevezzük főátlónak a bal alsó sarkot és a jobb felső sarkot összekötő szakaszt. A főátló alatti mezőket 0-kal töltjük ki, míg a többi mezőbe pozitív egész számokat írunk. A kitöltés után kiszámoljuk a sor- és az oszlopösszegeket. Lehetséges-e, hogy a sor- és az oszlopösszegekre az $1,2,3,\ldots,16$ számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?

b) Ha egy 7×7-es táblázatunk van, akkor lehetséges-e olyan, a fenti módon megadott kitöltés, hogy a sor- és az oszlopösszegekre az $1,2,3,\ldots,14$ számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?

Megoldás. a) Elérhető a kívánt kitöltés. Egyik ilyen kitöltés látható az ábrán. Bármilyen helyes kitöltés elfogadható.

2	2	2	2	2	2	2	1	15
2	2	2	2	2	2	2	0	14
2	2	2	2	2	1	0	0	11
2	2	2	2	2	0	0	0	10
2	2	2	1	0	0	0	0	7
2	2	2	0	0	0	0	0	6
2	1	0	0	0	0	0	0	3
2	0	0	0	0	0	0	0	2
16	13	12	9	8	5	4	1	

b) A kívánt kitöltés nem valósítható meg. Indirekt módszerrel bizonyítjuk, azaz tegyük fel, hogy megvalósítható a kívánt kitöltés a 7×7-es táblán is.
Adjuk össze a 7 sorösszeget, illetve a 7 oszlopösszeget. Legyen ez az összeg S. Az S-t úgy is megkaphattuk volna, hogy a táblázat számait kétszer összeadjuk, tehát az S páros szám. A feltételünk alapján az oszlopösszeg és a sorösszeg valamilyen sorrendben az $1,2,3,\ldots,14$ számok. Azaz $S=1+2+3+\cdots+14=105$. Ez ellentmond S párosságával, így ellentmondásra jutottunk.

11. évfolyam

1. Igazold, hogy $5^n\left(5^n+1\right)-6^n\left(3^n+2^n\right)$ osztható tizenhárommal minden n természetes számra!

Megoldás. A kifejezést két részre bontva $A=25^n-12^n$ és $B=5^n-18^n$, amelyekre igazoljuk, hogy oszthatóak 13-mal, ebben az esetben az összegük is osztható 13-mal.

$A=25^n-12^n$

$n=1$: $25-12=13$

$n=k$: $25^k-12^k=13\cdot l,\ l\in\mathbf{N}$

$n=k+1$: $25^{k+1}-12^{k+1}=25\cdot25^k-12\cdot12^k=$

$=12\cdot\left(25^k-12^k\right)+13\cdot25^k=12\cdot13l+13\cdot25^k=13\cdot\left(12l+25^k\right)$

$B=5^n-18^n$

$n=1$: $5-18=-13$

$n=k$: $5^k-18^k=13\cdot t,\ t\in\mathbf{N}$

$n=k+1$: $5^{k+1}-18^{k+1}=5\cdot5^k-18\cdot18^k=$

$=5\cdot\left(5^k-18^k\right)-13\cdot18^k=5\cdot13t-13\cdot18^k=13\cdot\left(5t-18^k\right)$

2. Oldd meg a valós számok halmazán a $\sin^8 x+\cos^8 x=\dfrac{17}{32}$ egyenletet!

Megoldás. Ha mindkét oldalhoz hozzáadjuk a $2\sin^4 x\cdot\cos^4 x$ kifejezést, akkor a bal oldal binom négyzetére alakítható:

$$\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)^2=\frac{17}{32}+2\sin^4 x\cdot\cos^4 x.$$

A baloldali kifejezés a zárójelen belül is binom négyzetére alakítható:

$$\left(\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x\right)^2=\frac{17}{32}+\frac{1}{8}\cdot16\sin^4 x\cdot\cos^4 x$$

$$\left(1-\frac{1}{2}4\sin^2 x\cdot\cos^2 x\right)^2=\frac{17}{32}+\frac{1}{8}\cdot16\sin^4 x\cdot\cos^4 x,$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)^2=\frac{17}{32}+\frac{1}{8}\cdot\sin^4 2x.$$

Vezessük be a következő helyettesítést: $t=\dfrac{\sin^2 2x}{2}$, $t\in\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right]$. Ekkor adódik, hogy $\left(1-t\right)^2=\dfrac{17}{32}+\dfrac{1}{2}\cdot t^2$, azaz $t^2-4t+\dfrac{15}{16}=0$, amely egyenletnek megoldásai $t_1=\dfrac{15}{4}$ és $t_2=\dfrac{1}{4}$, de a feltétel miatt csak a második megoldás fogadható el, azaz: $\dfrac{\sin^2 2x}{2}=\dfrac{1}{4}$.

Megoldva ezt az egyenletet, a $\sin 2x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ trigonometrikus egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai $2x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$, azaz $x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4}$, $k\in\mathbf{Z}$.

3. a) Adott egy 8×8-as táblázat. Nevezzük főátlónak a bal alsó sarkot és a jobb felső sarkot összekötő szakaszt. A főátló alatti mezőket 0-kal töltjük ki, míg a többi mezőbe pozitív egész számokat írunk. A kitöltés után kiszámoljuk a sor- és az oszlopösszegeket. Lehetséges-e, hogy a sor- és az oszlopösszegekre az $1,2,3,\ldots,16$ számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?

b) Ha egy 7×7-es táblázatunk van, akkor lehetséges-e olyan, a fenti módon megadott kitöltés, hogy a sor- és az oszlopösszegekre az $1,2,3,\ldots,14$ számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?

Megoldás. a) Elérhető a kívánt kitöltés. Egyik ilyen kitöltés látható az ábrán. Bármilyen helyes kitöltés elfogadható.

2	2	2	2	2	2	2	1	15
2	2	2	2	2	2	2	0	14
2	2	2	2	2	1	0	0	11
2	2	2	2	2	0	0	0	10
2	2	2	1	0	0	0	0	7
2	2	2	0	0	0	0	0	6
2	1	0	0	0	0	0	0	3
2	0	0	0	0	0	0	0	2
16	13	12	9	8	5	4	1	

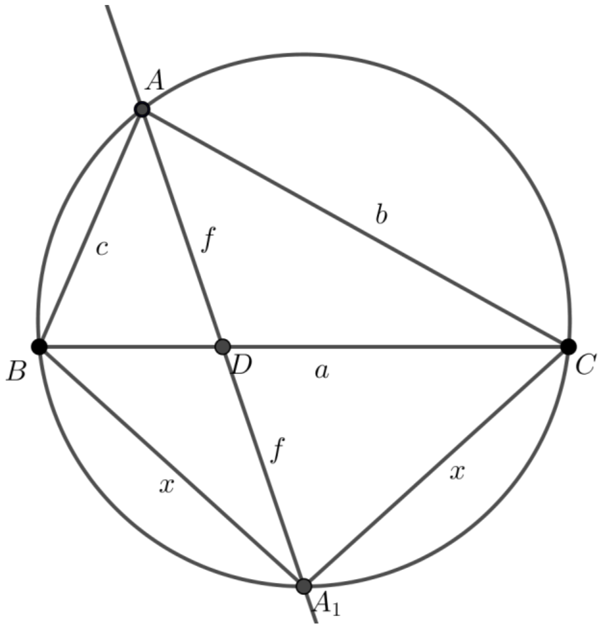
b) A kívánt kitöltés nem valósítható meg. Indirekt módszerrel bizonyítjuk, azaz tegyük fel, hogy megvalósítható a kívánt kitöltés a 7×7-es táblán is.
Adjuk össze a 7 sorösszeget, illetve a 7 oszlopösszeget. Legyen ez az összeg S. Az S-t úgy is megkaphattuk volna, hogy a táblázat számait kétszer összeadjuk, tehát az S páros szám. A feltételünk alapján az oszlopösszeg és a sorösszeg valamilyen sorrendben az $1,2,3,\ldots,14$ számok. Azaz $S=1+2+3+\cdots+14=105$. Ez ellentmond S párosságával, így ellentmondásra jutottunk.

4. Az ABC háromszög A csúcsból induló szögfelezője a háromszög köré írható körét A_1 pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy ha a háromszög BC oldala az AA_1 szakaszt felezi a D pontban, akkor

a) $AC\cdot AD=DC\cdot A_1C$ **és**

b) $AB+AC=BC\cdot\sqrt{2}$ **.**

Megoldás. Használjuk a következő ábra jelöléseit!



a) Mivel a BA_1 húr feletti kerületi szögek egybevágóak, $BAA_1\angle = BCA_1\angle$, ezért $BA_1 = CA_1 = x$, valamint a D felezi az AA_1 szakaszt, $AD = DA_1 = f$, akkor az ADC és A_1DC háromszögek területe egyenlő. Felírhatjuk a háromszögek területképleteit:

$$T_{ADC\Delta} = \frac{b \cdot f \cdot \sin\varphi}{2} \text{ és } T_{A_1DC\Delta} = \frac{DC \cdot x \cdot \sin\varphi}{2},$$

ebből pedig $b \cdot f = DC \cdot x$, azaz $AC \cdot AD = DC \cdot A_1C$.

b) A szögfelező tétel alapján

$$AB : AC = BD : DC \text{, azaz } \frac{c}{b} = \frac{a - DC}{DC},$$

amelyből következik, hogy $DC = \dfrac{a \cdot b}{c+b}$. Ezt összekötve az előzővel adódik, hogy

$$b \cdot f = \frac{a \cdot b}{c+b} \cdot x \text{, innen pedig } x = \frac{b \cdot f \cdot (c+b)}{a \cdot b}.$$

A húrnégyszögre vonatkozó Ptolemaiosz-tétel alapján a szemközti oldalak szorzatának összege egyenlő az átlóinak szorzatával, ezért $2f \cdot a = x \cdot c + x \cdot b$, vagyis behelyettesítve az előzőeket:

$$2f \cdot a = x \cdot (c+b), \qquad 2f \cdot a = \frac{b \cdot f \cdot (c+b)}{a \cdot b} \cdot (b+c),$$

azaz egyszerűsítve és rendezve $2 \cdot a^2 = (c+b)^2$, ami a bizonyítandó egyenlőség, vagyis $AB + AC = BC \cdot \sqrt{2}$.

12. évfolyam

1. a) Adott egy 8×8-as táblázat. Nevezzük főátlónak a bal alsó sarkot és a jobb felső sarkot összekötő szakaszt. A főátló alatti mezőket 0-kal töltjük ki, míg a többi mezőbe pozitív egész számokat írunk. A kitöltés után kiszámoljuk a sor- és az oszlopösszegeket. Lehetséges-e, hogy a sor- és az oszlopösszegekre az $1,2,3,\ldots,16$ számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?
b) Ha egy 7×7-es táblázatunk van, akkor lehetséges-e olyan, a fenti módon megadott kitöltés, hogy a sor- és az oszlopösszegekre az $1,2,3,\ldots,14$ számokat kapjuk eredményül (valamilyen sorrendben)?

Megoldás. a) Elérhető a kívánt kitöltés. Egyik ilyen kitöltés látható az ábrán. Bármilyen helyes kitöltés elfogadható.

2	2	2	2	2	2	2	1	15
2	2	2	2	2	2	2	0	14
2	2	2	2	2	1	0	0	11
2	2	2	2	2	0	0	0	10
2	2	2	1	0	0	0	0	7
2	2	2	0	0	0	0	0	6
2	1	0	0	0	0	0	0	3
2	0	0	0	0	0	0	0	2
16	13	12	9	8	5	4	1	

b) A kívánt kitöltés nem valósítható meg. Indirekt módszerrel bizonyítjuk, azaz tegyük fel, hogy megvalósítható a kívánt kitöltés a 7×7-es táblán is.
Adjuk össze a 7 sorösszeget, illetve a 7 oszlopösszeget. Legyen ez az összeg S. Az S-t úgy is megkaphattuk volna, hogy a táblázat számait kétszer összeadjuk, tehát az S páros szám. A feltételünk alapján az oszlopösszeg és a sorösszeg valamilyen sorrendben az $1,2,3,\ldots,14$ számok. Azaz $S=1+2+3+\cdots+14=105$. Ez ellentmond S párosságával, így ellentmondásra jutottunk.

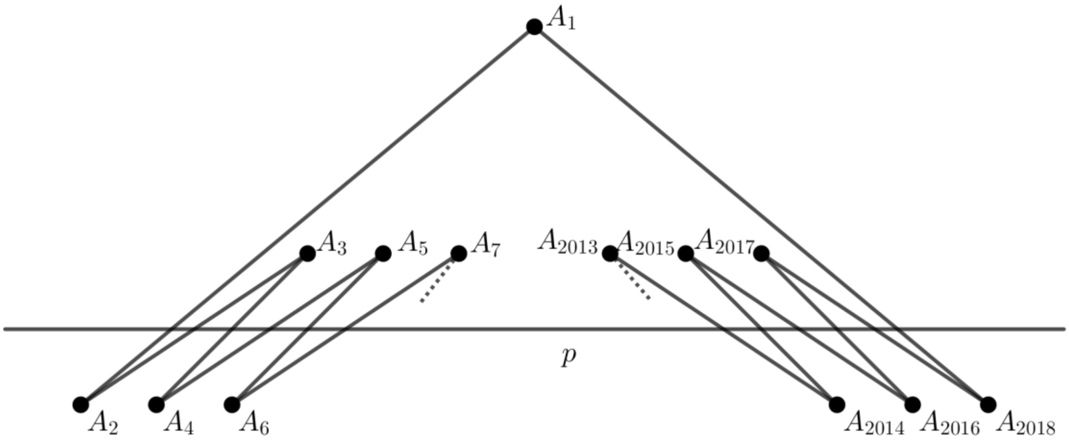
2. Határozd meg, hogy mennyi a 2017^{12^2} szám 15-tel való osztásakor keletkezett maradék!

Megoldás. Mivel $2017\equiv_{15}7$, valamint $7^4=2401\equiv_{15}1$, ezért érvényes hogy:

$$2017^{12^2}=2017^{144}\equiv_{15}7^{144}=\left(7^4\right)^{38}\equiv_{15}1^{38}=1\ .$$

3. Adott a p egyenes. Létezik-e olyan
a) 2017-szög,
b) 2018-szög,
amelyre érvényes hogy a p egyenes metszi az adott sokszög minden oldalát egy olyan pontban, amely nem csúcspont?

Megoldás. a) Nem lehet, mert a 2017 páratlan szám. Ha egy egyenes metszi egy sokszög minden oldalát egy olyan pontban ami nem csúcspont, akkor az egyenes mindkét oldalán a sokszögnek ugyanannyi csúcsa kell, hogy legyen, vagyis egy ilyen sokszög csúcsainak száma csakis páros szám lehet.
b) Létezik ilyen sokszög. Például:



4. Oldd meg a valós számok halmazán a $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{32}$ **egyenletet!**

Megoldás. Ha mindkét oldalhoz hozzáadjuk a $2\sin^4 x \cdot \cos^4 x$ kifejezést, akkor a bal oldal binom négyzetére alakítható:

$$\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)^2 = \frac{17}{32} + 2\sin^4 x \cdot \cos^4 x .$$

A baloldali kifejezés a zárójelen belül is binom négyzetére alakítható:

$$\left(\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x\right)^2 = \frac{17}{32} + \frac{1}{8} \cdot 16\sin^4 x \cdot \cos^4 x$$

$$\left(1 - \frac{1}{2} 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x\right)^2 = \frac{17}{32} + \frac{1}{8} \cdot 16\sin^4 x \cdot \cos^4 x ,$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)^2 = \frac{17}{32} + \frac{1}{8} \cdot \sin^4 2x .$$

Vezessük be a következő helyettesítést: $t = \frac{\sin^2 2x}{2}$, $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Ekkor adódik, hogy $\left(1-t\right)^2 = \frac{17}{32} + \frac{1}{2} \cdot t^2$, azaz $t^2 - 4t + \frac{15}{16} = 0$, amely egyenletnek megoldásai $t_1 = \frac{15}{4}$ és $t_2 = \frac{1}{4}$, de a feltétel miatt csak a második megoldás fogadható el, azaz: $\frac{\sin^2 2x}{2} = \frac{1}{4}$.

Megoldva ezt az egyenletet, a $\sin 2x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ trigonometrikus egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai $2x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, azaz $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$.

A XV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

5. évfolyam
1. Dobó Ármin, Jovan Mikić Általános Iskola/Cofman Iskola, Szabadka, **I. díj**
2. Kratok Bence, Csáki Lajos Általános Iskola, Topolya, **II. díj**
3. Buják Réka, József Attila Általános Iskola, Kupuszina, III. **díj**

6. évfolyam
1. Erdélyi Nimród, Petőfi Sándor Általános Iskola, Hajdújárás, **I. díj**
2. Rekecki Dávid, Arany János Általános Iskola, Oromhegyes, **I. díj**
3. Virág Boglárka, Cseh Károly Általános Iskola, Ada, **II. díj**
4. Szabó Dorina, Arany János Általános Iskola, Tóthfalu, **III. díj**
5. Zázrovity Zsolt, Sonja Marinković Általános Iskola, Nagybecskerek, **III. díj**

7. évfolyam
1. Kőműves Emese, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **I. díj**
2. Árok Anna, Jovan Jovanović Zmaj Általános Iskola, Magyarkanizsa, **II. díj**
3. Somogyi Ákos, Petőfi Sándor Általános Iskola, Hajdújárás, **III. díj**
4. Lázár Anna, Jovan Jovanović Zmaj Általános Iskola, Magyarkanizsa, **III. díj**

8. évfolyam
1. Kovács Alex, Petőfi Brigád Általános Iskola, Kúla, **I. díj**
2. Apró Dorottya, Jovan Mikić Általános Iskola, Szabadka, **II. díj**
3. Ágó Gergely, November 11. Általános Iskola, Zenta, **III. díj**

9. évfolyam
1. Fodor Gábor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Fehér Konrád, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Tóth Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
4. Molnár Dávid, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
5. Kopasz Petra, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

10. évfolyam
1. Kratok Gyula, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Apró János, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
3. Hugyik Kornél, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
4. Paróczi Orsolya, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
5. Kőrösi Zalán, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

11. évfolyam
1. Szögi Rolnad, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Nagy Kinga, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Sztarek Norbert, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
4. Rúzsa Ákos, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

12. évfolyam

1. Illés Illés Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Böröc Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Karvák Beatrix, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

A díjazott versenyzők.

A XVI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Pillanatkép a versenyzőkről.

XVI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

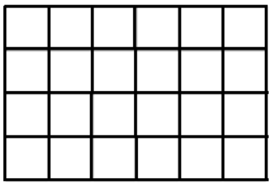
Zenta, 2018. december 1.

5. évfolyam

1. Jancsi és Juliska egy tál mézes pogácsát osztott szét egymás között. Először Jancsi vett a tálból egyet, aztán Juliska kettőt, utána Jancsi hármat, és így tovább felváltva, mindig eggyel többet, mint amennyit a másik vett. A végén Jancsinak csak négy darab pogácsa maradt, de megvigasztalódott, amikor látta, hogy így összesen pont ugyanannyi pogácsát kaptak mindketten. Hány mézes pogácsát osztottak szét?

2. Jancsi észrevette, hogy egy bizonyos hónapban három szerda dátuma is páros szám volt. Hányadika volt ebben a hónapban az utolsó vasárnap?

3. Segíts Jancsinak és Juliskának és oszd fel az ábrán adott 6×4**-es téglalapot a rácsvonalak mentén** 3 **részre úgy, hogy mindegyik rész:**

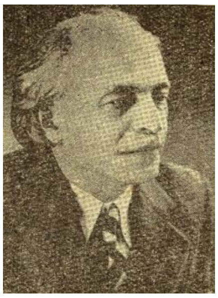


a) hatszög,
b) nyolcszög és
c) tízszög legyen!
(Elég csak a felosztásokat megadni, nincs szükség indoklásra.)

4. Juliska úgy írt le egy százjegyű természetes számot, hogy a 2018**-at írta egymás után többször:** $201820182018...20182018$**.**
a) Legalább hány számjegyet kell kitörölni ebből a számból, hogy a megmaradó szám számjegyeinek összege 100 **legyen?**
b) Legfeljebb hány számjegyet kell kitörölni ebből a számból, hogy a megmaradó szám számjegyeinek összege 100 **legyen?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



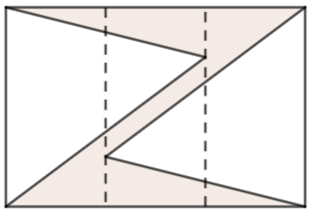
XVI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2018. december 1.

6. évfolyam

1. 9 **papírlap közül néhányat** 10 **részre vágtak szét, majd az így kapott részek közül néhányat ismét** 10 **részre vágtak szét, és így tovább. Lehetséges-e, hogy ezt néhányszor megismételve** 20181201 **papírdarabot kapjunk?**

2. Alkottunk egy végtelen hosszúságú számsorozatot úgy, hogy a páros számokat egymás után írtuk: $2468101214...$
a) Melyik a 2018**. számjegy, az így kapott sorozatban?**
b) Hány 2**-es számjegy szerepel a sorozat első** 2018 **számjegyei között?**

3. Gergő egy téglalap alakú papírlap hosszabb oldalát két párhuzamos szakasszal 3 **egyenlő részre osztotta. Ezután egy nagy** Z **betűt rajzolt az ábrán látható módon, majd azután azt kivágta a téglalap alakú papírból. (A két „töréspont” a szaggatott szakaszokra illeszkedik.) A** Z **területe hányad része a téglalap területének?**



4. Boldizsár az $1\times1\times2$ **cm élű kis téglatestekből, egy** $14\times14\times28$ **cm élű nagy téglatestet ragasztott össze.**
a) Legkevesebb hány kis téglatestet kell a nagy téglatestre ráragasztania úgy, hogy az így létrejövő test felszíne $2018\ cm^2$ **legyen?**
b) Legkevesebb hány kis téglatestet ragasztott így egymáshoz összesen?
(A kis téglatesteket egy teljes lapjukkal kell egymáshoz ragasztania, úgy hogy két kis téglatest egy-egy teljes lapjukkal illeszkedjen egymáshoz.)

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XVI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2018. december 1.

7. évfolyam

1. **Misi megszorzott egymással hét különböző egész számot, és** 2156**-ot kapott eredményül. Melyik hét számot szorozta meg? Van-e ennek a feladatnak több megoldása is?**

2. Karolina leírta egymás alá az első 2018 **temészetes számot, és összeadta őket.**
a) Milyen számjegy áll a 10**-esek helyén?**
b) Mi lesz az összeadás eredménye?

3. Legyen az ABC **egy tetszőleges hegyesszögű háromszög. Legyen a** D **pont az** A **csúcsból a** BC **oldalra bocsátott magasságvonal talppontja, az** E **pedig a** B **pontból az** AC **oldalra bocsátott magasságvonal talppontja. Bizonyítsd be, hogy a** BD **és az** AE **szakaszok felezőmerőlegeseinek metszéspontja rajta van az** AB **oldalon!**

4. Egy egyenlőoldalú háromszög oldalai $30\,cm$ **hosszúak. Beleszórunk ebbe a háromszögbe** 10 **búzaszemet. Lehetséges-e úgy elhelyezni ezeket a búzaszemeket, hogy bármely két búzaszem között legalább** $10\,cm$ **legyen távolság? A választ részletesen indokold meg!**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

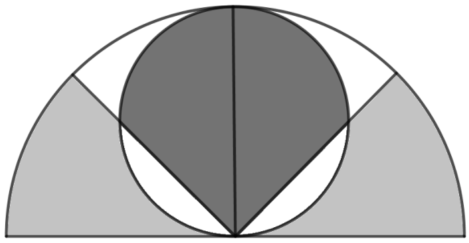
XVI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2018. december 1.

8. évfolyam

1. Két barát a következő játékot játsza: felváltva mondanak egy-egy számot az 1, 2, 3 és 4 közül, majd összeadják az elhangzott számokat. Az a játékos nyer, akinél az összeg eléri a 23-at. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

2. Egy félkörbe kört rajzoltunk, majd meghúztuk a szögfelezőket az ábrán látható módon. Határozd meg a halványszürke terület nagyságát, ha ismert, hogy a sötétszürke terület nagysága $150\ cm^2$.



3. Határozd meg az összes olyan $\overline{abcd}$ négyjegyű számot, amelyre érvényes, hogy

$$\overline{abcd} + 3\overline{bcd} + \overline{cd} + d = 2018.$$

4. Egy osztály zöld hétvégét tartott. Szombaton minden lány $70\ cm^2$-en és minden fiú $55\ cm^2$-en szedte össze a szemetet a szomszédos erdőben, de ha csak a fiúk dolgoztak volna, akkor mindannyiuknak $X\ cm^2$-t kellett volna megtisztítaniuk. Vasárnap minden lány $45\ cm^2$-t és minden fiú $60\ cm^2$-t tisztított meg, de ha csak a lányok dolgoztak volna, akkor mindannyiuknak $X\ cm^2$-en kellett volna összeszedni a szemetet. Határozd meg az X értékét!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2018. december 1.

9. évfolyam

1. Mely valós számok elégítik ki a következő egyenletrendszert:

$$-2018|x| + y + z = 2017,$$
$$x + y + z = 2018,$$
$$x + y + 2z = 2019.$$

2. Melyik az a legkisebb természetes szám, amelyre érvényes, hogy ha 7-tel, 8-cal, 9-cel vagy 10-zel maradékosan elosztjuk, akkor a maradék rendre 2, 0, 1, 8?

3. Az $ABCD$ téglalap AB oldalának hossza $40\,cm$, BC oldalának hossza $30\,cm$. A téglalap AD és CD oldalára mint átmérőre félköröket rajzolunk a téglalap belseje felé. A két félkör a téglalap P pontjában metszi egymást. Mekkora az ABP háromszög területe?

4. a) Egy bolha ugrál a számegyenesen. Az origóból indul és mindig egy egységnyit ugrik pozitív vagy negatív irányba. Hol lehet ez a bolha a 100. ugrás után? Hány ilyen pont van?
b) Egy másik bolha ugrál a derékszögű koordináta-rendszerben. Az origóból indul és mindig egy egységnyit ugrik valamelyik tengellyel párhuzamosan. Hol lehet ez a bolha a 100. ugrás után? Hány ilyen pont van?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XVI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2018. december 1.

10. évfolyam

1. Oldd meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$2x^3+x+5-y^2=0.$$

2. Adott a valós függvényeknek egy sorozata a következő módon:

$$f_1(x)=\frac{x}{x-1},\ f_2(x)=\frac{1}{1-x},\ f_{n+2}(x)=f_{n+1}\left(f_n(x)\right),$$

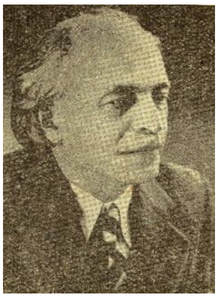
ahol az n természetes szám. Mennyi az $f_{2018}(2019)$ értéke?

3. Az ABC szabályos háromszög BC oldalát a C-n túl meghosszabbítottuk a BC oldal felével, és így a D ponthoz jutottunk. A D-ből kiinduló félegyenes az AC oldalt annak felezőpontjában, F-ben metszi, az AB oldalnak pedig E-vel jelölt pontján halad át. Hányad része az AE szakasz hossza az ABC háromszög kerületének?

4. A táblára felírunk 2017 nullát, 2018 egyest és 2019 kettes számjegyet. Minden alkalommal két különböző számjegyet törlünk és helyettük a 0, 1, 2 számjegy közül azt az egy számjegyet írjuk, amely abban a lépésben nem került letörlésre.
a) Bizonyos lépés után maradhat-e csupa nulla sorozat?
b) Amikor a táblán csak egy számjegy maradt, akkor mely számjegyek lehetnek azok?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



XVI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2018. december 1.

11. évfolyam

1. Határozd meg a következő egyenletrendszer minden valós megoldását:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2018} = 2018,$$
$$x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{2018}^4 = x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{2018}^3.$$

2. Egy derékszögű háromszög α és β hegyesszögeire érvényes, hogy

$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta + \mathrm{tg}^3\alpha + \mathrm{tg}^3\beta = 70.$$

Számítsd ki az adott derékszögű háromszög hegyesszögeit!

3. Az ABC háromszögben az $ABC\angle$ szögfelezője metszi a háromszög körülírt körét D pontban. Bizonyítsd be, hogy teljesül a $BD^2 > BA \cdot BC$ egyenlőtlenség!

4. A röplabda-bajnokságon összesen tíz csapat versenyzett, minden csapat minden másik csapattal játszott egy mérkőzést. A verseny végén az első csapatnak x_1 győzelme és y_1 veresége volt, második csapatnak x_2 győzelme és y_2 veresége volt, harmadik csapatnak x_3 győzelme és y_3 veresége volt, stb. Igazold, hogy ekkor teljesül az $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{10}^2$ egyenlőség!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XVI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2018. december 1.

12. évfolyam

1. Bizonyítsd be, hogy ha az $f(x)$ olyan egész együtthatós polinom, hogy öt különböző egész helyen 1-et vesz fel értékül, akkor nincs olyan a egész szám, amelyre $f(a)=-1$ lenne!

2. Adottak az A, B, C, D nem egy síkban fekvő pontok, amelyekre érvényes, hogy $AB=BC=CD=DA$. Az M, illetve az N pont az AC, illetve a BD szakasz felezőpontja. Igazold, hogy MN az AC és BD szakaszok közös merőlegese!

3. Oldd meg a következő egyenletet a természetes számok halmazában:

$$x!+123=y^5$$

4. Kezdetben egy 3×3-as táblázat minden mezőjén 0 áll, majd egy-egy lépésben a tábla valamely 2×2-es részén a számok mindegyikét 1-gyel növeljük. Megkaphatjuk-e ilyen lépésekkel a következő kitöltést?

4	9	5
10	18	12
6	13	7

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

A XVI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

5. évfolyam

1. Jancsi és Juliska egy tál mézes pogácsát osztott szét egymás között. Először Jancsi vett a tálból egyet, aztán Juliska kettőt, utána Jancsi hármat, és így tovább felváltva, mindig eggyel többet, mint amennyit a másik vett. A végén Jancsinak csak négy darab pogácsa maradt, de megvigasztalódott, amikor látta, hogy így összesen pont ugyanannyi pogácsát kaptak mindketten. Hány mézes pogácsát osztottak szét?

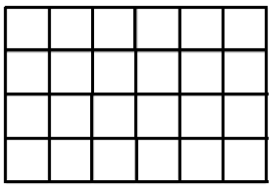
Megoldás. Juliska körönként 1-gyel többet vesz, mint Jancsi, így négy kör alatt vesz 4-gyel többet. Tehát a kiosztott pogácsák száma: $1+2+3+4+5+6+7+8+4=40$.

Jancsi	Juliska
1	2
3	4
5	6
7	8
4	
20	20

2. Jancsi észrevette, hogy egy bizonyos hónapban három szerda dátuma is páros szám volt. Hányadika volt ebben a hónapban az utolsó vasárnap?

Megoldás. Páros dátumú szerdák csak kéthetente lehetnek. Az első és az utolsó páros szerda között 28 nap van. Ezért az első szerda csak 2-dika lehet. Az utolsó szerda dátuma így 30-dika lesz. A hónap utolsó vasárnapja 27-dikére esik.

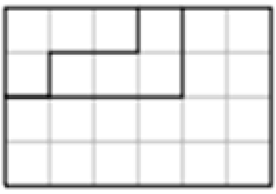
3. Segíts Jancsinak és Juliskának és oszd fel az ábrán adott 6×4-es téglalapot a rácsvonalak mentén 3 részre úgy, hogy mindegyik rész:



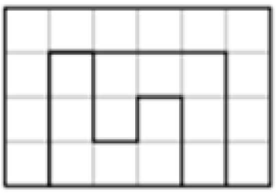
a) hatszög,
b) nyolcszög és
c) tízszög legyen!
(Elég csak a felosztásokat megadni, nincs szükség indoklásra.)

Megoldás. Mindhárom esetben több megoldás is elképzelhető. Egy-egy példa:

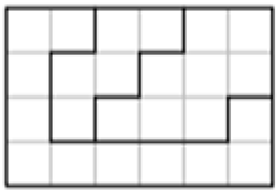
a) három hatszögre



b) három nyolcszögre



c) három tízszögre



4. Juliska úgy írt le egy százjegyű természetes számot, hogy a 2018-at írta egymás után többször: $201820182018...20182018$.
a) Legalább hány számjegyet kell kitörölni ebből a számból, hogy a megmaradó szám számjegyeinek összege 100 legyen?
b) Legfeljebb hány számjegyet kell kitörölni ebből a számból, hogy a megmaradó szám számjegyeinek összege 100 legyen?

Megoldás. A százjegyű számot úgy kapta Juliska, hogy a 2018 négyjegyű számot $100:4=25$-ször leírta egymás után. Ebben a számban 25-ször fordul elő a 2-es, a 0, az 1-es és a 8-as számjegy.
E számjegyek összege: $25\cdot(2+0+1+8)=25\cdot 11=275$.

a) 275 helyett úgy lesz 100 a számjegyek összege, ha 175 összegű számjegyet kihagyunk. Ezt a legkevesebb darabból akkor tudjuk megtenni, ha a legnagyobb értékű számjegyeket hagyjuk ki. Itt ez a 8-as. 21 db 8-as értéke $21\cdot 8=168$. Még hetet kell elvenni, amit 3 db 2-es és 1 db 1-es alkot.
Végül összesen $21+3+1=25$ db számjegy elhagyásával elérhető, hogy a megmaradt 75 jegyű szám jegyeinek összege 100 legyen.
Megmarad: 4 db 8-as, 22 db 2-es, 24 db 1-es és 25 db 0.
Ezek összege: $4\cdot 8+22\cdot 2+24\cdot 1+25\cdot 0=32+44+24+0=100$.
b) A 25 db 2-esből, 25 db 0-ból, 25 db 1-esből és 25 db 8-asból a lehető legtöbb számjegy elhagyásával úgy kaphatunk egy 100 számjegy-összegű számot, ha elhagyjuk mind a 25 db 0-t, mind a 25 db 1-est, majd 23 db 2-est és 13 db 8-ast, akkor $100-(25+25+23+13)=100-86=14$ jegyű szám marad, amely számjegyeinek összege 100. Tehát legfeljebb 86 db számjegyet lehet kitörölni.
Megmarad 12 db 8-as és 2 db 2-es. $12\cdot 8+2\cdot 2=96+4=100$.

6. évfolyam

1. 9 **papírlap közül néhányat** 10 **részre vágtak szét, majd az így kapott részek közül néhányat ismét** 10 **részre vágtak szét, és így tovább. Lehetséges-e, hogy ezt néhányszor megismételve** 20181201 **papírdarabot kapjunk?**

Megoldás. Nem lehetséges. A papírlapok száma minden lépésben 9-cel osztható. 20181201 pedig nem osztható 9-cel.

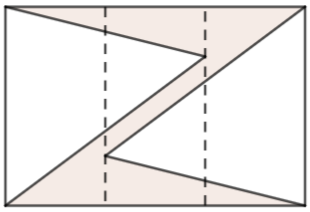
2. Alkottunk egy végtelen hosszúságú számsorozatot úgy, hogy a páros számokat egymás után írtuk: $2468101214...$
a) Melyik a 2018. **számjegy, az így kapott sorozatban?**
b) Hány 2**-es számjegy szerepel a sorozat első** 2018 **számjegyei között?**

Megoldás.
a) A számsorozatban 4 egyjegyű, 45 kétjegyű, 450 háromjegyű, és 4500 négyjegyű szám van. Ez alapján

$$2018 = 4\cdot 1 + 2\cdot 45 + 3\cdot 450 + 4\cdot 143 + 2.$$

A számsorozat 2018. eleme tehát, a 144. négyjegyű szám (1286) második számjegye, azaz 2.
b) A 4 egyjegyű szám között 1 darab, a 45 kétjegyű szám között $9\cdot 1 + 5 = 14$ darab, a 450 háromjegyű szám között $9\cdot 10 + 9\cdot 5 + 50 = 185$ darab, valamint a 144 darab négyjegyű szám között $2\cdot 15 + 44 = 74$ darab 2-es található. Így a sorozat első 2018 számjegye között összesen 274 darab 2-es található.

3. Gergő egy téglalap alakú papírlap hosszabb oldalát két párhuzamos szakasszal 3 **egyenlő részre osztotta. Ezután egy nagy** Z **betűt rajzolt az ábrán látható módon, majd azután azt kivágta a téglalap alakú papírból. (A két „töréspont” a szaggatott szakaszokra illeszkedik.) A** Z **területe hányad része a téglalap területének?**



Megoldás. Nevezzük el a téglalap hosszabb oldalát a-nak, rövidebb oldalát pedig b-nek. Ekkor az ábrán levő háromszögek b oldalra mért magassága $\frac{2}{3}a$. Tehát Z területe

$$T_Z = ab - 2\left(\frac{\frac{2}{3}ab}{2}\right) = \frac{1}{3}ab,$$

azaz Z területe a téglalap harmadrésze.

4. Boldizsár az $1\times1\times2$ cm élű kis téglatestekből, egy $14\times14\times28$ cm élű nagy téglatestet ragasztott össze.
a) Legkevesebb hány kis téglatestet kell a nagy téglatestre ráragasztania úgy, hogy az így létrejövő test felszíne $2018\ cm^2$ legyen?
b) Legkevesebb hány kis téglatestet ragasztott így egymáshoz összesen?
(A kis téglatesteket egy teljes lapjukkal kell egymáshoz ragasztania, úgy hogy két kis téglatest egy-egy teljes lapjukkal illeszkedjen egymáshoz.)

Megoldás. A nagy téglatest felszíne $2\cdot14\cdot14+4\cdot14\cdot28=1960\ cm^2$, tehát még $58\ cm^2$-nyi felületet kell ráragasztani.

a) Egy kis téglatest ráragasztásával 6, avagy $8\ cm^2$-nyi felülettel bővíti a nagy téglatestet. Legkevesebb 8 kis téglatestet kell hozzáragasztania úgy, hogy 5 darab $8\ cm^2$-rel (az 1×1-es lapjánál ragasztja oda), 3 darab pedig $6\ cm^2$-rel (az 1×2-es lapjánál ragasztja oda) bővítse a nagy téglatest felületét.

b) Összesen $2\cdot14\cdot14+4\cdot13\cdot12+8=1024$ kis téglatestet ragasztott így össze, mivel a nagy téglatest lehet üreges.

7. évfolyam

1. Misi megszorzott egymással hét különböző egész számot, és 2156-ot kapott eredményül. Melyik hét számot szorozta meg? Van-e ennek a feladatnak több megoldása is?

Megoldás. A 2156 prímtényezős formája: $2\cdot 2\cdot 7\cdot 7\cdot 11$ mindössze 5 számból áll amelyek között vannak egyenlőek. 7 különbőző számot úgy kaphatunk, ha a 2 párjaként a -2-t, a 7 párjaként a -7-et választjuk. Így már lesz 5 különböző szorzónk. Hogy meglegyen a 7 különböző szám, hozzávesszük ezekhez az 1 és -1 számokat. Ha az eddigi szorzatot ezekkel megszorozzuk, csak az előjele változik negtívra. Hogy az eredmény pozitívvá váljon, a 11 előjele is neagtív kell, hogy legyen. Tehát:

$$2156 = 1\cdot(-1)\cdot 2\cdot(-2)\cdot 7\cdot(-7)\cdot(-11).$$

A feladatnak nincs több megoldása.

2. Karolina leírta egymás alá az első 2018 temészetes számot, és összeadta őket.
a) Milyen számjegy áll a 10-esek helyén?
b) Mi lesz az összeadás eredménye?

I. megoldás. A feladat valójában az $1+2+3+4+5+...+2016+2017+2018$ összeg kiszámítása. Vegyük észre, hogy $1+2018=2019$, $2+2017=2019$, $3+2016=2019$. Tehát, ha összeadjuk az első tagot az utolsóval, 2019-et kapunk. Ha ezeket letöröljük, akkor az újabb elsőt az újabb utolsóval öszeadva szintén 2019-et kapunk, és így tovább. Összesen $\frac{2018}{2}=1009$ párosunk van. Az összeg tehát $1009\cdot 2019=2037171$, ami azt jelenti, hogy a tízesek helyén a 7 áll.

II. megoldás. Az egymás alá írt számokat úgy adjuk össze, hogy először összeadjuk az utolsó számjegyeket tartalmazó oszlopot. Ebben az oszlopban az

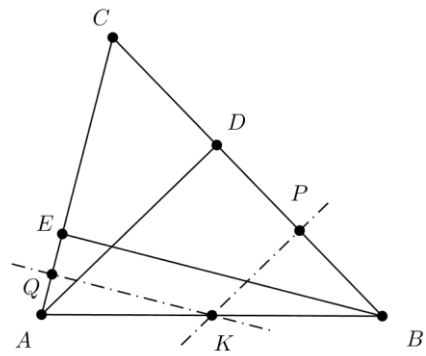
$$(1+2+3+4+5+6+7+8+9+0)+\cdots+(1+2+3+4+5+6+7+8+9+0)+$$
$$+(1+2+3+4+5+6+7+8)$$

összeg áll. Mivel $1+2+3+4+5+6+7+8+9+0=45$, és ez az összeg 201-szer ismétlődik, így $201\cdot 45=9045$. Hozzájön még az utolsó,

$$1+2+3+4+5+6+7+8=36.$$

Az utolsó számjegyek összege tehát $9045+36=9081$. Ebből leírjuk az egyesek helyére az 1-et, majd átviszünk 908-at. Az utolsó előtti oszlopban ugyanezek a számjegyek fordulnak elő azzal, hogy minden 100-asban (pl 200 és 299 között) 10 db 0-ás, 10 db 1-es, 10 db 2-es, ..., 10 db 9-es számjegy van. Ezek összege $10\cdot 45=450$. Mivel 2018-ig 20 db teljes százas van (1-től 1999-ig), ez $20\cdot 450=9000$. 2000 és 2018 között a 10-esek helyén $10\cdot 0+8\cdot 1=8$ összeget kapunk. Így összesen: $908\,(\text{átvitel})+9000+9=9917$, amiből leírjuk a százasok helyére a 7-et, majd átvisszük a 991-et. A százasok helyén 199 db 0 áll, majd 200 db 1-es, 200 db 2-es, és így tovább, végül 200 db 9-es. 2000 és 2018 között ezen a helyen csak 0-ák állnak, így ezek összege nem hat ki az eredményre. A százasok helyére tehát $991\,(\text{átvitel})+20\cdot 45=9991$ kerülne, amiből leírjuk az 1-est a százasok helyére, és átviszünk 999-et. Az ezresek helyén előbb 999 db 0 van, majd 1000 db 1-es, végül 19 db 2-es. Így $999\,(\text{átvitel})+999\cdot 0+1000\cdot 1+19\cdot 2=2037$, ezt mind leírjuk az eddig leírt számjegyek elé, s az eredmény 2037171 lesz. A tízesek helyén a 7 -es számjegy áll.

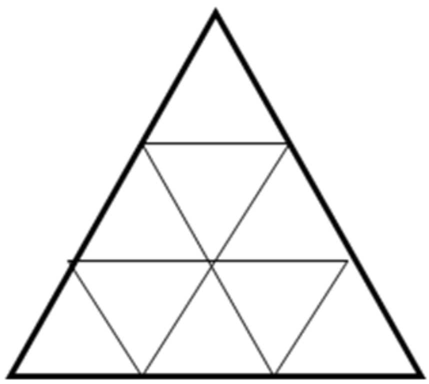
3. Legyen az ABC egy tetszőleges hegyesszögű háromszög. Legyen a D pont az A csúcsból a BC oldalra bocsátott magasságvonal talppontja, az E pedig a B pontból az AC oldalra bocsátott magasságvonal talppontja. Bizonyítsd be, hogy a BD és az AE szakaszok felezőmerőlegeseinek metszéspontja rajta van az AB oldalon!



Megoldás. A feladat vázlata az ábrán található. Legyen DB felezőpontja P, AE felezőpontja pedig Q. Mivel a DB szakasz felezőmerőlegese merőleges a DB szakaszra, és az AD magasságvonal is merőleges a BC oldalra (ami magán hordozza a DB szakaszt), ezért a felezőmerőleges párhuzamos a magasságvonallal. Nevezzük K-nak azt a pontot az AB szakaszon, ahol a DB szakasz felezőmerőlegese metszi azt. Két dolgot tudunk: PK párhuzamos AD-vel, és PK áthalad az DB oldala felezőpontján. Ez elegendő ahhoz, hogy PK középvonal legyen az ABD háromszögben. Ebből pedig az következik, hogy a K pont az AB oldal felezőpontja.

Analóg módon: Tegyük fel, hogy az AB oldalon van egy K_1 pont, ahol az AE felezőmerőlegese áthalad. A QK_1 szakasz középvonal az ABE háromszögben, hisz áthalad az AE oldal felezőpontján és párhuzamos a BE oldallal. A középvonal az AB oldalt a felezőpontjában metszi, tehát K_1 is az AB oldal felezőpontja. Az AB oldalnak csak egy középpontja van így kimondhatjuk, hogy K és K_1 egybeesnek.

4. Egy egyenlőoldalú háromszög oldalai $30\,cm$ hosszúak. Beleszórunk ebbe a háromszögbe 10 búzaszemet. Lehetséges-e úgy elhelyezni ezeket a búzaszemeket, hogy bármely két búzaszem között legalább $10\,cm$ legyen távolság? A választ részletesen indokold meg!



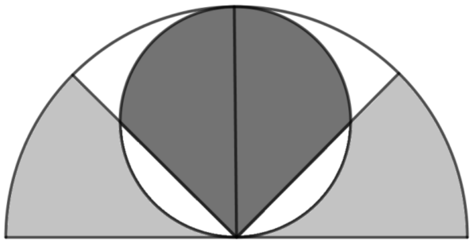
Megoldás. A háromszög minden oldalát 3 részre osztjuk. Összekötjük a megfelelő osztópontokat (az oldalakkal párhuzamos szakaszokat kapunk), s kialakul 9 db egyenlő oldalú háromszög amelyeknek az oldala $10\,cm$ hosszú. Mivel 10 db búzaszemet kell elosztani bennük, a skatulya elv alapján lesz egy olyan kis háromszög, amibe 2 búzaszem kerül. Mivel a kis háromszögek oldala $10\,cm$ hosszú, ez a két búzaszem kevesebb mint $10\,cm$ távolságra lesz egymástól. Ennek alapján megállapíthatjuk, hogy nem lehet a háromszögbe elhelyezni úgy 10 búzaszemet, hogy bármely kettő között legyen legalább $10\,cm$ távolság.

8. évfolyam

1. Két barát a következő játékot játsza: felváltva mondanak egy-egy számot az 1, 2, 3 és 4 közül, majd összeadják az elhangzott számokat. Az a játékos nyer, akinél az összeg eléri a 23-at. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

Megoldás. A választható számok közül a legkisebb és legnagyobb összege 5, így a játékosok el tudják érni, hogy minden kör után öttel növekedjen az összeg. Az első játékos a hármas számmal kezd, majd mindig azt a számot mondja, amelyet a második játékos számához adva az összeg öt lesz. Ekkor az első játékos számai után az összeg 3, 8, 13, 18, majd 23 lesz. Így megnyeri a játékot.

2. Egy félkörbe kört rajzoltunk, majd meghúztuk a szögfelezőket az ábrán látható módon. Határozd meg a halványszürke terület nagyságát, ha ismert, hogy a sötétszürke terület nagysága $150\ cm^2$.



Megoldás. Legyen a kör sugara r, ekkor a félköré $2r$. A fehér körszelet területét jelöljük T-vel. A sötét rész nagysága felírható $r^2\pi - 2T$ alakban, a halványé pedig mint $2\dfrac{(2r)^2\pi}{8} - 2T = r^2\pi - 2T$. Vagyis a világos rész területe megegyezik a sötét területével, azaz 150 cm^2.

3. Határozd meg az összes olyan $\overline{abcd}$ négyjegyű számot, amelyre érvényes:

$$\overline{abcd} + 3\overline{bcd} + \overline{cd} + d = 2018.$$

Megoldás. Az $\overline{abcd} + 3\overline{bcd} + \overline{cd} + d = 2018$ egyenlőség felírható

$$1000a + 400b + 50c + 6d = 2018$$

alakban. Innen következik, hogy a csak 1 illetve 2 lehet. Ha $a = 1$, akkor $400b + 50c + 6d = 1018$. Innen következik $b = 2$, mert minden más b esetén túl nagy, illetve túl kicsi lenne az összeg. Az $50c + 6d = 218$ összefüggésből egyértelműen következik, hogy $c = 4$ és $d = 3$. Ha $a = 2$, akkor $400b + 50c + 6d = 18$. Innen következik, hogy $b = c = 0$ és $d = 3$. Tehát két ilyen szám létezik az 1243 és a 2003.

4. Egy osztály zöld hétvégét tartott. Szombaton minden lány $70\ cm^2$-en és minden fiú $55\ cm^2$-en szedte össze a szemetet a szomszédos erdőben, de ha csak a fiúk dolgoztak volna, akkor mindannyiuknak $X\ cm^2$-t kellett volna megtisztítaniuk. Vasárnap minden lány $45\ cm^2$-t és minden fiú $60\ cm^2$-t tisztított meg, de ha csak a lányok dolgoztak volna, akkor mindannyiuknak $X\ cm^2$-en kellett volna összeszedni a szemetet. Határozd meg az X értékét!

Megoldás. Jelölje l a lányok számát és f a fiúk számát. Szombatra felírható a

$$70l + 55f = X \cdot l$$

egyenlet, vasárnapra pedig a

$$45l + 60f = X \cdot f$$

egyenlet. A két egyenlet összeadásából adódik, hogy $115l + 115f = X \cdot l + X \cdot f$.
Kiemelés után: $115(l + f) = X \cdot (l + f)$, az X értéke tehát 115.

9. évfolyam

1. Mely valós számok elégítik ki a következő egyenletrendszert:

$$-2018|x|+y+z=2017,$$
$$x+y+z=2018,$$
$$x+y+2z=2019.$$

Megoldás. A harmadik egyenletből kivonva a másodikat $z=1$-et kapunk. Ekkor az egyenletrendszer így módosul:

$$-2018|x|+y=2016,$$
$$x+y=2017.$$

Most az első egyenletből kivonva a második egyenletet adódik, hogy $-2018|x|=x-1$.

Ha $x<0$, akkor $2017x=-1$, és $x=-\frac{1}{2017}$, a második egyenletből pedig

$$y=2017\frac{1}{2017}.$$

Ha $x\geq 0$, akkor $2019x=1$, és $x=\frac{1}{2019}$, a második egyenletből pedig

$$y=2016\frac{2018}{2019}.$$

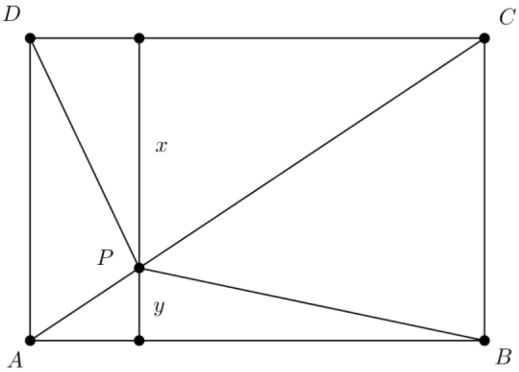
A két megoldás tehát: $\left(-\frac{1}{2017},2017\frac{1}{2017},1\right)$ és $\left(\frac{1}{2019},2016\frac{2018}{2019},1\right)$.

2. Melyik az a legkisebb természetes szám, amelyre érvényes, hogy ha 7-tel, 8-cal, 9-cel vagy 10-zel maradékosan elosztjuk, akkor a maradék rendre 2, 0, 1, 8?

Megoldás. Először tekintsük az első két feltételt, azaz keressünk olyan természetes számokat, amelyek 7-tel osztva 2-t, 8-cal osztva 0-t adnak maradékul. Ezek a számok biztosan $7k+2$ alakúak, ahol k nemnegatív egész szám. A 8-cal való oszthatóság miatt k lehetséges értékei: 2, 10, $18,\ldots$, azaz $7k+2$ lehetséges értékei 16, 72, $128,\ldots$. Pontosan ezek azok a számok, amelyek teljesítik az első két feltételt. Általános alakjuk: $56l+16$, ahol l nemnegatív egész szám.
Ha egy $56l+16$ alakú szám 9-cel osztva 1-et ad maradékul, akkor az $56l+15$ osztható 9-cel. A könnyebb számolás érdekében számoljunk csak a 9-es maradékokkal, azaz vizsgáljuk a $2l+6$ kifejezés 9-cel való oszthatóságát. Könnyen látható, hogy l lehetséges értékei 6, 15, 24, 33, $42,\ldots$, azaz az eredeti kifejezésbe behelyettesítve $56l+16$-ra 352, 856, 1360, 1864, $2368,\ldots$adódik.
A 2368 kielégíti a feltételeket, és mivel a feladat minden lépésében a lehető legkisebb számot választottuk, a 2368-nál nincs kisebb megfelelő szám.

3. Az $ABCD$ téglalap AB oldalának hossza $40\ cm$, BC oldalának hossza $30\ cm$. A téglalap AD és CD oldalára mint átmérőre félköröket rajzolunk a téglalap belseje felé. A két félkör a téglalap P pontjában metszi egymást. Mekkora az ABP háromszög területe?

Megoldás. Mivel a P pont rajta van az AD és az AB oldalakra mint átmérőkre rajzolt köríveken, ezért az APD szög és az CPD szög egyaránt derékszög (lásd az ábrát).



Először kiszámítjuk a DP szakasz hosszát, amely az ACD derékszögű háromszög magassága. Ismerve a téglalap átlójának hosszát, amely Pitagorasz-tétele alapján $50\ cm$, a területet kétféleképpen kapjuk:

$$\frac{AD \cdot DC}{2} = \frac{AC \cdot DP}{2}, \text{ ahonnan } DP = (30 \cdot 40) : 50 = 24\ cm.$$

Következő lépésként kiszámoljuk az AP szakasz hosszát. Mivel $DP^2 = AD^2 - AP^2$ és $DP^2 = DC^2 - PC^2$, a jobb oldalakba beírva az ismert hosszakat és egymással kiegyenlítve őket a következő egyenletet kapjuk:

$$30^2 - AP^2 = 40^2 - (50 - AP)^2,$$

$$900 - AP^2 = 1600 - 2500 + 100AP - AP^2,$$

ahonnan $AP = 18\ cm$ és $PC = 32\ cm$. DP is kiszámítható:

$$DP = \sqrt{AD^2 - AP^2} = \sqrt{30^2 - 18^2} = 24.$$

Most a DPC háromszög területét kétféleképpen felírva ki tudjuk számolni az x-szel jelölt szakasz hosszát:

$$\frac{DP \cdot PC}{2} = \frac{x \cdot CD}{2}, \text{ ahonnan } x = \frac{24 \cdot 32}{40} = \frac{96}{5} = 19,2\ cm.$$

Mivel $y = 30 - 19,2 = 10,8\ cm$, így $T_{ABP} = \frac{AB \cdot y}{2} = \frac{40 \cdot 10,8}{2} = 216\ cm^2$, s ez a keresett terület.

4. a) Egy bolha ugrál a számegyenesen. Az origóból indul és mindig egy egységnyit ugrik pozitív vagy negatív irányba. Hol lehet ez a bolha a 100. ugrás után? Hány ilyen pont van?
b) Egy másik bolha ugrál a derékszögű koordináta-rendszerben. Az origóból indul és mindig egy egységnyit ugrik valamelyik tengellyel párhuzamosan. Hol lehet ez a bolha a 100. ugrás után? Hány ilyen pont van?

Megoldás. a) Tegyük föl, hogy a bolhának x ugrása volt pozitív irányba, ekkor a 100. ugrás után az $x - (100 - x) = 2x - 100$ -adik pontban van. Mivel x lehetséges értékei 0, 1, …, 100, így az előző kifejezés a $-100, -98, -96, \ldots, 98, 100$ értékeket adja, vagyis pontosan ezekben a pontokban tartózkodhat a bolha a 100. ugrás után. A másik kérdésre válaszolva: 101 ilyen pont van.

b) Ha a bolha a 100. lépés után – nevezzük ezt a továbbiakban végállapotnak – az $(x;y)$ koordinátájú pontban áll meg, akkor $|x|+|y|=100$. Ezek szerint a bolha végállapota egy olyan $ABCD$ négyzetben (beleértve annak határát is) van, amelynek csúcsai: $(100,0),(0,100),(-100,0),(0,-100)$.

1. eset: Megmutatjuk, hogy a négyzet minden olyan rácspontja szóba jöhet, amelyre $x+y$ páros. Ugyanis ekkor a $100-x-y$ is páros, ugorjon ennyit a bolha oda-vissza a $(0,0)$ és a $(0,1)$ pontok között, majd a megmaradt ugrásokból ugorjon x-et az x tengellyel párhuzamosan a megfelelő irányba, és y-t az y tengellyel párhuzamosan ugyanígy. Ekkor a bolha éppen az (x,y) pontba jut.

2. eset: Megmutatjuk, hogy az $ABCD$ négyzet olyan pontjai, amelyek esetén $x+y$ páratlan, nem jöhetnek szóba. A bolha egy ugrása során a helyzetét leíró koordináták összege paritást vált. Az első ugrás után ez páratlan, majd páros, majd páratlan, és így tovább. Világos, hogy a 100. ugrás után az $x+y$ összeg csak páros lehet.

Hátra van még a végállapotok összeszámlálása. A $(100,k)$ koordinátájú pontok közül a bolha csak a $(100,0)$ pontba tud eljutni a korábbiak szerint. Ezt így írjuk, majd a gondolatmenetet folytatjuk:

$(100,k)$	$k=0$	Összesen 1 darab
$(99,k)$	$k=-1,1$	Összesen 2 darab
$(98,k)$	$k=-2,0,2$	Összesen 3 darab
…		
$(1,k)$	$k=-99,-97,\ldots,97,99$	Összesen 100 darab
$(0,k)$	$k=-100,-98,\ldots,98,100$	Összesen 101 darab

A szimmetria miatt az összes esetek száma tehát:

$$101+2\cdot(100+99+98+\cdots+2+1)=101+2\cdot\frac{101\cdot100}{2}=101^2=10201.$$

10. évfolyam

1. Oldd meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$2x^3+x+5-y^2=0.$$

Megoldás. A $2x^3+x$ kifejezést $2x^3-2x+3x=2x(x-1)(x+1)+3x$ alakba írva belátható, hogy a $2x^3+x$ kifejezés mindig osztható 3-mal. Más módon, a $2x^3+x$ kifejezést $x(2x^2+1)$ alakban írva, az $x=3k$, $x=3k+1$, illetve $x=3k+2$ eseteket vizsgálva szintén megállapíthatjuk, hogy a $2x^3+x$ kifejezés mindig osztható 3-mal.
Ezért az

$$2x^3+x+5=y^2$$

egyenlőség bal oldalának 3-mal való osztási maradéka mindig 2, jobb oldalon pedig egy négyzetszám van, aminek 3-mal való osztási maradéka nem lehet 2.
Következik, hogy az egyenletnek nincs egész megoldása.

2. Adott a valós függvényeknek egy sorozata a következő módon:

$$f_1(x)=\frac{x}{x-1},\ f_2(x)=\frac{1}{1-x},\ f_{n+2}(x)=f_{n+1}(f_n(x)),$$

ahol az n természetes szám. Mennyi az $f_{2018}(2019)$ értéke?

Megoldás. Alkalmazva a rekurzív képletet adódik, hogy

$$f_1(x)=\frac{x}{x-1},\ f_2(x)=\frac{1}{1-x},\ f_3(x)=f_2(f_1(x))=1-x,$$

$$f_4(x)=f_3(f_2(x))=\frac{x}{x-1},\ f_5(x)=f_4(f_3(x))=\frac{x-1}{x},$$

$$f_6(x)=f_5(f_4(x))=\frac{1}{x},\ f_7(x)=f_1(x) \text{ és } f_8(x)=f_2(x),$$

tehát a függvénysorozat hatos periódussal ismétlődik, azaz

$$f_{6k+m}(x)=f_m(x).$$

Ennek alapján $f_{2018}(x)=f_2(x)$, amelyből az következik, hogy

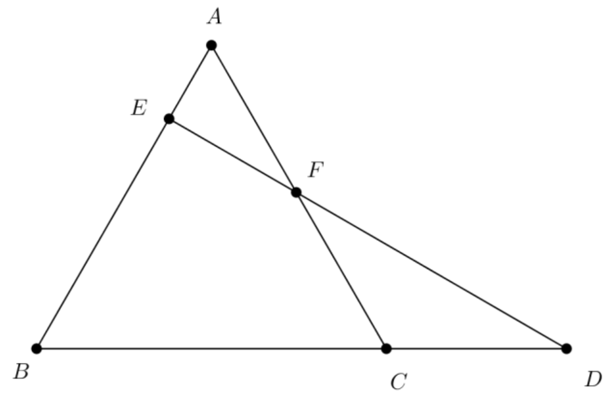
$$f_{2018}(2019)=-\frac{1}{2018}.$$

3. Az ABC szabályos háromszög BC oldalát a C-n túl meghosszabbítottuk a BC oldal felével, és így a D ponthoz jutottunk. A D-ből kiinduló félegyenes az AC oldalt annak felezőpontjában, F-ben metszi, az AB oldalnak pedig E-vel jelölt pontján halad át. Hányad része az AE szakasz hossza az ABC háromszög kerületének?

Megoldás. Legyen $AB=BC=CA=a$ és $CD=CF=FA=\frac{a}{2}$. Mivel az ABC háromszög szabályos, ezért belső szögei $60°$-osak. $CD=CF$, ezért a CDF háromszög egyenlő szárú, és mivel a C-nél lévő külső szöge $120°$-os, ezért $DFC\angle=CDF\angle=30°$. Az $EFA\angle=DFC\angle=30°$ teljesül, mert csúcsszögek és $FAE\angle=60°$, így

$$AEF\angle=180°-EFA\angle-FAE\angle=180°-30°-60°=90°.$$

Tehát az EFA háromszög szögei $30°$, $60°$ és $90°$, azaz az EFA háromszög egy „félszabályos háromszög". A rövidebbik befogójának hossza fele az átfogója hosszánál, azaz $AE = \frac{FA}{2} = \frac{a}{4}$. Az ABC háromszög kerülete $3a$, így AE hossza a kerület $\frac{a}{4} : 3a = \frac{1}{12}$-ed része.



4. A táblára felírunk 2017 **nullát,** 2018 **egyest és** 2019 **kettes számjegyet. Minden alkalommal két különböző számjegyet törlünk és helyettük a** 0**,** 1**,** 2 **számjegy közül azt az egy számjegyet írjuk, amely abban a lépésben nem került letörlésre.**
a) Bizonyos lépés után maradhat-e csupa nulla sorozat?
b) Amikor a táblán csak egy számjegy maradt, akkor mely számjegyek lehetnek azok?

Megoldás. a) Legyen $a_0 = 2017$, $b_0 = 2018$, $c_0 = 2019$. Az a_n, b_n, c_n jelölik rendre az n-edik lépés utáni a 0-ás, az 1-es, illetve a 2-es számjegyek számát és ezek minden lépésben változnak. A kezdő adatok alapján a 0-ák és a 2-esek száma azonos paritásúak és az egyesek számának paritása pedig nem egyezik meg ezzel.
Feltételezzük, hogy n lépés után csak nullák maradtak a táblán, azaz $b_n = 0 = c_n$, de ez az előbbi paritási vizsgálattal ellentmondó.
b) Ha az n lépés után egy számjegy maradt a táblán, akkor az a_n, b_n, c_n közül kettő nulla, ezek tehát azonos paritásúak, így a $b_n = 1$, tehát az 1 számjegy maradt a táblán**.**

11. évfolyam

1. Határozd meg a következő egyenletrendszer minden valós megoldását:

$$x_1 + x_2 + ... + x_{2018} = 2018,$$
$$x_1^4 + x_2^4 + ... + x_{2018}^4 = x_1^3 + x_2^3 + ... + x_{2018}^3.$$

Megoldás. Kezdőhelyzetben az egyenletrendszer ekvivalens a következő egyenletrendszerrel:

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + ... + (x_{2018} - 1) = 0$$
$$x_1^3 \cdot (x_1 - 1) + x_2^3 \cdot (x_2 - 1) + ... + x_{2018}^3 \cdot (x_{2018} - 1) = 0$$

A második egyenletből kivonva az első egyenletet kapjuk a következőt:

$$(x_1^3 - 1) \cdot (x_1 - 1) + (x_2^3 - 1) \cdot (x_2 - 1) + ... + (x_{2018}^3 - 1) \cdot (x_{2018} - 1) = 0.$$

Felbontva a köbök különbségét és rendezve kapjuk a következőt:

$$(x_1 - 1)^2 \cdot (x_1^2 + x_1 + 1) + (x_2 - 1)^2 \cdot (x_2^2 + x_2 + 1) + ... + (x_{2018} - 1)^2 \cdot (x_{2018}^2 + x_{2018} + 1) = 0 \ .$$

Mivel minden x_k valós számra $x_k^2 + x_k + 1 > 0$, $k = 1, 2, ..., 2018$, ezért $x_k = 1, \quad k = 1, 2, ..., 2018$.

2. Egy derékszögű háromszög α és β hegyesszögeire érvényes, hogy

$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta + \mathrm{tg}^3\alpha + \mathrm{tg}^3\beta = 70.$$

Számítsd ki az adott derékszögű háromszög hegyesszögeit!

Megoldás. Váltsunk komplemens szögekre, azaz írjunk fel mindent α segítségével:

$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha + \mathrm{tg}^3\alpha + \mathrm{ctg}^3\alpha = 70.$$

Ha a $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha$ kifejezést négyzetre és köbre emeljük, akkor:

$$(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha)^2 = \mathrm{tg}^2\alpha + 2\mathrm{tg}\alpha\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha = \mathrm{tg}^2\alpha + 2 + \mathrm{ctg}^2\alpha$$

$$(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha)^3 = \mathrm{tg}^3\alpha + 3\mathrm{tg}^2\alpha\mathrm{ctg}\alpha + 3\mathrm{tg}\alpha\mathrm{ctg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^3\alpha = \mathrm{tg}^3\alpha + 3(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha) + \mathrm{ctg}^3\alpha,$$

tehát

$$\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha = (\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha)^2 - 2 \text{ és}$$

$$\mathrm{tg}^3\alpha + \mathrm{ctg}^3\alpha = (\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha)^3 - 3(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha).$$

Az $x = \mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha$ helyettesítéssel következik, hogy

$$x + (x^2 - 2) + (x^3 - 3x) = 70, \text{ vagyis } x^3 + x^2 - 2x - 72 = 0,$$

amelynek egyik megoldása

$$x = 4, \text{ tehát } (x - 4) \cdot (x^2 + 5x + 18) = 0.$$

Mivel az $x^2 + 5x + 18$ trinom minden valós x-re pozitív, ezért az egyetlen megoldás $x = 4$, azaz $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha = 4$, ez utóbbi megoldásai pedig $\mathrm{tg}\alpha = 2 \pm \sqrt{3}$.
A keresett hegyesszögek tehát $15°$ és $75°$.

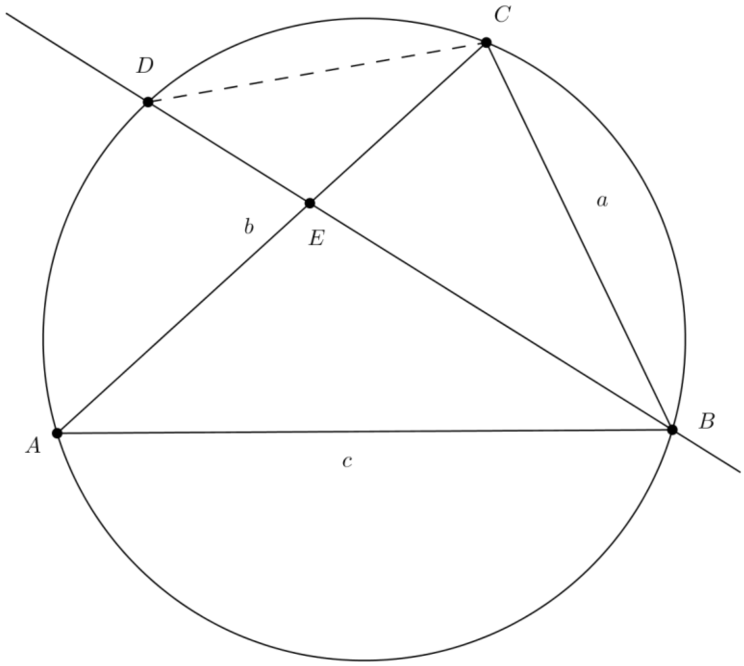
3. Az ABC háromszögben az $ABC\angle$ szögfelezője metszi a háromszög körülírt körét D pontban. Bizonyítsd be, hogy teljesül a $BD^2 > BA \cdot BC$ egyenlőtlenség!

Megoldás. Legyen az E pont az $ABC\angle$ szögfelezője és a szemköztes oldal metszéspontja. Mivel $ABD\angle \cong DBC\angle$ és $BAC\angle \cong BDC\angle$, ezért a BAE és BDC háromszögek hasonlóak, vagyis megfelelő oldalaik arányosak:

$$BA : BE = BD : BC \text{, azaz } BD \cdot BE = BA \cdot BC .$$

Tudjuk, hogy $BD > BE$, mert a pontok sorrendje $(B - E - D)$, ezért ezt behelyettesítve adódik, hogy

$$BD^2 > BA \cdot BC .$$



4. A röplabda-bajnokságon összesen tíz csapat versenyzett, minden csapat minden másik csapattal játszott egy mérkőzést. A verseny végén az első csapatnak x_1 győzelme és y_1 veresége volt, második csapatnak x_2 győzelme és y_2 veresége volt, harmadik csapatnak x_3 győzelme és y_3 veresége volt, stb. Igazold, hogy ekkor teljesül az $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_{10}^2$ egyenlőség!

Megoldás. Tegyük fel, hogy a versenyen minden mérkőzésben a győzelem egy pontot jelent, a vereség nulla pontot, akkor minden csapat legfeljebb kilenc pontot érhet el, $y_i = 9 - x_i$, $i = 1, 2, ..., 10$. Az összesen lejátszott mérkőzések száma

$$\frac{10 \cdot 9}{2} = 45 ,$$

tehát az összes pont összege 45, $x_1 + x_2 + ... + x_{10} = 45$. Ekkor:

$$\begin{aligned} y_1^2 + y_2^2 + ... + y_{10}^2 &= (9 - x_1)^2 + (9 - x_2)^2 + ... + (9 - x_{10})^2 \\ &= 10 \cdot 81 - 18 \cdot (x_1 + x_2 + ... + x_{10}) + x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{10}^2 = \\ &= 810 - 18 \cdot 45 + x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{10}^2 = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{10}^2 . \end{aligned}$$

12. évfolyam

1. Bizonyítsd be, hogy ha az $f(x)$ olyan egész együtthatós polinom, hogy öt különböző egész helyen 1-et vesz fel értékül, akkor nincs olyan a egész szám, amelyre $f(a)=-1$ lenne!

Megoldás. Legyenek a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 azok a különböző egész számok, amelyekre $f(a_1)=f(a_2)=f(a_3)=f(a_4)=f(a_5)=1$. Tegyük fel, hogy van olyan a egész szám, amelyre $f(a)=-1$. Ismeretes, hogy ha $f(x)$ egész együtthatós polinom, c és d pedig különböző egész számok, akkor $(c-d)\,|\,(f(c)-f(d))$. Ekkor viszont $a_1-a, a_2-a, a_3-a, a_4-a, a_5-a$ különböző egész számok, amelyek a 2 egész szám osztói. Ez ellentmondás, mert a 2-nek csak négy különböző egész osztója van: $1, -1, 2, -2$, tehát a feltételezés nem igaz.

2. Adottak az A, B, C, D nem egy síkban fekvő pontok, amelyekre érvényes, hogy $AB=BC=CD=DA$. Az M, illetve az N pont az AC, illetve a BD szakasz felezőpontja. Igazold, hogy MN az AC és BD szakaszok közös merőlegese!

Megoldás. Mivel az $ABD\Delta$ és $BCD\Delta$ egymással egybevágó, ezért $AN=CN$, hiszen egymással egybevágó, egyenlő szárú háromszögek súlyvonalairól van szó. Így viszont az $ACN\Delta$ is egyenlő szárú és MN az alaphoz (AC-hez) tartozó súlyvonal, amiből következik, hogy $MN \perp AC$. A másik merőlegesség hasonló módon igazolható.

3. Oldd meg a következő egyenletet a természetes számok halmazában:

$$x!+123=y^5.$$

Megoldás. Az $x \le 5$ természetes számokra kipróbáljuk, és látjuk, hogy egyedül $x=5$ esetén kapunk teljes ötödik hatványt eredményül: $5!+123=243=3^5$. Tehát egy megoldás biztosan létezik, mégpedig az $(x, y)=(5,3)$. Bebizonyítjuk, hogy több megoldás nem létezik. Legyen $x \ge 6$. Ekkor biztosan teljesül, hogy $9\,|\,x!$, amiből következik, hogy $x!+123 \equiv_9 0+6=6$. Vagyis y^5-nek is a 9-cel való osztási maradéka 6 kell, hogy legyen, vagyis y^5-nek oszthatónak kellene, hogy legyen 3-mal, de 9-cel nem, ami nyilvánvalóan nem lehetséges.

4. Kezdetben egy 3×3-as táblázat minden mezőjén 0 áll, majd egy-egy lépésben a tábla valamely 2×2-es részén a számok mindegyikét 1-gyel növeljük. Megkaphatjuk-e ilyen lépésekkel a következő kitöltést?

4	9	5
10	18	12
6	13	7

Megoldás. Nem. Vegyük észre, hogy ha a megadott szabály szerint módosítjuk a táblázatot, minden lépésben a középső szám értéke egyenlő lesz a négy sarokban levő szám összegével. Ez a megadott táblázatra nem teljesül, tehát a megadott kitöltés nem érhető el.

A XVI. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

5. évfolyam
1. Csiszár Ákos, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **I. díj**
2. Barát Dániel, Kárász Karolina Általános Iskola, Horgos, **I. díj**
3. Csanádi Petra, Jovan Jovanović Zmaj Általános Iskola, Magyarkanizsa, **II. díj**
4. Ristić Anna, József Attila Általános Iskola, Újvidék, **II. díj**
5. Pletikoszity Martin, Testvériség Egység Általános Iskola, Bajsa, **II. díj**
6. Radakov Amina, Kizur István Általános Iskola, Szabadka, **III. díj**
7. Visnyovszki Kinga, Kizur István Általános Iskola, Szabadka, **III. díj**

6. évfolyam
1. Kratok Bence, Csáki Lajos Általános Iskola, Topolya, **I. díj**
2. Kiss Kitti, Hunyadi János Általános Iskola/Cofman Iskola, Csantavér, **II. díj**
3. Dobó Ármin, Jovan Mikić Általános Iskola/Cofman Iskola, Szabadka, **III. díj**
4. Fekecs Csaba, Október 18. Általános Iskola, Zentagunaras, **III. díj**

7. évfolyam
1. Erdélyi Nimród, Petőfi Sándor Általános Iskola, Hajdújárás, **I. díj**
2. Faragó Szabolcs, Kókai Imre Általános Iskola, Temerin, **II. díj**
3. Fajka Zsóka, Csokonai Vitéz Mihály Általános Iskola, Felsőhegy, **II. díj**
4. Szabó Dorina, Arany János Általános Iskola, Tóthfalu, **III. díj**
5. Bácsi Virág, Ady Endre Kísérleti Általános Iskola, Kishegyes, **III. díj**
6. Német Kristóf, Jovan Jovanović Zmaj Általános Iskola, Magyarkanizsa, **III. díj**

8. évfolyam
1. Kőműves Emese, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **I. díj**
2. Árok Anna, Jovan Jovanović Zmaj Általános Iskola, Magyarkanizsa**, I. díj**
3. Somogyi Ákos, Petőfi Sándor Általános Iskola, Hajdújárás, **III. díj**

9. évfolyam
1. Gál József, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Apró Dorottya, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Nagy Daniella, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Bosznai Dávid, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
5. Baranyai Brúnó, Szilády Áron Református Gimnázium, Kiskunhalas, **III. díj**

10. évfolyam
1. Fehér Konrád, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Kopasz Petra, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
3. Fodor Gábor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Csíkos Enikő, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
5. Tóth Tamás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
6. Kosóczki Balázs, Szilády Áron Református Gimnázium, Kiskunhalas, **III. díj**

11. évfolyam
1. Paróczi Orsolya, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Kratok Gyula, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Zabos Péter, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
4. Apró János, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

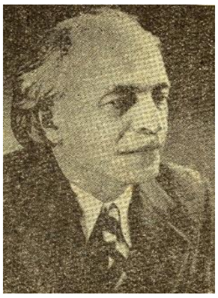
12. évfolyam

1. Szögi Roland, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Nagy Kinga, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
3. Rúzsa Ákos, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Kónya Leon, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
5. Sztarek Norbert, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
6. Brindza Mátyás, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
7. Rudner László, Békéscsabai Andrassy Gyula Gimnázium, Békéscsaba, **III. díj**

A díjazott versenyzők.

A XVII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

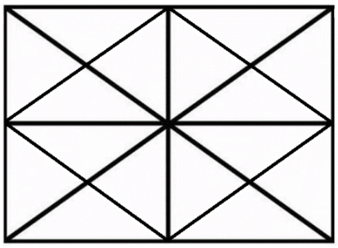
Az iskola tanulói hagyományosan ünnepi műsorral kedveskedtek a díjátadón.



XVII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2019. december 8.

5. évfolyam

1. A Pisti szülinapi buliján megrendezett tombolasorsoláson egy-egy fekete, kék, zöld és piros tollat sorsoltak ki. A tollakat Anna, Panna, Andi és Balázs nyerte meg.
A következőket tudjuk:
Anna tolla nem kék.
Panna tollának színe vagy zöld vagy kék.
Andi tolla se nem piros, se nem zöld.
Balázs egy fekete tollat nyert.
Milyen színű tollat nyert Andi és Panna?



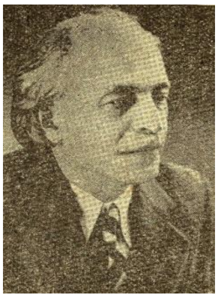
2. Számold meg, hogy hány háromszög található a mellékelt rajzon!

3. Egy természetes számot neve zzünk „érdekesnek”, ha teljesülnek rá a következő feltételek:
- számjegyei különbözők,
- számjegyei balról jobbra olvasva csökkenő sorrendben állnak,
- számjegyei összege osztható 10-zel.
Hány háromjegyű „érdekes” szám van?

4. Kétféle téglalapunk van. Az egyik területe $24\ cm^2$, a másiké pedig $60\ cm^2$. Hányféleképpen lehet ezekből összeilleszteni olyan téglalapot, amelynek területe $84\ cm^2$ lesz? Mekkorák lesznek az összeillesztéssel kapott téglalapok oldalai? (A téglalapok oldalainak mérőszámai természetes számok, a mértékegység pedig cm.)

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



XVII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2019. december 8.

6. évfolyam

1. A $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 3$ **szorzatban** 2019 **darab** 3**-ast szorzunk meg önmagával. Mi az így kapott szorzat utolsó számjegye?**

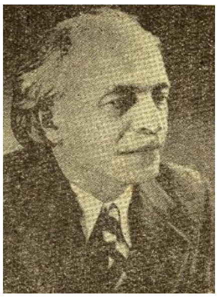
2. Bizonyítsd be, hogy az $(a-b)ab = 2019$ **egyenletnek nincs megoldása az egész számok halmazában.**

3. Kétféle téglalapunk van. Az egyik területe $24\,cm^2$**, a másiké pedig** $60\,cm^2$**. Hányféleképpen lehet ezekből összeilleszteni olyan téglalapot, amelynek területe** $84\,cm^2$ **lesz? Mekkorák lesznek az összeillesztéssel kapott téglalapok oldalai? (A téglalapok oldalainak mérőszámai természetes számok, a mértékegység pedig** cm**.)**

4. Adottak az E**,** F**,** G **és** H **pontok, rendre, az** $ABCD$ **négyzet** AB**,** BC**,** CD **és** DA **oldalain úgy, hogy** $AE = AH = CF = DG$**. Bizonyítsd be, hogy ekkor teljesül az** $EHF\angle = CFG\angle$ **egyenlőség!**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



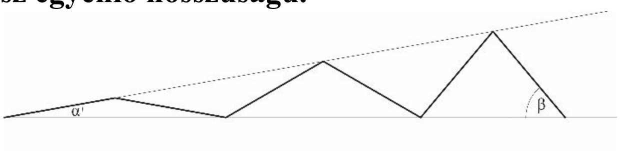
XVII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2019. december 8.

7. évfolyam

1. Négy lány a következőket állítja:
Anna: Bea hazudik.
Bea: Cili hazudik.
Cili: Dóri hazudik.
Dóri: A többiek mindannyian hazudnak.
Ki mond igazat és ki hazudik?

2. Az ábrán vastagon húzott 6 szakasz egyenlő hosszúságú.



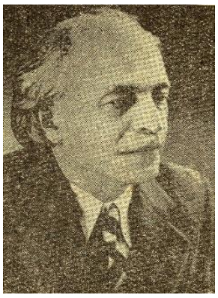
a) hány fokos a β szög, ha $\alpha = 5°$?
b) hány fokos a β szög, ha $\alpha = 20°$?
c) Bizonyára észrevetted, hogy a fenti esetek egyikében a feladat nem megoldható. Szerinted legfeljebb mekkora lehet az α szög, hogy a szerkesztés (vagy számítás) mind a 6 lépése elvégezhető legyen? Válaszodat részletesen indokold meg!

3. Egy négyzet alakú süteményt egymással egybevágó négyzet alakú szeletekre szeltek fel. Kelekótya, a cukrászsegéd belopózott a raktárba, és a szélső szeleteket, valamint az egyik átlón lévő szeleteket is bevonta rózsaszínű cukormázzal. Így összesen 404 sütiszelet lett rózsaszínű. Hány szelet süti van még a tálcán, ami nem rózsaszínű?

4. Peti talált 3 számkártyát. Ezek mindegyike egy-egy számjegyet tartalmazott. Nem volt két egyforma számkártya a három között. Peti kirakta a kártyákból az összes lehetséges háromjegyű számot, és fejben összeadta őket. Az így kapott összeg egy olyan különleges szám, amit meg lehet kapni két szomszédos természetes szám szorzataként is. Milyen számjegyek voltak a kártyákon?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



XVII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2019. december 8.

8. évfolyam

1. **Egy 10×10-es táblázatot a kitöltünk az 1-től 100-ig terjedő természetes számokkal a következő módon: a bal felső sarokból indulva elkezdjük írni a számokat 1-től kezdve, egyesével növelve az értékeket, jobb felé haladva, minden mezőbe egy számot, míg a sor végére nem érünk. Ekkor áttérünk a második sorba, és ott folytatjuk a számok írását az előző sorhoz hasonló módon, és így tovább, míg a táblázat jobb alsó sarkába bekerül a 100-as szám. A kitöltött táblázatból kiválasztunk tízet úgy, hogy minden sorból és minden oszlopból pontosan 1 számot választunk ki. Mi lehet a kiválasztott számok összege?**

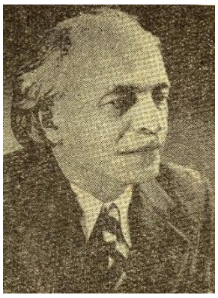
2. **Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó magassága CM. A K pont az AC befogón helyezkedik el, és $KBC\angle = BAC\angle$. A CM és KB szakaszok metszéspontja E. Mutasd meg, hogy ekkor teljesül az $EK = EB$ egyenlőség!**

3. **Létezik-e $\overline{abcabc}$ alakú négyzetszám? Válaszodat indokold!**

4. **Hány olyan pozitív egész szám létezik, amelyet 26-tal, illetve 29-el osztva a hányados megegyezik a maradékkal? Melyek ezek a számok?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



XVII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2019. december 8.

9. évfolyam

1. 2020 **ember áll egy sorban egymás mellett. Mindenki közülük vagy hazug (aki mindig hazudik), vagy lovag (aki mindig igazat mond). Mindegyik ember ezt állította: „A bal oldalamon több hazug van, mint amennyi lovag van a jobb oldalamon." Hány hazug van ebben a sorban?**

2. Melyek azok az n **és** k **pozitív egész számok, amelyekre** $n \cdot k = 10 \cdot |n - k|$ **?**

3. Az $ABCD$ **derékszögű trapézban az** AB **oldal párhuzamos a** DC **-vel,** $\alpha = 90°$**,** $\beta = 60°$**, az** M **pedig a** BC **oldal felezőpontja. Tudjuk, hogy a** DC **oldal hossza egyenlő a** BC **oldal felével.**
a) Hány fokos szöget zár be az AC **és a** DM **szakasz?**
b) Számítsd ki a DMC **háromszög és az** $ABCD$ **trapéz területeinek arányát!**

4. A 2019 **szám olyan, hogy ha számjegyeit megkettőzve írjuk le, akkor a kapott** 22001199 **számban bármely szomszédos három számjegyet is olvassuk egybe, nem kapunk** 3**-mal osztható számot. Hány ilyen tulajdonságú négyjegyű szám létezik?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XVII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2019. december 8.

10. évfolyam

1. Oldd meg a $2x^2y^2+y^2=6x^2+12$ **egyenletet az egész számok halmazán!**

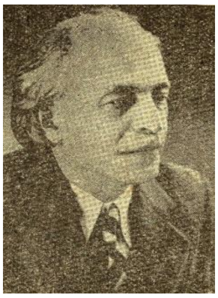
2. Melyik az a négyjegyű szám, amely eleget tesz az alábbi feltételeknek:
I) Ha az első két számjegyét elhagyjuk, az eredeti szám négyzetgyökét kapjuk.
II) Ha az első két számjegyét átírjuk az utolsó kettő mögé, olyan számot kapunk, amely 1881**-gyel nagyobb az eredeti számnál.**

3. Egy egyenlőszárű háromszög köré írt kör középpontjának az alaptól mért távolsága úgy aránylik a szártól mért távolsághoz, mint $1:\sqrt{10}$ **.**
Határozd meg az alap és a szár arányát!

4. Adott 5 **telefonközpont. Most a kiinduláskor minden központ mindegyikkel össze van kötve és egy lépésben egy-egy kábelt el lehet venni. Az nyer, aki megszünteti a teljes kapcsolatot (ami nem csak akkor lehet, ha minden élet elvesznek). Ki fog nyerni, a *Kezdő* vagy *Második*?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



XVII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2019. december 8.

11. évfolyam

1. Igazold, hogy az egyenlő oldalú háromszögben egy tetszőleges belső pont távolságainak összege az oldalaktól állandó! Ha a háromszög oldala a**, akkor fejezd ki ezt az összeget** a **függvényében!**

2. Az ABC **háromszög** A **csúcsából induló szögfelezője a háromszög köré írható körét** E **pontban metszi. A kör** E **pontbeli érintője az** AC **egyenest** D **pontban metszi, az** AB **egyenest pedig** F **pontban. Bizonyítsd be, hogy ekkor teljesül a** $BE \cdot (AD + AF) = AE \cdot FD$ **egyenlőség!**

3. Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán:

$$2^{1+2\cos 6x} + 16^{\sin^2 3x} = 9.$$

4. A 2019 **szám olyan, hogy ha számjegyeit megkettőzve írjuk le, akkor a kapott** 22001199 **számban bármely szomszédos három számjegyet is olvassuk egybe, nem kapunk** 3**-mal osztható számot. Hány ilyen tulajdonságú négyjegyű szám létezik?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XVII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2019. december 8.

12. évfolyam

1. Hányféleképpen állíthatjuk elő a 10-es számot az 1, 2, 3 és 4 számok összegeként, ha számít az összeadandók sorrendje? (Például a 3-as számot négyféleképp állíthatjuk elő: $3=1+1+1=1+2=2+1=3$.)

2. Határozd meg az összes olyan $f:R\to R$ függvényt, amely kielégíti a következő függvényegyenletet:

$$f(x+2y)-f(x-y)=3y(2x+y).$$

3. A konvex $ABCD$ négyszög átlói a P pontban metszik egymást és négy háromszögre bontják a négyszöget. Bizonyítsd be, hogy ezen háromszögeknek a súlypontjai egy paralelogrammát határoznak meg!

4. Oldd meg a $2\cdot 3^x=5^y+1$ egyenletet a természetes számok halmazában!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

A XVII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

5. évfolyam

1. A Pisti szülinapi buliján megrendezett tombolasorsoláson egy-egy fekete, kék, zöld és piros tollat sorsoltak ki. A tollakat Anna, Panna, Andi és Balázs nyerte meg.
A következőket tudjuk:
Anna tolla nem kék.
Panna tollának színe vagy zöld vagy kék.
Andi tolla se nem piros, se nem zöld.
Balázs egy fekete tollat nyert.
Milyen színű tollat nyert Andi és Panna?

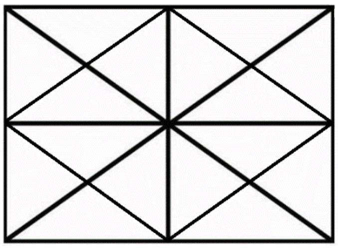
Megoldás. A táblázatba $-$ jeleket írunk oda, ahol tudjuk, hogy annak a gyereknek nem olyan színű toll jutott, ill. ahol igen a válasz oda $+$ jel kerül.
(1) Anna tolla nem kék.
(2) Panna tollának színe vagy zöld vagy kék.
(3) Andi tolla se nem piros, se nem zöld.
(4) Balázs egy fekete tollat nyert.

	fekete	kék	zöld	piros
Anna		− (1)		
Panna	− (2)			− (2)
Andi			− (3)	− (3)
Balázs	+ (4)			

Ha ezután folytatjuk a kitöltést és figyelünk arra, hogy egy-egy sorban, egy-egy oszlopban pontosan egy $+$ jel kerüljön, a többi pedig $-$ legyen, akkor hamarosan kijön, hogy Andi tolla kék színű, Pannáé pedig zöld.

	fekete	kék	zöld	piros
Anna	−	−	−	+
Panna	−	−	+	−
Andi	−	+	−	−
Balázs	+	−	−	−

2. Számold meg, hogy hány háromszög található a mellékelt rajzon!



Megoldás. A téglalapot a szimmetriatengelyek 4 részre osztják, mindegyikben 8 háromszög van. Az átlók a téglalapot 4 derékszögű háromszögre bontják. Ezenkívül 8 egyenlőszárú háromszög található, amelyek alapja párhuzamos a nagy téglalap valamelyik oldalával. Így 44 háromszög található a rajzon.

3. Egy természetes számot nevezzünk „érdekesnek”, ha teljesülnek rá a következő feltételek:
- számjegyei különbözők,
- számjegyei balról jobbra olvasva csökkenő sorrendben állnak,
- számjegyei összege osztható 10-zel.
Hány háromjegyű „érdekes” szám van?

Megoldás. Ezen érdekes számok számjegyeinek összege tehát lehet 10 vagy 20.
Ha a számjegyek összege 10 az „érdekes” számok 0-ra, 1-re és 2-re végződhetnek. 3-ra már nem, mert akkor a tízesek helyén legalább 4, a százasok helyén legalább 5 van és ez már több 10-nél.
Ha 0-ra végződik, akkor a következő számok lesznek jók: 910, 820, 730, 640.
Ha 1-re végződik, akkor 721, 631, 541 lesznek jók.
Ha 2-re végződik, akkor csak az 532 felel meg.
Ha a számjegyek összege 20 az „érdekes” számok csak 8-cal és 9-cel kezdődhetnek: 875, 983, 974 és 965.
Tehát 12 ilyen szám van.

4. Kétféle téglalapunk van. Az egyik területe $24\,cm^2$, a másiké pedig $60\,cm^2$. Hányféleképpen lehet ezekből összeilleszteni olyan téglalapot, amelynek területe $84\,cm^2$ lesz? Mekkorák lesznek az összeillesztéssel kapott téglalapok oldalai? (A téglalapok oldalainak mérőszámai természetes számok, a mértékegység pedig cm.)

Megoldás. A $24\,cm^2$ területű téglalap területét jelölje T_1, míg a $60\,cm^2$ területű téglalap területét T_2.

$$T_1 = 24\left(cm^2\right) = 1\cdot 24 = 2\cdot 12 = 3\cdot 8 = 4\cdot 6$$

$$T_2 = 60\left(cm^2\right) = 1\cdot 60 = 2\cdot 30 = 3\cdot 20 = 4\cdot 15 = 5\cdot 12 = 6\cdot 10$$

$$T_1 + T_2 = 84\left(cm^2\right)$$

$$84 = 1\cdot 24 + 1\cdot 60 = 1\cdot\left(24+60\right) = 1\cdot 84$$

$$84 = 2\cdot 12 + 2\cdot 30 = 2\cdot\left(12+30\right) = 2\cdot 42$$

$$84 = 3\cdot 8 + 3\cdot 20 = 3\cdot\left(8+20\right) = 3\cdot 28$$

$$84 = 4\cdot 6 + 4\cdot 15 = 4\cdot\left(6+15\right) = 4\cdot 21$$

$$84 = 6\cdot 4 + 6\cdot 10 = 6\cdot\left(4+10\right) = 6\cdot 14$$

$$84 = 12\cdot 2 + 12\cdot 5 = 12\cdot\left(2+5\right) = 12\cdot 7$$

Tehát hatféleképpen lehet összeillesztéssel előállítani a $84\,cm^2$ területű téglalapot. Az így előállított téglalapok oldalainak hosszúságai:

a (cm)	1	2	3	4	6	12
b (cm)	84	42	28	21	14	7

<u>**6. évfolyam**</u>

1. A $3\cdot3\cdot3\cdot\ldots\cdot3\cdot3$ szorzatban 2019 darab 3-ast szorzunk meg önmagával. Mi az így kapott szorzat utolsó számjegye?

Megoldás. A 3 hatványai: 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, és így tovább. Az utolsó számjegyek négyes ciklusban ismétlődnek. A 2019 néggyel való osztásakor a maradék három, tehát a keresett szorzat és a ciklus harmadik tagjának utolsó számjegyei megegyeznek, azaz a szorzat utolsó számjegye a 7.

2. Bizonyítsd be, hogy az $(a-b)ab=2019$ egyenletnek nincs megoldása az egész számok halmazában.

Megoldás. Ha a és b is páratlan, akkor különbségük páros, és ekkor az egyenlet bal oldalán levő szorzat páros. Ha a és b is páros, akkor különbségük páros, és ekkor az egyenlet bal oldalán levő szorzat páros. Ha a és b közül az egyik páros, a másik páratlan, akkor különbségük páratlan, és ekkor az egyenlet bal oldalán levő szorzat páros. Tehát az egyenlet bal oldala minden esetben páros, ezért nem lehet egyenlő 2019-cel.

3. Kétféle téglalapunk van. Az egyik területe $24\,cm^2$, a másiké pedig $60\,cm^2$. Hányféleképpen lehet ezekből összeilleszteni olyan téglalapot, amelynek területe $84\,cm^2$ lesz? Mekkorák lesznek az összeillesztéssel kapott téglalapok oldalai? (A téglalapok oldalainak mérőszámai természetes számok, a mértékegység pedig cm.)

Megoldás. A $24\,cm^2$ területű téglalap területét jelölje T_1, míg a $60\,cm^2$ területű téglalap területét T_2.

$T_1=24\left(cm^2\right)=1\cdot24=2\cdot12=3\cdot8=4\cdot6$

$T_2=60\left(cm^2\right)=1\cdot60=2\cdot30=3\cdot20=4\cdot15=5\cdot12=6\cdot10$

$T_1+T_2=84\left(cm^2\right)$

$84=1\cdot24+1\cdot60=1\cdot(24+60)=1\cdot84$

$84=2\cdot12+2\cdot30=2\cdot(12+30)=2\cdot42$

$84=3\cdot8+3\cdot20=3\cdot(8+20)=3\cdot28$

$84=4\cdot6+4\cdot15=4\cdot(6+15)=4\cdot21$

$84=6\cdot4+6\cdot10=6\cdot(4+10)=6\cdot14$

$84=12\cdot2+12\cdot5=12\cdot(2+5)=12\cdot7$

Tehát hat féleképpen lehet összeillesztéssel előállítani a $84\,cm^2$ területű téglalapot. Az így előállított téglalapok oldalainak hosszúságai:

a (cm)	1	2	3	4	6	12
b (cm)	84	42	28	21	14	7

4. Adottak az E, F, G és H pontok, rendre, az $ABCD$ négyzet AB, BC, CD és DA oldalain úgy, hogy $AE = AH = CF = DG$. Bizonyítsd be, hogy ekkor teljesül az $EHF\angle = CFG\angle$ egyenlőség!

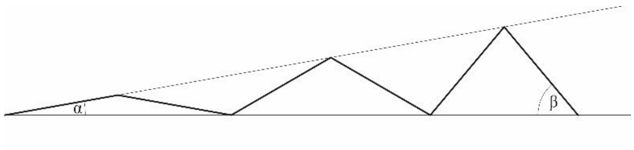
Megoldás. Mivel az AEH háromszög derékszögű és egyenlő szárú, ezért $AHE\angle = 45°$. Jelöljük a $CFG\angle$-et α-val. CFG háromszög és GDH háromszög egybevágó az $OSZO$ tétel alapján, mivel $CF = DG$, $CG = DH$ és derékszögűek. Ez alapján $CGF\angle = 90° - \alpha$ és $GF = GH$. A $HGF\angle$ kifejezhető, mint $180° - (\alpha + 90° - \alpha)$, tehát derékszög. Az FGH háromszög derékszögű és egyenlő szárú, ezért $GHF\angle = 45°$. Az $FHE\angle$ kifejezhető, mint $180° - (90° - \alpha + 45° + 45°)$, tehát $EHF\angle = \alpha$, azaz $EHF\angle = CFG\angle$.

7. évfolyam

1. Négy lány a következőket állítja:
Anna: Bea hazudik.
Bea: Cili hazudik.
Cili: Dóri hazudik.
Dóri: A többiek mindannyian hazudnak.
Ki mond igazat és ki hazudik?

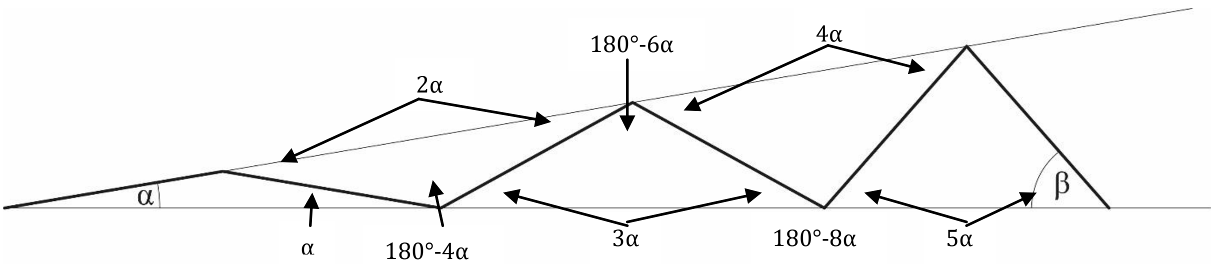
Megoldás. Ha Anna hazudik, akkor Bea igazat mond, azaz Cili hazudik, ezért Dóri igazat mond. Ez ellentmondás, ezért Anna nem hazudhat.
Mivel Anna igazat mond, Bea hazudik, azaz Cili igazat mond, Dóri pedig hazudik. Ha Dóri hazudik, akkor van olyan lány aki igazat mond. Ebben az esetben Anna és Cili mond igazat.

2. Az ábrán vastagon húzott 6 **szakasz egyenlő hosszúságú.**
a) Hány fokos a β **szög, ha** $\alpha = 5°$**?**
b) Hány fokos a β **szög, ha** $\alpha = 20°$**?**



c) Bizonyára észrevetted, hogy a fenti esetek egyikében a feladat nem megoldható. Szerinted legfeljebb mekkora lehet az α **szög, hogy a szerkesztés (vagy számítás) mind a** 6 **lépése elvégezhető legyen? Válaszodat részletesen indokold meg!**

Megoldás.
a) Az ábrán valójában 3 db „alapján fekvő” és 2 db „fejtetőn álló” egyenlőszárú háromszöget látunk. Az alapján fekvő háromszögek alapon fekvő szögei rendre: $5°$, $15°$, $25°$. Tehát a keresett szög $25°$ méretű.
b) Az első két alapjukon fekvő háromszög alapon fekvő szögei: $20°$ és $60°$. A harmadik háromszög alapon fekvő szöge már $100°$ kellene hogy legyen, ami lehetetlen.
c) Általános esetben a szögek méretét az ábrán ábrázoltuk:



Az ábra alapján látható, hogy $\beta = 5\alpha$. Mivel β egy egyenlőszárú háromszög alapon fekvő szöge, nem lehet sem tompaszög, sem derékszög, tehát $\beta < 90°$. Ezért $5\alpha < 90°$, ami azt jelenti, hogy $\alpha < 18°$.

3. Egy négyzet alakú süteményt egymással egybevágó négyzet alakú szeletekre szeltek fel. Kelekótya, a cukrászsegéd belopózott a raktárba, és a szélső szeleteket, valamint az egyik átlón lévő szeleteket is bevonta rózsaszínű cukormázzal. Így összesen 404 **sütiszelet lett rózsaszínű. Hány szelet süti van még a tálcán, ami nem rózsaszínű?**

Megoldás. Tegyük fel, hogy a táblát n sorra és n oszlopra osztották fel. A tábla szélein lévő rózsaszínű sütik száma $4n$ lenne, de így a sarkokon lévő sütiket duplán számítottuk, ezért a szegélyen $4n-4$ rózsaszínű süti található. Az átlón $n-2$ süti helyezkedik el (mivel a szegélyt alkotó sütiket már nem számítjuk).
Így a rózsaszínű sütik száma $(4n-4)+(n-2)$, azaz $5n-6$.

Mivel tudjuk, hogy 404 rózsaszínű süti van, meg kell oldanunk az $5n-6=404$ egyenletet. Az eredmény $n=82$. Az egész tálca sütemény $82^2=6724$ sütiből áll, ebből 6320 nem rózsaszínű.

4. Peti talált 3 **számkártyát. Ezek mindegyike egy-egy számjegyet tartalmazott. Nem volt két egyforma számkártya a három között. Peti kirakta a kártyákból az összes lehetséges háromjegyű számot, és fejben összeadta őket. Az így kapott összeg egy olyan különleges szám, amit meg lehet kapni két szomszédos természetes szám szorzataként is. Milyen számjegyek voltak a kártyákon?**

Megoldás. Jelölje a három számjegyet a, b és c. Ezekből összesen 6 különböző háromjegyű számot lehet alkotni: $100a+10b+c$, $100a+10c+b$, $100b+10a+c$, $100b+10c+a$, $100c+10b+a$ és $100c+10a+b$. Ha összeadjuk a hat számot, az eredmény $222a+222b+222c=222(a+b+c)$. Mivel $222=2\cdot3\cdot37$, ez az összeg $2\cdot3\cdot37\cdot(a+b+c)$ formában is felírható. Mivel a 37 szomszédai közül csak a 36 osztható 2-vel és 3-mal is, arra törekszünk, hogy $2\cdot3\cdot(a+b+c)=36$ legyen. Tehát $a+b+c=6$. Mivel a, b és c egymástól különböző számok, így csak az 1, 2 és 3 számjegyek felelnek meg ennek a feltételnek.

8. évfolyam

1. Egy 10×10-es táblázatot a kitöltünk az 1-től 100-ig terjedő természetes számokkal a következő módon: a bal felső sarokból indulva elkezdjük írni a számokat 1-től kezdve, egyesével növelve az értékeket, jobb felé haladva, minden mezőbe egy számot, míg a sor végére nem érünk. Ekkor áttérünk a második sorba, és ott folytatjuk a számok írását az előző sorhoz hasonló módon, és így tovább, míg a táblázat jobb alsó sarkába bekerül a 100-as szám. A kitöltött táblázatból kiválasztunk tízet úgy, hogy minden sorból és minden oszlopból pontosan 1 számot választunk ki. Mi lehet a kiválasztott számok összege?

Megoldás. A táblázat helyesen kitöltve a szöveg alapján:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

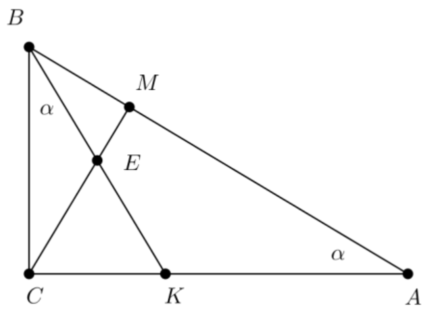
Így is megmutathatjuk:

0+1	0+2	0+3	0+4	0+5	0+6	0+7	0+8	0+9	0+10
10+1	10+2	10+3	10+4	10+5	10+6	10+7	10+8	10+9	10+10
20+1	20+2	20+3	20+4	20+5	20+6	20+7	20+8	20+9	20+10
30+1	30+2	30+3	30+4	30+5	30+6	30+7	30+8	30+9	30+10
40+1	40+2	40+3	40+4	40+5	40+6	40+7	40+8	40+9	40+10
50+1	50+2	50+3	50+4	50+5	50+6	50+7	50+8	50+9	50+10
60+1	60+2	60+3	60+4	60+5	60+6	60+7	60+8	60+9	60+10
70+1	70+2	70+3	70+4	70+5	70+6	70+7	70+8	70+9	70+10
80+1	80+2	80+3	80+4	80+5	80+6	80+7	80+8	80+9	80+10
90+1	90+2	90+3	90+4	90+5	90+6	90+7	90+8	90+9	90+10

Könnyen belátható, hogy ha minden sorból választunk pontosan egy elemet, akkor biztosan lesz az összeadandók között $0+,\ 10+,\ 20+,\ ...\ \textit{és}\ 90+$ kezdetű is. Mivel minden oszlopból is választunk pontosan 1 elemet, biztosan lesz pontosan egy $+1,\ +2,\ +3,\ ...\ ,+9$ és $+10$ befejeződésű az összeadandók között. Tehát csak ki kell számolnunk a következő összeget:
$(0+10+20+....+90)+(1+2+3+\ ...\ +9+10)=505$.
Bárhogyan válogatunk is a táblázat elemei között, az összeg mindig 505 lesz.

2. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó magassága CM. A K pont az AC befogón helyezkedik el, és $KBC\angle = BAC\angle$. A CM és KB szakaszok metszéspontja E. Mutasd meg, hogy ekkor teljesül az $EK = EB$ egyenlőség!

Megoldás. $MCB\angle = BAC\angle$, mivel mindkettő $ABC\angle$ pótszöge, ezért a CEB háromszög egyenlő szárú. $MCK\angle$ pótszöge a $BAC\angle$-nek, valamint $CKB\angle$ pótszöge a $BAC\angle$ szöggel egyenlő, ezért $KCE\angle = CKE\angle$, azaz CKE háromszög is egyenlő szárú. Ebből következik, hogy $CE = EK$ és $KE = EB$.



3. Létezik-e $\overline{abcabc}$ alakú négyzetszám? Válaszodat indokold!

Megoldás. Végezzük el a következő átalakítást:

$$\overline{abcabc} = 1001(100a + 10b + c) = 7 \cdot 11 \cdot 13(100a + 10b + c).$$

Mivel 7, 11 és 13 prímszámok, ezért a $100a + 10b + c$ kifejezés osztható kell, hogy legyen 1001-el, ami lehetetlen, hiszen lehető legnagyobb értéke 999. Nem létezik $\overline{abcabc}$ alakú négyzetszám.

4. Hány olyan pozitív egész szám létezik, amelyet 26-tal, illetve 29-cel osztva a hányados megegyezik a maradékkal? Melyek ezek a számok?

Megoldás. Jelölje x a keresett számot. Ekkor a következő összefüggések írhatók fel:

$$x = 26a + a, \ \ a \le 25 \qquad \text{és} \qquad x = 29b + b, \ \ b \le 28,$$

ahol a és b természetes szám.

Ebből a két egyenletből következik, hogy $27a = 30b$, azaz $9a = 10b$, amely egyenletnek a következő számpárok lehetnek megoldásai: $a = 10$ és $b = 9$, és $a = 20$ és $b = 18$. A keresett számok tehát a 270 és az 540.

9. évfolyam

1. 2020 **ember áll egy sorban egymás mellett. Mindenki közülük vagy hazug (aki mindig hazudik), vagy lovag, (aki mindig igazat mond). Mindegyik ember ezt állította: „A bal oldalamon több hazug van, mint amennyi lovag van a jobb oldalamon.” Hány hazug van ebben a sorban?**

Megoldás. Nem lehet mindenki hazug, mert akkor a jobb szélső ember balján 2019 hazug lenne, jobbján pedig 0 lovag, és így igazat mondana, miközben ő hazug. Nem lehet mindenki lovag sem, mert akkor mindegyik hazudna. Beláthatjuk azt is, hogy egy lovag jobbján nem állhat hazug. Ugyanis mindkettejük balján ugyanannyi hazug áll, és jobbjukon pedig ugyanannyi lovag, így ha ugyanazt a kijelentést teszik, ugyanaz kellene hogy legyen a logikai értéke is, ami lehetetlen, mert ők különböző „kasztba” tartoznak. Ezek alapján egy lovag jobbján csak lovagok lehetnek, egy hazug balján pedig csak hazugok, így a két társaság teljesen elkülönül egymástól.
Számozzuk meg a helyeket balról. A hazugok legfeljebb az 1010. helyen állhatnak, mert ekkor minden hazugnak legfeljebb 1009 hazug lesz balra és legalább 1010 lovag jobbra, vagyis hazudni fog. Ha az 1011. helyen állna egy hazug, már igazat mondana. Hasonlóan a lovagok legalább az 1011. helyen kell, hogy álljanak ahhoz, hogy igaz legyen a kijelentésük. Vagyis fele-fele arányban vannak lovagok és hazugok, azaz 1010 hazug van a sorban.

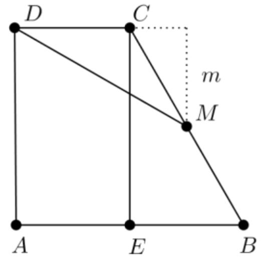
2. Melyek azok az n és k pozitív egész számok, amelyekre $n \cdot k = 10 \cdot |n-k|$?

Megoldás. Az egyenlet szimmetriája miatt ha (n,k) megoldása az egyenletnek, akkor (k,n) is. Így feltehetjük, hogy $n \geq k$. Ekkor az egyenlet $n \cdot k = 10 \cdot (n-k)$ alakban írható, ahonnan $n = \dfrac{10k}{10-k}$ adódik. Mivel n és k pozitív egész, ezért a nevező is pozitív, azaz $k > 0$ és $k < 10$. A lehetséges értékeket végigpróbálgatva azt kapjuk, hogy n a $k \in \{5,6,8,9\}$ számokra ad egészet, mégpedig rendre $n = 10$, $n = 15$, $n = 40$ és $n = 90$ számokat kapjuk. A szimmetria figyelembe vételével összesen 8 megoldás van, ezek pedig: $(5,10)$, $(6,15)$, $(8,40)$, $(9,90)$, $(90,9)$, $(40,8)$, $(15,6)$, $(10,5)$.

3. Az $ABCD$ derékszögű trapézban az AB oldal párhuzamos a DC -vel, $\alpha = 90°$, $\beta = 60°$, az M pedig a BC oldal felezőpontja. Tudjuk, hogy a DC oldal hossza egyenlő a BC oldal felével.
a) Hány fokos szöget zár be az AC és a DM szakasz?
b) Számítsd ki a DMC háromszög és az $ABCD$ trapéz területeinek arányát!

Megoldás. a) Az ABC és a BCD szögek kiegészítő szögek, így a DCM szög $120°$-os. A feltételek szerint a DCM háromszög egyenlőszárú, ezért alapon fekvő szögei, az MDC szög és a CMD szög egyformán $30°$-osak. Bocsássunk merőlegest a C csúcsból az AB oldalra, és a keletkező metszéspontot az AB oldalon nevezzük E pontnak. Az EBC háromszög derékszögű és az EBC szög $60°$-os, így a másik hegyesszöge, az ECB szög $30°$-os. Ezen háromszögeknek ismert az a tulajdonsága, hogy $BC = 2EB$. Továbbá, az AB és a CD a feltételek szerint párhuzamosak, az AD és EC ugyanarra az AB oldalra merőlegesek, azaz egymással párhuzamosak, így az $AECD$ négyszög téglalap, szemközti oldalai ezért egyenlők. Így

$EB = BC:2 = CM = CD = AE$. Ebből következik, hogy $AB = BC$, és mivel a két oldal $60°$-os szöget zár be, így ABC háromszög szabályos, tehát a BCA szöge $60°$-os. Az AC felezi az MCD $120°$-os szöget, így merőleges az MCD egyenlő szárú háromszög alapjára, tehát MD és AC $90°$-os szöget zárnak be egymással.



b) Az ábra alapján:

$$\frac{T_{DMC}}{T_{ABCD}} = \frac{\frac{DC \cdot m}{2}}{\frac{AB+CD}{2} \cdot CE} = \frac{\frac{DC \cdot m}{2}}{\frac{(2AE+AE) \cdot CE}{2}} = \frac{DC \cdot m}{3AE \cdot 2m} = \frac{DC \cdot m}{6DC \cdot m} = \frac{1}{6}.$$

4. A 2019 szám olyan, hogy ha számjegyeit megkettőzve írjuk le, akkor a kapott 22001199 számban bármely szomszédos három számjegyet is olvassuk egybe, nem kapunk 3-mal osztható számot. Hány ilyen tulajdonságú négyjegyű szám létezik?

Megoldás. Elegendő a 3-as szám osztási maradékainak osztályait figyelni, ezeket jelöljük $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$ módon, azaz $\overline{0} = \{0,3,6,9\}$, $\overline{1} = \{1,4,7\}$, $\overline{2} = \{2,5,8\}$. Ha a négyjegyű számban két azonos maradékosztálybeli szám van egymás mellett, azokból a kettőzés után négy azonos számjegy lesz egymás mellett, amelyekből hármat összeolvasva 3-mal osztható számot kapunk. Próbálgatással (például az összes eset kipróbálása után) megállapíthatjuk, hogy ha különböző maradékosztályba eső számokat írunk egymás mellé, akkor az a négyjegyű szám megfelel a feltételeknek. Ezeket kell összeszámolnunk. A következő lehetőségek vannak:

1.) $\overline{0}\ \overline{1}\ \overline{0}\ \overline{1}$;	2.) $\overline{0}\ \overline{1}\ \overline{0}\ \overline{2}$;	3.) $\overline{0}\ \overline{1}\ \overline{2}\ \overline{0}$;	4.) $\overline{0}\ \overline{1}\ \overline{2}\ \overline{1}$;
5.) $\overline{0}\ \overline{2}\ \overline{0}\ \overline{1}$;	6.) $\overline{0}\ \overline{2}\ \overline{0}\ \overline{2}$;	7.) $\overline{0}\ \overline{2}\ \overline{1}\ \overline{0}$;	8.) $\overline{0}\ \overline{2}\ \overline{1}\ \overline{2}$;
9.) $\overline{1}\ \overline{0}\ \overline{1}\ \overline{0}$;	10.) $\overline{1}\ \overline{0}\ \overline{1}\ \overline{2}$;	11.) $\overline{1}\ \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{0}$;	12.) $\overline{1}\ \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{1}$;
13.) $\overline{1}\ \overline{2}\ \overline{0}\ \overline{1}$;	14.) $\overline{1}\ \overline{2}\ \overline{0}\ \overline{2}$;	15.) $\overline{1}\ \overline{2}\ \overline{1}\ \overline{0}$;	16.) $\overline{1}\ \overline{2}\ \overline{1}\ \overline{2}$;
17.) $\overline{2}\ \overline{0}\ \overline{1}\ \overline{0}$;	18.) $\overline{2}\ \overline{0}\ \overline{1}\ \overline{2}$;	19.) $\overline{2}\ \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{0}$;	20.) $\overline{2}\ \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{1}$;
21.) $\overline{2}\ \overline{1}\ \overline{0}\ \overline{1}$;	22.) $\overline{2}\ \overline{1}\ \overline{0}\ \overline{2}$;	23.) $\overline{2}\ \overline{1}\ \overline{2}\ \overline{0}$;	24.) $\overline{2}\ \overline{1}\ \overline{2}\ \overline{1}$.

Az $\overline{1}$ és a $\overline{2}$ maradékosztály háromelemű, így ott hármas szorzóval kell számolni. A $\overline{0}$ maradékosztály az első helyen 3, a többi helyen 4 lehetőséget kínál. Ezek szerint a lehetőségek száma a megszámozott esetekben így alakul:

Amikor a második, harmadik és negyedik helyen nem tartalmaz 0-t:

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ lehetőség a következő esetekben: 4, 8, 16, 24;

Amikor két 0-t tartalmaz, egyiket sem az első helyen:

$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 144$ lehetőség a következő esetekben: 9, 11, 17, 19;

A többi esetben:

$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108$ lehetőség a következő esetekben:

1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 15, 18, 20, 21, 22, 23;

Azaz az összes esetek száma: $4 \cdot 81 + 16 \cdot 108 + 4 \cdot 144 = 2628$.

10. évfolyam

1. Oldd meg a $2x^2y^2+y^2=6x^2+12$ egyenletet az egész számok halmazán!

I. megoldás. Rendezzük a fenti egyenletet oly módon, hogy bal oldalon maradjon az y-os kifejezés, jobb oldalon pedig az x-es kifejezés. Ekkor felírhatjuk, hogy

$$y^2=\frac{6x^2+12}{2x^2+1}.$$

A jobb oldali kifejezést átalakítva adódik

$$y^2=\frac{3\left(2x^2+1\right)+9}{2x^2+1}, \qquad \text{illetve} \qquad y^2=3+\frac{9}{2x^2+1}.$$

A 9 pozitív osztói az 1, 3 és a 9. Felírhatjuk a következő táblázatot.

$2x^2+1$	1	3	9
x	0	± 1	± 2
y	nem egész	nem egész	± 2

Megállapíthatjuk, hogy négy megoldás van, ezek: $(2,2)$, $(2,-2)$, $(-2,2)$ és $(-2,-2)$.

II. megoldás. Rendezzük a fenti egyenletet oly módon, hogy bal oldalon maradjon az x-es kifejezés, jobb oldalon pedig az y-os kifejezés. Ekkor felírhatjuk, hogy

$$x^2=\frac{y^2-12}{2\left(3-y^2\right)}.$$

A bal oldal nemnegatív, ezért a jobb oldal is nemnegatív kell legyen. Mivel $y^2\neq 3$, így $3<y^2\leq 12$, ahonnan $y^2=4$ vagy $y^2=9$. Csak az első esetben lesz az x is egész, s ekkor megoldásként négy számpár adódik ezek pedig: $(2,2)$, $(2,-2)$, $(-2,2)$ és $(-2,-2)$.

2. Melyik az a négyjegyű szám, amely eleget tesz az alábbi feltételeknek:
I) Ha az első két számjegyét elhagyjuk, az eredeti szám négyzetgyökét kapjuk.
II) Ha az első két számjegyét átírjuk az utolsó kettő mögé, olyan számot kapunk, amely 1881-gyel nagyobb az eredeti számnál.

Megoldás. Jelölje az első két számjegyből álló számot a, a második két számjegyből álló számot b, így az

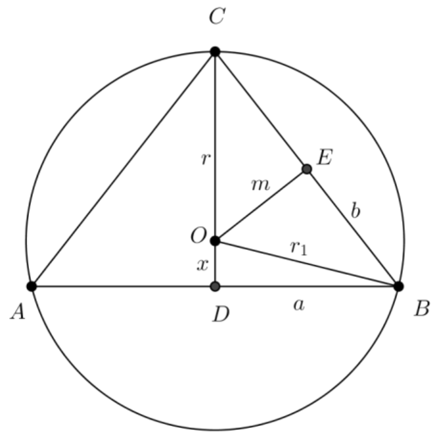
I) $100a+b=b^2$

II) $100b+a-100a-b=1881$, azaz $b-a=19$.

Ezt az első egyenletbe helyettesítve adódik az $a^2-63a+342=0$ egyenlet, amelynek megoldásai $a=6$, illetve $a=57$. A megoldások közül csak $a=57$ felel meg a feltételeknek, így $b=76$, tehát a keresett szám 5776.

3. Egy egyenlőszárú háromszög köré írt kör középpontjának az alaptól mért távolsága úgy aránylik a szártól mért távolsághoz, mint $1:\sqrt{10}$.
Határozd meg az alap és a szár arányát!

Megoldás. Az ábrán látható derékszögű háromszögekre alkalmazzuk a Pitagorasz tételt.



a) eset (1) $b^2+10x^2=r^2$,

(2) $a^2+x^2=r^2$,

(3) $a^2+(r+x)^2=4b^2$.

A következő ekvivalens átalakítást végezzük el: 4(1)-(2) és ezáltal kapjuk, hogy

$$4b^2-a^2=3r^2-39x^2,$$

ezután a (3) alapján

$$(r+x)^2=3r^2-39x^2,$$

ebből következik: $2r^2-2rx-40x^2=0$, amelyet elosztunk x^2-tel és ebből adódik, hogy

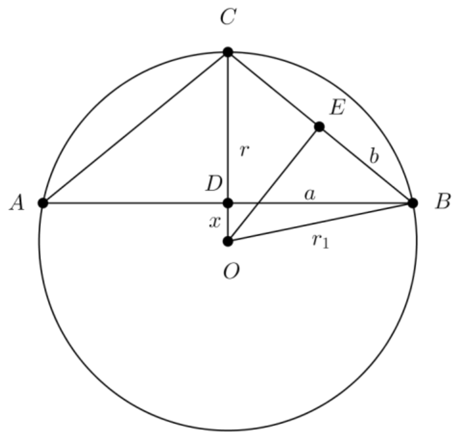
$$\left(\frac{r}{x}\right)^2-\frac{r}{x}-20=0.$$

A megoldások $\frac{r}{x}=-4$, illetve $\frac{r}{x}=5$, amelyből az elsőt nem fogadhatjuk el megoldásnak.

A második alapján $r=5x$, amelyből $a=2\sqrt{6}x$, $b=\sqrt{15}x$, ahonnan a keresett arány:

$$a:b=\left(2\sqrt{10}\right):5.$$

b) eset



Mivel most $OE=x\sqrt{10}$, így

(1) $b^2+10x^2=r^2$,

(2) $a^2+x^2=r^2$,

(3) $a^2+(r-x)^2=4b^2$.

A következő ekvivalens átalakítást végezzük el: 4(1)-(2) és ezáltal kapjuk, hogy $4b^2-a^2=3r^2-39x^2$, ezután a (3) alapján következik, hogy $(r-x)^2=3r^2-39x^2$, majd ebből hogy $2r^2+2rx-40x^2=0$, amelyet elosztva x^2-tel adódik, hogy

$$\left(\frac{r}{x}\right)^2+\frac{r}{x}-20=0.$$

A megoldások $\frac{r}{x}=4$, illetve $\frac{r}{x}=-5$, ahol a második negatív és nem megoldás.

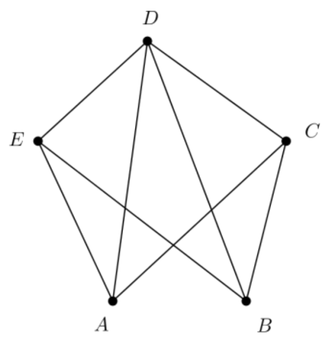
Az első alapján $r=4x$, amelyből $a=\sqrt{15}x$, $b=\sqrt{6}x$, ahonnan a keresett arány:

$$a:b=\left(\sqrt{10}\right):2.$$

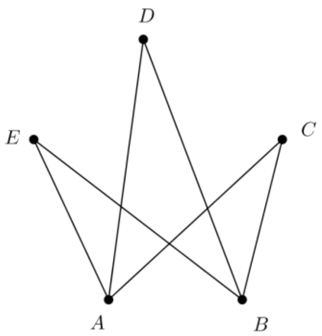
4. Adott 5 telefonközpont. Most a kiinduláskor minden központ mindegyikkel össze van kötve és egy lépésben egy-egy kábelt el lehet venni. Az nyer, aki megszünteti a teljes kapcsolatot (ami nem csak akkor lehet, ha minden élet elvesznek!). Ki fog nyerni, a *Kezdő* vagy *Második*?

Megoldás. A *Második* tud nyerni.

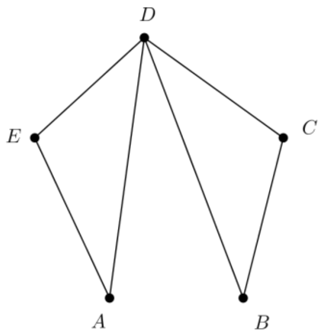
A *Kezdő* kiválaszt két tetszőleges állomást. Legyen ez az A és B, majd eltávolítja az összekötő vonalat. A *Második* kiválaszt két tetszőleges állomást, például, C-t és E-t és az összekötő vonalat eltávolítja.



A Kezdőnek lényegében kétféle lehetősége van:



1. Eltávolítja a D-ből induló egyik élt pl DE-t. Ekkor Második is D-ből induló élt vesz el, olyan csúcsba mutatót, amelyből E-ből nem megy él, tehát a DC-t. Ezután *Kezdő* bármelyik élt távolítja el, lesz olyan csúcs ahova már csak egy él fut be, ezt a *Második* veszi el és nyer.

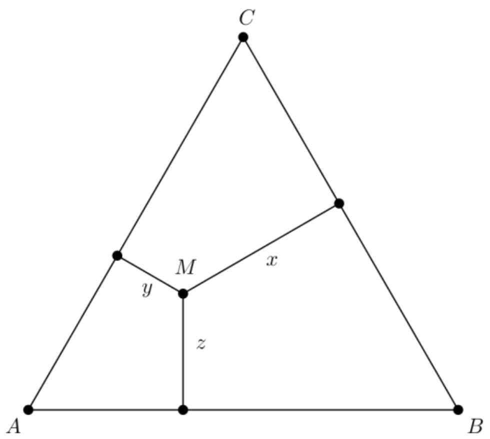


2. Ha a *Kezdő* nem D-ből induló élt vesz el, hanem $ABCE$ négyszög valamelyik élét, például EB-t, akkor a *Második* a másik két csúcsot osszekötő AC élt veszi el. Most ismét az lesz a helyzet, hogy a *Kezdő* akármelyik élt távolítja el, lesz olyan csúcs, amelyikbe csak egy él fut be, ezt a *Második* veszi el és nyer.

11. évfolyam

1. Igazold, hogy az egyenlő oldalú háromszögben egy tetszőleges belső pont távolságainak összege az oldalaktól állandó. Ha a háromszög oldala a, akkor fejezd ki ezt az összeget a függvényében.

Megoldás. Legyen M pont az ABC egyenlő oldalú háromszög belső tartományában lévő pont, és legyenek x, y, z rendre az M pont távolsága a BC, CA, AB oldalaktól.

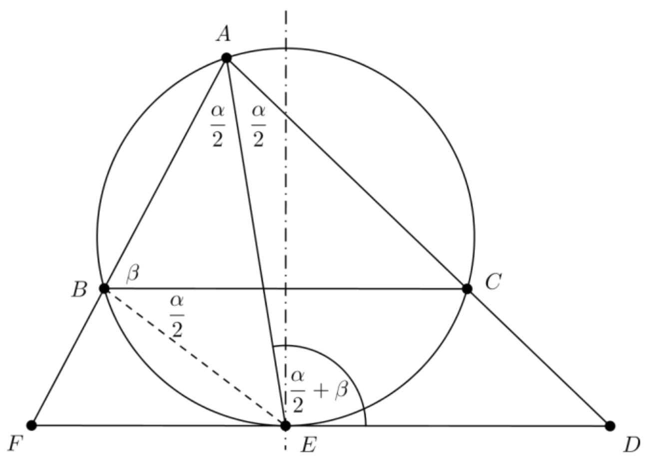


Legyen h az ABC egyenlő oldalú háromszög magassága, és legyenek T_{ABC}, T_{BMC}, T_{AMC}, T_{ABM} rendre az ABC, BCM, AMC, ABM háromszögek területei. Ekkor $T_{ABC} = T_{BCM} + T_{CAM} + T_{ABM}$,
vagyis

$$\frac{ah}{2} = \frac{a \cdot x}{2} + \frac{a \cdot y}{2} + \frac{a \cdot z}{2} = \frac{a}{2} \cdot (x + y + z)\text{, ezért } x + y + z = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

2. Az ABC háromszög A csúcsából induló szögfelezője a háromszög köré írható körét E pontban metszi. A kör E pontbeli érintője az AC egyenest D pontban metszi, az AB egyenest pedig F pontban. Bizonyítsd be, hogy ekkor teljesül a $BE \cdot (AD + AF) = AE \cdot FD$ egyenlőség!

Megoldás. Az $AED\angle$ érintő szárú szög és az $ABE\angle$ kerületi szög azonos ívekhez tartoznak, ezért egybevágóak, $AED\angle \cong ABE\angle = \beta + \frac{\alpha}{2}$, tehát AED és ABE háromszögek hasonlóak, mert két belső szögük egybevágó. Ezért megfelelő oldalaik aránya egyenlő $\frac{ED}{BE} = \frac{AD}{AE}$, azaz $ED = \frac{AD \cdot BE}{AE}$.



A szögfelező tételből $\frac{FE}{ED} = \frac{AF}{AD}$, ahonnan $FE = \frac{AF \cdot ED}{AD}$. Mivel $FD = FE + ED$, ezért az előbbiek alapján $FD = \frac{AF \cdot ED}{AD} + \frac{AD \cdot BE}{AE}$. Osszuk el ezt BE-vel: $\frac{FD}{BE} = \frac{AF \cdot ED}{AD \cdot BE} + \frac{AD}{AE}$. A háromszögek hasonlóságából $\frac{FD}{BE} = \frac{AF \cdot AD}{AD \cdot AE} + \frac{AD}{AE}$.
Egyszerűsítés után $\frac{FD}{BE} = \frac{AF + AD}{AE}$, tehát $BE \cdot (AD + AF) = AE \cdot FD$.

3. Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán: $2^{1+2\cos 6x}+16^{\sin^2 3x}=9$

Megoldás. Mivel $\sin^2 3x=\dfrac{1-\cos 6x}{2}$, az adott egyenlet ekvivalens $2\cdot 2^{2\cos 6x}+\dfrac{4}{2^{2\cos 6x}}=9$.

$t=2^{2\cos 6x}$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$2t^2-9t+4=0,$$

amely egyenlet megoldásai $t_1=4$, $t_2=\dfrac{1}{2}$. Visszahelyettesítve kapjuk, hogy az eredeti egyenlet megoldásai : $x_k=\dfrac{k\pi}{3}$, $x_n=\pm\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{n\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{Z}$.

4. A 2019 szám olyan, hogy ha számjegyeit megkettőzve írjuk le, akkor a kapott 22001199 számban bármely szomszédos három számjegyet is olvassuk egybe, nem kapunk 3-mal osztható számot. Hány ilyen tulajdonságú négyjegyű szám létezik?

Megoldás. Elegendő a 3-as szám osztási maradékainak osztályait figyelni, ezeket jelöljük $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$ módon, azaz $\overline{0}=\{0,3,6,9\}$, $\overline{1}=\{1,4,7\}$, $\overline{2}=\{2,5,8\}$. Ha a négyjegyű számban két azonos maradékosztálybeli szám van egymás mellett, azokból a kettőzés után négy azonos számjegy lesz egymás mellett, amelyekből hármat összeolvasva 3-mal osztható számot kapunk. Próbálgatással (például az összes eset kipróbálása után) megállapíthatjuk, hogy ha különböző maradékosztályba eső számokat írunk egymás mellé, akkor az a négyjegyű szám megfelel a feltételeknek. Ezeket kell összeszámolnunk. A következő lehetőségek vannak:

1.) $\overline{0}\ \overline{1}\ \overline{0}\ \overline{1}$;	2.) $\overline{0}\ \overline{1}\ \overline{0}\ \overline{2}$;	3.) $\overline{0}\ \overline{1}\ \overline{2}\ \overline{0}$;	4.) $\overline{0}\ \overline{1}\ \overline{2}\ \overline{1}$;
5.) $\overline{0}\ \overline{2}\ \overline{0}\ \overline{1}$;	6.) $\overline{0}\ \overline{2}\ \overline{0}\ \overline{2}$;	7.) $\overline{0}\ \overline{2}\ \overline{1}\ \overline{0}$;	8.) $\overline{0}\ \overline{2}\ \overline{1}\ \overline{2}$;
9.) $\overline{1}\ \overline{0}\ \overline{1}\ \overline{0}$;	10.) $\overline{1}\ \overline{0}\ \overline{1}\ \overline{2}$;	11.) $\overline{1}\ \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{0}$;	12.) $\overline{1}\ \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{1}$;
13.) $\overline{1}\ \overline{2}\ \overline{0}\ \overline{1}$;	14.) $\overline{1}\ \overline{2}\ \overline{0}\ \overline{2}$;	15.) $\overline{1}\ \overline{2}\ \overline{1}\ \overline{0}$;	16.) $\overline{1}\ \overline{2}\ \overline{1}\ \overline{2}$;
17.) $\overline{2}\ \overline{0}\ \overline{1}\ \overline{0}$;	18.) $\overline{2}\ \overline{0}\ \overline{1}\ \overline{2}$;	19.) $\overline{2}\ \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{0}$;	20.) $\overline{2}\ \overline{0}\ \overline{2}\ \overline{1}$;
21.) $\overline{2}\ \overline{1}\ \overline{0}\ \overline{1}$;	22.) $\overline{2}\ \overline{1}\ \overline{0}\ \overline{2}$;	23.) $\overline{2}\ \overline{1}\ \overline{2}\ \overline{0}$;	24.) $\overline{2}\ \overline{1}\ \overline{2}\ \overline{1}$.

Az $\overline{1}$ és a $\overline{2}$ maradékosztály háromelemű, így ott hármas szorzóval kell számolni. A $\overline{0}$ maradékosztály az első helyen 3, a többi helyen 4 lehetőséget kínál. Ezek szerint a lehetőségek száma a megszámozott esetekben így alakul:

Amikor a második, harmadik és negyedik helyen nem tartalmaz 0-t:

$3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=81$ lehetőség a következő esetekben: 4, 8, 16, 24;

Amikor két 0-t tartalmaz, egyiket sem az első helyen:

$4\cdot 4\cdot 3\cdot 3=144$ lehetőség a következő esetekben: 9, 11, 17, 19;

A többi esetben:

$4\cdot 3\cdot 3\cdot 3=108$ lehetőség a következő esetekben:

1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 15, 18, 20, 21, 22, 23;

Azaz az összes esetek száma: $4\cdot 81+16\cdot 108+4\cdot 144=2628$.

12. évfolyam

1. Hányféleképpen állíthatjuk elő a 10-es számot az 1, 2, 3 és 4 számok összegeként, ha számít az összeadandók sorrendje? (Például a 3-as számot négyféleképp állíthatjuk elő: $3=1+1+1=1+2=2+1=3$.)

Megoldás. Jelöljük f_n-nel azt, hogy az n számot hányféleképp írhatjuk fel az 1, 2, 3 és 4 számok összegeként. Ebben az összegben az első összeadandó négyféle lehet: 1, 2, 3, 4. Ha az első összeadandó i, $i\in\{1,2,3,4\}$, a maradék $n-i$ összeget f_{n-i}-féleképp állíthatjuk elő. Tehát $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3} + f_{n-4}$. Könnyen belátható, hogy $f_1=1$, $f_2=2$, $f_3=4$ valamint $f_4=8$ ($4=1+1+1+1=1+1+2=1+2+1=2+1+1=2+2=1+3=3+1=4$). Innen pedig egyszerű számolással adódik, hogy $f_5=1+2+4+8=15$, $f_6=2+4+8+15=29$, $f_7=4+8+15+29=56$, $f_8=8+15+29+56=108$, $f_9=15+29+56+108=208$ és végezetül $f_{10}=29+56+108+208=401$.

2. Határozd meg az összes olyan $f:R\to R$ függvényt, amely kielégíti a következő függvényegyenletet:

$$f(x+2y)-f(x-y)=3y(2x+y).$$

Megoldás. Az $x=y=\dfrac{z}{3}$ helyettesítéssel az $f(z)-f(0)=z^2$ eredményhez jutunk, ahonnan $f(x)=x^2+c$ az egyedüli lehetséges megoldás. Egyszerű visszahelyettesítéssel adódik, hogy ez a függvénycsalád valóban megoldás.

3. A konvex $ABCD$ négyszög átlói a P pontban metszik egymást és négy háromszögre bontják a négyszöget. Bizonyítsd be, hogy ezen háromszögeknek a súlypontjai egy paralelogrammát határoznak meg!

Megoldás. Legyenek T_1, T_2, T_3 és T_4 pontok, rendre, az ABP, BCP, CDP és DAP háromszögek súlypontjai, az S_1, S_2, S_3 és S_4 pontok pedig, rendre, az AB, BC, CD és DA oldalak felezőpontjai. Könnyen belátható, hogy az $S_1S_2S_3S_4$ négyszög paralelogramma: Mivel az S_1S_2 az ABC háromszög középvonala, ezért párhuzamos az AC átlóval. Ugyanígy az S_3S_4 is az ACD háromszög középvonala, tehát ő is párhuzamos az AC átlóval. Vagyis az $S_1S_2S_3S_4$ négyszög két szemköztes oldala párhuzamos egymással. Hasonlóan belátható a másik két szemköztes oldal párhuzamossága is, amiből következik, hogy az $S_1S_2S_3S_4$ négyszög valóban paralelogramma. Tekintsük most a P középponttú és $\dfrac{2}{3}$ együtthatójú homotéciát. Mivel a súlypont a súlyvonalat 2:1 arányban osztja, így ez a homotécia az S_i pontot pontosan a T_i pontra, $i\in\{1,2,3,4\}$, képezi le, amiből következik, hogy a $T_1T_2T_3T_4$ négyszög is paralelogramma.

4. Oldd meg a $2\cdot 3^x = 5^y + 1$ egyenletet a természetes számok halmazában!

Megoldás. Nyilvánvaló, hogy az $(x, y) = (1,1)$ megoldása az egyenletnek. Bebizonyítjuk, hogy nem létezik más megoldás. Tegyük fel, hogy $x \geq 2$. Ekkor az egyenlet bal oldala osztható 9-cel. Mivel az 5 hatványainak 9-cel való osztási maradékai hatos ciklusban ismétlődnek: 5, 7, 8, 4, 2, 1, és ebben a ciklusban a 8-as a harmadik szám, megállapíthatjuk, hogy $y = 6k + 3$ alakú. Így az egyenlet jobb oldala felírható: $5^y + 1 = 5^{6k+3} + 1 = \left(5^6\right)^k \cdot 5^3 + 1$. Mivel a kis Fermat-tétel miatt 5^6 7-es modulus szerint 1-gyel egyenlő, így az egész jobb oldal 7-es modulus szerint $5^3 + 1 = 125 + 1 = 126$-tal egyenlő, azaz osztható 7-tel. Mivel a bal oldal biztosan nem osztható 7-tel, így belátható, hogy az egyenletnek nincs más megoldása.

A XVII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

5. évfolyam
1. Zsivanac Beren, Petőfi Sándor Általános Iskola, Újvidék, **I. díj**
2. Papp Szabolcs, Kókai Imre Általános Iskola, Temerin, **II. díj**
3. Kadvány Júlia, Október 18. Általános Iskola, Zentagunaras, **II. díj**
4. Keresztényi Albert, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **II. díj**
5. Bazsó Ákos, Jovan Jovanović Zmaj Általános Iskola, Szabadka, **III. díj**
6. Kiss Noé, Stevan Sremac Általános Iskola, Zenta, **III. díj**
7. Rózsa Balázs, Hunyadi János Általános Iskola, Csantavér, **III. díj**

6. évfolyam
1. Csanádi Petra, Jovan Jovanović Zmaj Általános Iskola, Magyarkanizsa, **I. díj**
2. Kis Botond Jovan Jovanović Zmaj Általános Iskola, Magyarkanizsa, **II. díj**
3. Ristić Anna, József Attila Általános Iskola, Újvidék, **II. díj**
4. Csiszár Ákos, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **II. díj**
5. Gordos Beáta, Cseh Károly Általános Iskola, Ada, **III. díj**

7. évfolyam
1. Dobó Ármin, Jovan Mikić Általános Iskola/Cofman Iskola, Szabadka, **I. díj**
2. Buják Réka, József Attila Általános Iskola, Kupuszina, **II. díj**
3. Csiszár Virág, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **III. díj**
4. Fekecs Csaba, Október 18. Általános Iskola, Zentagunaras, **III. díj**
5. Ferenci Zsófi, Zdravko Gložanski Általános Iskola, Óbecse, **III. díj**

8. évfolyam
1. Erdélyi Nimród, Petőfi Sándor Általános Iskola, Hajdújárás, **I. díj**
2. Kalmár Krisztina, Kókai Imre Általános Iskola, Temerin, **II. díj**
3. Rekecki Dávid, Arany János Általános Iskola, Oromhegyes, **II. díj**

9. évfolyam
1. Kőműves Emese, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Csikós Gergely, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Nagygyörgy Zsóka, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
4. Tóth Norbert, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
5. Török Csongor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
6. Balázs Bálint, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

10. évfolyam
1. Gál József, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Ágó Gergely, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
3. Sinkovics Alex, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Apró Dorottya, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
5. Zsoldos Kristóf, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

11. évfolyam
1. Fehér Konrád, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Szorcsik Ivett, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Csíkos Enikő, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

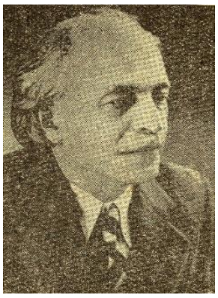
12. évfolyam

1. Kratok Gyula, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Apró János, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
3. Paróczi Orsolya, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
4. Kőrösi Zalán, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
5. Dzsemasztagity Viktória, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**
6. Hugyik Kornél, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

A díjazott versenyzők.

A XVIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Szeretett versenyünk nagykorúságát szomorú körülmények között ünnepelte. Az egész világot érintő járványhelyzet miatt a diákok két napon keresztül kis csoportokban írták meg a versenyt. A felkészítő tanárok, szülők nem jöhettek be az iskola épületébe. A kísérő rendezvények és a díjátadó ünnepség elmaradtak. Az okleveleket postán kézbesítettük ki a diákokak.
Fényképek ebből az évből nem készültek.
Mindezek ellenére nagyon örülünk a ténynek, hogy akármilyen körülmények között is, de meg tudtuk szervezni ezt a versenyt, megőrizve így annak folytonosságát.



XVIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2021. január 30.

5. évfolyam

1. A 2020 **egy olyan négyjegyű természetes szám, amelyben a számjegyek összege** 4**.**
a) Hány ilyen négyjegyű szám létezik?
b) Sorold fel csökkenő sorrendben ezeket a négyjegyű számokat!

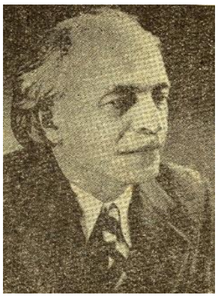
2. Hat törpe: Szende (1)**, Szundi** (2)**, Morgó** (3)**, Hapci** (4)**, Vidor** (5) **és Kuka** (6) **futóversenyt rendezett, s mivel Tudornak éppen fájt a lába, ő lett a bíró. (A nevek mögötti számok a törpék rajtszámait jelzik.) Ki hányadik lett, ha Tudor a verseny végén megállapította, hogy a rajtszám és a helyezési szám szorzata minden törpénél** 1**-gyel nagyobb volt egy** 7**-tel osztható számnál?**

3. Tudor a síkon úgy vette fel az A**,** B**,** C **és** D **pontokat, hogy azok távolsága:** $AB = 6\ cm$**,** $BC = 3\ cm$**,** $CD = 5\ cm$**. Készíts olyan ábrát, ahol az** AD **távolság:**
a) $4\ cm$**,**
b) $2\ cm$**,**
c) $0\ cm$**!**

4. Pisti apjának kedvenc csokigolyóit háromféle csomagolásban árusítják: 6**,** 9 **és** 20 **darab található egy-egy csomagban. A csomagokat csak egyben lehet megvásárolni. Pisti az édesapja születésnapjára szeretne ajándékba venni annyi darab csokigolyót, ahány éves az apukája. Az idén ezt még nem tudja megtenni, de a következő évtől kezdve bármelyik születésnapra már be tud így vásárolni. Hány éves az idén Pisti apja?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

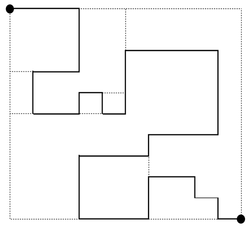
Jó munkát!



XVIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2021. január 30.

6. évfolyam

1. Mihály és anyukája mézeskalácsot készített a Mikulásnak, délután azonban meglátogatták őket Mihály édesszájú unokatestvérei, akik majdnem az összes mézeskalácsot felfalták. Dia a mézeskalácsok negyed részét, Léna a mézeskalácsok ötöd részénél eggyel többet, Zalán a mézeskalácsok harmadánál hárommal kevesebbet, Zénó pedig a mézeskalácsok hatodánál kettővel többet evett meg. Így a Mikulásnak összesen 3 darab mézeskalács maradt. Hány mézeskalács volt összesen?



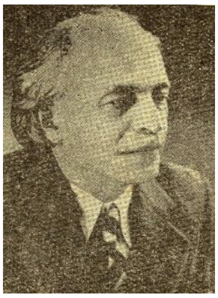
2. Peti és Misi elcserélték iskolatáskájukat de már csak otthon vették észre. Holnapra nagyon fontos feladatot kell, hogy elkészítsenek, így mindenképpen vissza kell cserélniük a táskákat. Kitalálták, hogy mindketten elindulnak és pontosan félúton fognak találkozni a táskacsere miatt. Az ábrán látható a két fiú kiindulási pontja valamint az útvonal, amit meg kell tenniük. Jelöld be a találkozás pontját az ábrán, valamint állapítsd meg, hogy milyen messze lakik a két fiú egymástól, ha tudjuk, hogy az ábrán látható legkisebb „négyzet" területe 144 négyzetméter. (Kiindulási pontjaik pedig az ábrán látható nagy négyzet átlójának végpontjai)

3. Mihály órája digitálisan mutatja az időt, s éppen $15:51$-kor néz rá. Ez a szám nagyon megtetszik neki, mivel palindrom szám (oda vissza olvasva ugyanaz) így elgondolkodik rajta, hogy hány ilyen palindrom percet tud felfedezni az óráján egy adott napon? (A digitális óra 24 órás formátumú.) Legfeljebb mennyi idő telik el két egymást követő palindrom perc között?

4. Egy szabadulószoba ajtaját egy négyjegyű számzáras lakattal lehet kinyitni. A négyjegyű szám a $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ számjegyek segítségével állítható elő úgy, hogy a számjegyek nem ismétlődhetnek. A helyes számkombinációról a következőket tudjuk. A szám 5-tel osztva 4-et ad maradékul. A négyjegyű szám osztható 12-vel. A négyjegyű szám tízes helyiértékén egy olyan szám áll, amivel semmiképpen sem kezdődhetne a számkombináció, hiszen akkor nem lenne négyjegyű a szám. Az ezres és százas helyiértékek helyén egy 20-nál kisebb prímszám áll. Milyen számkombinációval tudnánk kiszabadulni?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

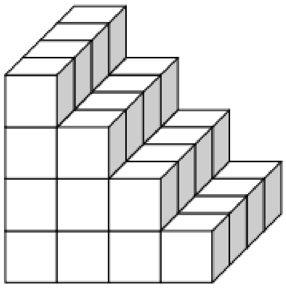


XVIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

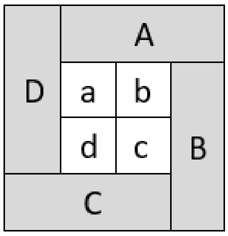
Zenta, 2021. január 30.

7. évfolyam

1. Az A, B, C és D pontok egy egyenesen találhatóak valamilyen sorrendben. A és D pontok $40\ cm$-re vannak egymástól, B és D pedig $20\ cm$-re. C félúton van A és B között. Milyen távol eshet C a D-től? Vegyél figyelembe minden lehetőséget!



2. Zoé fehér színű egységkockákból ragasztotta össze az ábrán látható lépcsőt, melynek teljes felületét pirosra festette. A festés után a lépcsőt újra kicsi kockákra szedte szét. Hány kicsi kockának lesz 6, 5, 4, 3, 2, 1 és 0 pirosra festett lapja?

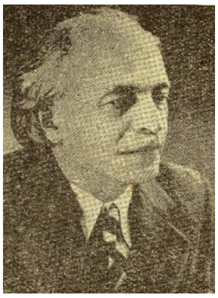


3. Az ábra betűinek helyére el kell helyezni az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 és 8 számjegyek mindegyikét úgy, hogy a nagybetűk helyére a velük szomszédos kis négyzetekben lévő két kisbetű helyén lévő számok összege kerüljön (Pl. $A=a+b$, vagy $B=b+c$). Mennyi lesz a nagybetűk helyén lévő számok összege? Mutasd meg, hogyan helyezted el a számjegyeket az ábrában! Írd le, hogyan gondolkodtál!

4. A 2020-as év leírásakor pontosan kétféle számjegyet használunk fel.
a) Hány olyan négyjegyű szám van, ami csak a 2 és a 0 számjegyekből épül fel?
b) Hány olyan négyjegyű szám van, ami a 7 és 8 számjegyekből képezhető?
c) Hány olyan négyjegyű szám van, ami pontosan kétféle számjegyből épül fel, de nem tartalmaz 0-t?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



XVIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2021. január 30.

8. évfolyam

1. Igaz-e, hogy három négyzetszám közül mindig kiválasztható kettő, amelyek különbsége osztható néggyel? Válaszodat indokold!

2. Mely számjegyeket jelölhetik az x és y ismeretlenek, ha a $\dfrac{163+\overline{1xy}}{\overline{2yx}}$ tört értéke kisebb mint 1?

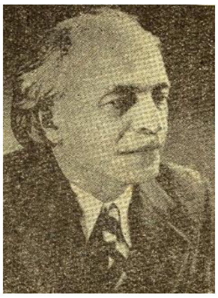
3. Az A, B, C, D és E pontokat úgy vettük fel egy kör kerületén, hogy az AB, BC, CD és DE szakaszok meghúzása után a B, C és D pontoknál lévő szögek mindegyike 45°. Mutassuk meg, hogy

$$AB^2+CD^2=BC^2+DE^2.$$

4. A focilabda 32 db bőrdarabból van összevarrva: fehér hatszögletű és fekete ötszögletű darabokból. Mindegyik fekete csak fehér bőrdarabbal határos, és mindegyik fehér három feketével és három fehérrel. Hány fehér és hány fekete színű bőrdarab van a labdán? Válaszodat indokold!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



XVIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2021. január 29.

9. évfolyam

1. Egy 4×4-es táblázat mindegyik mezőjébe beírjuk az 1, 2, 3 számok valamelyikét.
a) Elérhető-e így, hogy minden sorban és minden oszlopban különbözzön a számok összege?
b) Elérhető-e így, hogy minden sorban, minden oszlopban és mindkét átlóban különbözzön a számok összege?

2. Az $ABCD$ négyzet CD oldalán fölveszünk egy tetszőleges L pontot. Az A csúcsból és a C csúcsból is merőleges egyeneseket bocsátunk a BL szakaszra, így kapjuk rendre a P és Q metszéspontokat. Igazoljuk, hogy $CP = DQ$.

3. Határozzuk meg azokat a természetes számokat, amelyek négyzetének a végződése ugyanaz a kétjegyű szám, mint magának az eredeti számnak?

4. Tekintsük a mellékelt ábrán látható végtelen számháromszöget, amelyben a páratlan természetes számokat láthatjuk fölsorolva emelkedő sorrendben.
a) Melyik szám áll a 100. sor végén?
b) Mennyi a 100. sorban álló számok összege?
c) Mennyi az első 100 sorban álló összes szám összege?

1

3 5

7 9 11

13 15 17 19

... ...

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XVIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2021. január 29.

10. évfolyam

1. Határozzuk meg azokat a természetes számokat, amelyek négyzetének a végződése ugyanaz a kétjegyű szám, mint magának az eredeti számnak?

2. Hány megoldása van az egyenletrendszernek a valós számnégyesek halmazában és melyek ezek?

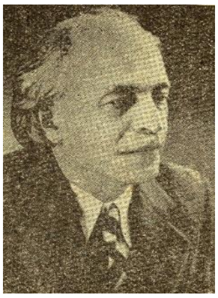
$$\begin{aligned}&x^2+y^2+z^2+t^2=50,\\&x^2-y^2+z^2-t^2=-40,\\&xy-zt=0,\\&x-y+z+t=0.\end{aligned}$$

3. Az $ABCD$ **négyzet** AB **oldala felett kifelé félkört szerkesztünk. Ezen a félkörön melyik az a** P **pont, amelyre az** AP^2+CP^2 **a lehető legnagyobb és mennyi a maximum értéke?**

4. A táblára felírunk 2019 **nullát,** 2020 **egyest és** 2021 **kettes számjegyet. Minden alkalommal két különböző számjegyet törlünk és helyettük a** 0**,** 1**,** 2 **számjegy közül azt az egy számjegyet írjuk, amely abban a lépésben nem került letörlésre.**
a) Bizonyos lépés után maradhat-e csupa nulla sorozat?
b) Amikor a táblán csak egy számjegy maradt, akkor melyik számjegyek lehetnek azok?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



XVIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2021. január 29.

11. évfolyam

1. Határozd meg az összes olyan n természetes számot, amelyre érvényes, hogy $n+1$, $n+3$, $n+7$, $n+9$, $n+13$ és $n+15$ mindegyike prímszám!

2. Oldd meg az egyenletet: $\dfrac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}{3\sin x + \cos 2x} = \operatorname{ctg} 2x$**.**

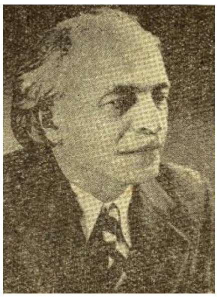
3. Legyenek AB és CD olyan 1 hosszúságú szakaszok, amelyek az O pontban metszik egymást úgy, hogy $AOC\angle = \dfrac{\pi}{3}$. Bizonyítsd be, hogy $AC + BD \geq 1$.

4. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\left(x^2 + x + 3\right)\left(x^2 + 3x + 3\right) = 3x^2 .$$

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



XVIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2021. január 29.

<u>12. évfolyam</u>

1. Bizonyítsd be, hogy minden x valós számra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$x^4+7x^2+2>4x^3+2x.$$

2. Egy derékszögű háromszög befogói fölé kívülről négyzeteket rajzoltunk. Mutasd meg, hogy a háromszög köré írható köre átmegy a négyzetek legtávolabbi csúcsait összekötő szakasz felezőpontján!

3. Jelölje $s(n)$ az n természetes szám számjegyeinek szorzatát. Létezik-e olyan n amelyre $s(n)=n^2-21n-40$?

4. Határozd meg a 7^{2020} szám utolsó 4 számjegyét!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

A XVIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

5. évfolyam

1. A 2020 egy olyan négyjegyű természetes szám, amelyben a számjegyek összege 4.
a) Hány ilyen négyjegyű szám létezik?
b) Sorold fel csökkenő sorrendben ezeket a négyjegyű számokat!

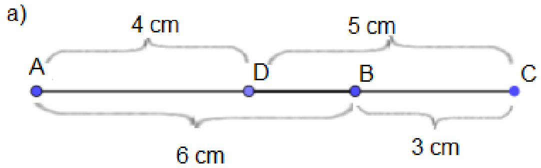
Megoldás.
a) 20 ilyen négyjegyű szám létezik
b) Csökkenő sorrendben: 4000, 3100, 3010, 3001, 2200, 2110, 2101, 2020, 2011, 2002, 1300, 1210, 1201, 1120, 1111, 1102, 1030, 1021, 1012, 1003.

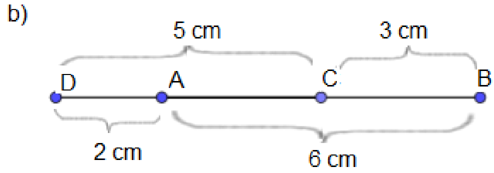
2. Hat törpe: Szende (1), Szundi (2), Morgó (3), Hapci (4), Vidor (5) és Kuka (6) futóversenyt rendezett, s mivel Tudornak éppen fájt a lába, ő lett a bíró. (A nevek mögötti számok a törpék rajtszámait jelzik.) Ki hányadik lett, ha Tudor a verseny végén megállapította, hogy a rajtszám és a helyezési szám szorzata minden törpénél 1-gyel nagyobb volt egy 7-tel osztható számnál?

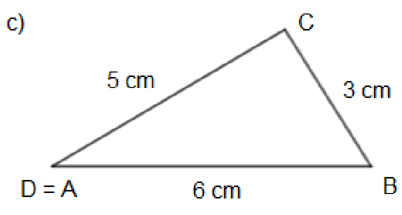
Megoldás. Az első helyen csak az 1-es rajtszámú Szende érkezhetett a feltételek szerint, hiszen $0\cdot7+1=1$. A 2. helyre a 4-es rajtszámú Hapcinak kellett befutnia, mivel $1\cdot7+1=2\cdot4$.
A 3. helyezett Vidor lett 5-ös rajtszámmal, ekkor ugyanis $2\cdot7+1=3\cdot5$. A 4. helyezett csak Szundi lehetett $1\cdot7+1=4\cdot2$, míg az 5. helyezett csak Morgó lehet, hiszen $2\cdot7+1=5\cdot3$. A 6. helyezett így már csak a 6-os rajtszámú Kuka lehet, és teljesül is a feladat feltétele, hiszen: $5\cdot7+1=6\cdot6$. A befutók sorrendje tehát: Szende (1), Hapci (4), Vidor (5), Szundi (2), Morgó (3), Kuka (6).

3. Tudor a síkon úgy vette fel az A, B, C és D pontokat, hogy azok távolsága: $AB=6\ cm$, $BC=3\ cm$, $CD=5\ cm$. Készíts olyan ábrát, ahol az AD távolság:
a) $4\ cm$**,**
b) $2\ cm$**,**
c) $0\ cm$**!**

Megoldás.







4. Pisti apjának kedvenc csokigolyóit háromféle csomagolásban árusítják: 6, 9 és 20 darab található egy-egy csomagban. A csomagokat csak egyben lehet megvásárolni. Pisti az édesapja születésnapjára szeretne ajándékba venni annyi darab csokigolyót, ahány éves az apukája. Az idén ezt még nem tudja megtenni, de a következő évtől kezdve bármelyik születésnapra már be tud így vásárolni. Hány éves az idén Pisti apja?

Megoldás. Ellenőrizhető, hogy 43 darabot nem lehet vásárolni a feltételeknek megfelelően. Viszont 44-től kezdve minden egész számú csokigolyó megvásárolható:

$44=20+9+9+6$	$50=44+6$
$45=9+9+9+6+6+6$	$51=45+6$
$46=20+20+6$	$52=46+6$
$47=20+9+9+9$	$53=47+6$
$48=9+9+6+6+6+6+6$	$54=48+6$
$49=20+20+9$	$55=49+6$, stb.

Így Pisti édesapja idén 43 éves.

6. évfolyam

1. Mihály és anyukája mézeskalácsot készített a Mikulásnak, délután azonban meglátogatták őket Mihály édesszájú unokatestvérei, akik majdnem az összes mézeskalácsot felfalták. Dia a mézeskalácsok negyed részét, Léna a mézeskalácsok ötöd részénél eggyel többet, Zalán a mézeskalácsok harmadánál hárommal kevesebbet, Zénó pedig a mézeskalácsok hatodánál kettővel többet evett meg. Így a Mikulásnak összesen 3 darab mézeskalács maradt. Hány mézeskalács volt összesen?

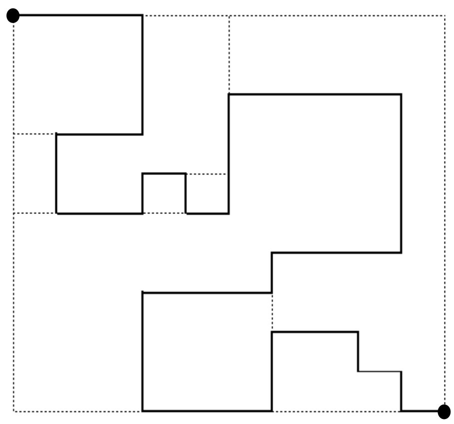
Megoldás. Jelölje x a mézeskalácsok számát. A következő összefüggést tudjuk felírni:

$$\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}x+1+\frac{1}{3}x-3+\frac{1}{6}x+2+3=x\,.$$

Rendezve adódik, hogy

$$\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}x+3=x\,.$$

Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát a nevezőben levő számok legkisebb közös többszörösével, azaz 60-nal. Megkapjuk, hogy $15x+12x+20x+10x+180=60x$.
Rendezve adódik, hogy $3x=180$, vagyis $x=60$.
A válasz tehát a következő: 60 sütemény volt eredetileg.



2. Peti és Misi elcserélték iskolatáskájukat de már csak otthon vették észre. Holnapra nagyon fontos feladatot kell, hogy elkészítsenek, így mindenképpen vissza kell cserélniük a táskákat. Kitalálták, hogy mindketten elindulnak és pontosan félúton fognak találkozni a táskacsere miatt. Az ábrán látható a két fiú kiindulási pontja valamint az útvonal, amit meg kell tenniük. Jelöld be a találkozás pontját az ábrán, valamint állapítsd meg, hogy milyen messze lakik a két fiú egymástól, ha tudjuk, hogy az ábrán látható legkisebb „négyzet” területe 144 négyzetméter. (Kiindulási pontjaik pedig az ábrán látható nagy négyzet átlójának végpontjai)

Megoldás. A 144 négyzetméterből meg tudjuk kapni a legkisebb törött vonal hosszát, ami 12 méter, nevezzük ezt 1 egységnek Megvizsgálva az ábra bal felső negyedét láthatjuk, hogy a legkisebb négyzet bal szomszédja egy négyszer akkora négyzet, melynek oldalai kétszer akkorák. Az utóbbi rész felső szomszédjának éle viszont egy egységgel nagyobb az előzőtől, nevezzük 3 egységnek.
Ezen arányok meghatározásával meg tudjuk a többi negyedekben is határozni a törött vonalak hosszát, így megkaphatjuk, hogy a törött vonal hosszúsága egységekben mérve:
$3+3+2+2+2+1+1+1+1+3+4+4+3+1+3+3+3+2+2+1+1+1+1=48$ egység.
A 48 egység méterben kifejezve $48\cdot 12=576$ méter, azaz 576 méterre lakik egymástól a két tanuló.

3. Mihály órája digitálisan mutatja az időt, s éppen $15:51$-kor néz rá. Ez a szám nagyon megtetszik neki, mivel palindrom szám (oda vissza olvasva ugyanaz) így elgondolkodik rajta, hogy hány ilyen palindrom percet tud felfedezni az óráján egy adott napon? (A digitális óra 24 órás formátumú.) Legfeljebb mennyi idő telik el két egymást követő palindrom perc között?

Megoldás. Felsorolással megkaphatók a lehetséges palindrom esetek: (azt is kell indokolni, hogy egyéb eset miért nem lehet): $00:00$, $01:10$, $02:20$, $03:30$, $04:40$, $05:50$, $10:01$, $11:11$, $12:21$, $13:31$, $14:41$, $15:51$, $20:02$, $21:12$, $22:22$, $23:32$. Ez 16 esetet jelent.
Meg kell vizsgálni, hogy melyik lehet a legnagyobb távolság két palindrom perc között. Szóba jöhet a $05:50$ és $10:01$ szomszédság valamint a $15:51$ és $20:02$ szomszédság.
Az első és a második esetben is 4 óra 11 perc a különbség a két időpont között, így a legtöbb idő ami eltelik két szomszédos palindrom perc között az 4 óra 11 perc.

4. Egy szabadulószoba ajtaját egy négyjegyű számzáras lakattal lehet kinyitni. A négyjegyű szám a $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ számjegyek segítségével állítható elő úgy, hogy a számjegyek nem ismétlődhetnek. A helyes számkombinációról a következőket tudjuk. A szám 5-tel osztva 4-et ad maradékul. A négyjegyű szám osztható 12-vel. A négyjegyű szám tízes helyiértékén egy olyan szám áll, amivel semmiképpen sem kezdődhetne a számkombináció, hiszen akkor nem lenne négyjegyű a szám. Az ezres és százas helyiértékek helyén egy 20-nál kisebb prímszám áll. Milyen számkombinációval tudnánk kiszabadulni?

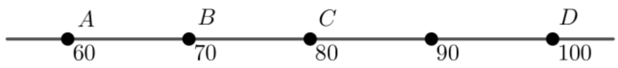
Megoldás. A harmadik feltételből azt kapjuk, hogy a tízesek helyiértékén a 0 áll, azaz $xx0x$ a helyes kombináció egyik értéke
A második feltételből azt kapjuk, hogy a szám vagy 4-re vagy 8-ra végződik, hiszen ahhoz, hogy 12-vel osztható legyen osztható kell, hogy legyen 3-mal és 4-gyel is, 4-gyel pedig pontosan akkor osztható, ha utolsó két számjegyén álló kétjegyű szám osztható 4-gyel. Ez nem lehet más, mint a 04 és 08.
Az első feltételből kiderül, hogy az utolsó számjegy 4 vagy 9 lehet, de a 9-es számjegy nem lehetséges, mivel akkor nem lenne 4-gyel osztható a kódszám.
Ezzel már felét meghatároztuk a helyes számkombinációnak: $xx04$.
A negyedik feltétel, hogy a százasok és ezresek helyén álló számnak 20-nál kisebb prímszámnak kell lennie, így a lehetséges esetek: 11, 13, 17, 19. (Egyjegyű prímek nem jöhetnek szóba, hiszen 0-val nem kezdődhet a kód, illetve a számjegyek sem ismétlődhetnek és a 0-nak már meghatároztuk a helyét.)
Le kell még ellenőrizni a lehetséges kód kombinációkat:
A 11 nem jó, hiszen nem ismétlődhetnek a számjegyek és a 3-mal való oszthatóság sem teljesül.
A 13 nem jó, mert $1+3+0+4=8$, így a számjegyek összege nem osztható 3-mal.
A 19 szintén nem jó, hiszen a számjegyek összege 14, ami nem osztható 3-mal.
A 17 lesz a megfelelő szám, mivel $1+7+0+4=12$, ami $3 \cdot 4$, tehát osztható 3-mal.
Mindent kivizsgálva a 1704-es kombinációval tudunk kiszabadulni.

7. évfolyam

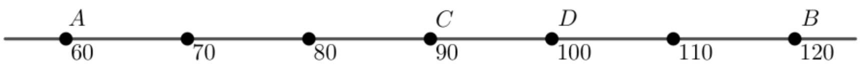
1. Az A, B, C és D pontok egy egyenesen találhatóak valamilyen sorrendben. A és D pontok $40\ cm$-re vannak egymástól, B és D pedig $20\ cm$-re. C félúton van A és B között. Milyen távol eshet C a D-től? Vegyél figyelembe minden lehetőséget!

Megoldás. Helyezzük el az A, B, C és D pontokat a számtengelyen (legyen az egység $1\ cm$). Legyen A az $x = 60$ pontban. A következő lehetséges elrendezéseket kapjuk a D pont elhelyezése után:
I. Ha a D-t az A-tól jobbra vesszük fel, a B pont elhelyezése után a következő elrendezések jönnek létre:

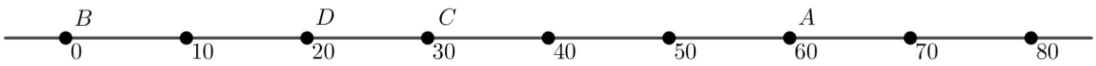
$A - B - D$ esetén, az ábra szerint a C pont az $x = 70$ pontba esik, $|CD| = 30\ cm$.



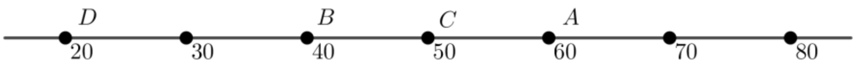
$A - D - B$ esetén, az ábra szerint a C pont az $x = 90$ pontba esik, $|CD| = 10\ cm$.



II. Ha D-t az A-tól balra vesszük fel, a következő elrendezések lehetségesek:
$B - D - A$ esetén, az ábra szerint a C pont az $x = 30$ pontba esik, $|CD| = 10\ cm$.

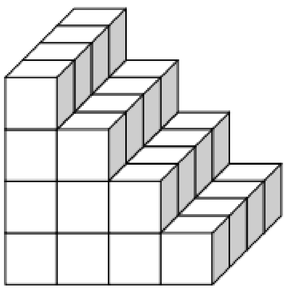


$D - B - A$ esetén, az ábra szerint a C pont az $x = 50$ pontba esik, $|CD| = 30\ cm$.



Tehát a C és D távolsága lehet $10\ cm$ és $30\ cm$ is.

2. Zoé fehér színű egységkockákból ragasztotta össze az ábrán látható lépcsőt, melynek teljes felületét pirosra festette. A festés után a lépcsőt újra kicsi kockákra szedte szét. Hány kicsi kockának lesz 6, 5, 4, 3, 2, 1 és 0 pirosra festett lapja?



Megoldás. Ha fentről lefelé, balról jobbra haladunk, az első és az utolsó (szélső) lépcsősorban a következő piros oldalszámok fordulnak elő:

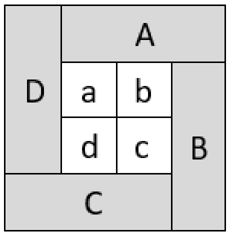
4
2 3
2 1 3
3 2 2 4

A második és harmadik lépcsősor, amik belül vannak eggyel kevesebb festett oldallal rendelkezik, mint a szélsők, azaz

3
1 2
1 0 2
2 1 1 3

Összesen $4 \cdot 10 = 40$ db kocka van a lépcsőben. Ezek közül
0 piros oldalú $0+1+1+0=2$ kocka,
1 piros oldalú $1+4+4+1=10$ kocka,
2 piros oldalú $4+3+3+4=14$ kocka,
3 piros oldalú $3+2+2+3=10$ kocka,
4 piros oldalú $2+0+0+2=4$ kocka,
5 piros oldalú 0 kocka,
6 piros oldalú 0 kocka.

3. Az ábra betűinek helyére el kell helyezni az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 és 8 számjegyek mindegyikét úgy, hogy a nagybetűk helyére a velük szomszédos kis négyzetekben lévő két kisbetű helyén lévő számok összege kerüljön (Pl. $A=a+b$, vagy $B=b+c$). Mennyi lesz a nagybetűk helyén lévő számok összege? Mutasd meg, hogyan helyezted el a számjegyeket az ábrában! Írd le, hogyan gondolkodtál!



Megoldás. A megadott 8 számjegy összege 36. Mivel a-t beszámítjuk A-hoz és D-hez is, ezért kimondhatjuk, hogy a nagybetűkkel jelölt mezőkben a számok összege kétszer nagyobb a kisbetűkkel jelölt számok összegénél.
Tehát, ha $x=a+b+c+d$, akkor $A+B+C+D=2x$. Azaz a négyzetben lévő teljes összeg $x+2x=3x$. Tudjuk, hogy $3x=36$, innen $x=12$.
Tehát a kisbetűkhöz úgy kell számokat hozzárendelni, hogy $a+b+c+d=12$ legyen. Az biztos, hogy 1 és 2 nem kerülhetnek kívülre, mivel nem tudjuk megkapni őket a felsorolt számjegyekből vett összegként.
Tehát 1 és 2 biztosan a belső négyzetbe kerül. Az ő összegük 3, ezért a következő két számjegyet úgy kell ide választani, hogy az összegük 9 legyen. Ez két módon lehetséges $3+6=9$ vagy $4+5=9$.
Vizsgáljuk meg a 1, 2, 3, 6 esetet! A 3 és a 6 nem kerülhet egymás mellé mert az összegük 9, így az egyik lehetséges megoldás: $a=1$, $b=3$, $c=2$, $d=6$, $A=4$, $B=5$, $C=8$, és $D=7$. Minden számjegy csak egyszer szerepel, ezek szerint jól dolgoztunk.
Ha a belső négyzetbe az 1, 2, 4, 5 számjegyeket tesszük, akkor 1 és 2 egymás melletti mezőbe kell, hogy kerüljön, mert csak így kaphatunk 3-at összegként. A 4 és 5 viszont nem kerülhet egymás mellé, mert az összegük 9, azt pedig nem szabad megkapni. Így ellentmondáshoz jutunk, mert nincs a számjegyeknek olyan elrendezése, ami ennek a két feltételnek megfelel.

4. A 2020-as év leírásakor pontosan kétféle számjegyet használunk fel.
a) Hány olyan négyjegyű szám van, ami csak a 2 és a 0 számjegyekből épül fel?
b) Hány olyan négyjegyű szám van, ami a 7 és 8 számjegyekből képezhető?
c) Hány olyan négyjegyű szám van, ami pontosan kétféle számjegyből épül fel, de nem tartalmaz 0-t?

Megoldás. a) Az első számjegy csakis 2 lehet. A 2, 3, 4 számjegyet kétféleképpen választhatjuk, ezért $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ féle szám felel meg a feltételnek. Ebbe viszont beletartozik a 2222 is, amiben nincs 0, ezért a megoldás 7.
(Helyes megoldások: 2000, 2002, 2020, 2022, 2200, 2202, 2220)
b) Két különböző számjegyet felhasználva mindegyik helyi értékre kétféle számjegy közül választhatunk, ami azt jelenti, hogy az adott számpárból $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ féle számjegy állítható elő. Viszont ezek között van 2 olyan, ami csak egyféle számjegyet tartalmaz (7777 és 8888), ezek nem felelnek meg, így ezekből a számjegyekből 14 féle négyjegyű szám képezhető, amiben pontosan kétféle számjegy van.
c) Az a kérdés, hogy a kétféle számjegyet hányféleképpen választhatjuk ki. A 9 rendelkezésre álló számjegy közül kettő kiválasztható $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ módon, mert a számpár első tagját 9 közül választhatjuk, a másodikat már csak 8 közül. Mivel minden számpárt duplán számoltunk, ezért kell kettővel elosztanunk, hogy megkapjuk a különböző számpárok számát.
Tehát a végeredmény $36 \cdot 14 = 504$.

8. évfolyam

1. Igaz-e, hogy három négyzetszám közül mindig kiválasztható kettő, amelyek különbsége osztható néggyel? Válaszodat indokold!

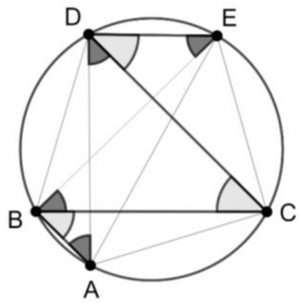
Megoldás. A négyzetszámok néggyel való osztási maradéka csak 0 vagy 1 lehet. Három négyzetszám közül kettőnek biztosan megegyezik a néggyel való osztási maradéka, így ennek a két számnak a különbsége osztható néggyel.

2. Mely számjegyeket jelölhetik az x és y ismeretlenek, ha a $\dfrac{163+\overline{1xy}}{\overline{2yx}}$ tört értéke kisebb mint 1?

Megoldás. A $\dfrac{163+\overline{1xy}}{\overline{2yx}}<1$ egyenlőtlenség felírható a következő alakban: $163+100+10x+y<200+10y+x$, melyet rendezve a $7+x<y$ összefüggést kapjuk. Mivel x és y számjegyeket jelölnek, ezért értékeik egész számok, melyek 0 és 9 között változhatnak. Így három megoldást különböztethetünk meg:
$I.\ x=0$ és $y=8$, $II.\ x=0$ és $y=9$, $III.\ x=1$ és $y=9$.

3. Az A, B, C, D és E pontokat úgy vettük fel egy kör kerületén, hogy az AB, BC, CD és DE szakaszok meghúzása után a B, C és D pontoknál lévő szögek mindegyike 45°. Mutassuk meg, hogy

$$AB^2+CD^2=BC^2+DE^2.$$



Megoldás. Húzzuk meg az AC, CE, AE, BD és AD szakaszokat. A kerületi szögekre vonatkozó tétel alapján következik, hogy az ábrán sötéttel jelölt szögek is 45°-osak, illetve igazak a következő egyenlőségek: $AC=BD=CE, BC=AD$ és $BE=CD$.
Az AEB és ADE háromszögek derékszögűek és AE a kör átmérője.
A Pitagorasz-tétel alapján felírható:
$AE^2=AD^2+DE^2=BC^2+DE^2$ és $AE^2=AB^2+BE^2=AB^2+CD^2$
Azaz: $AB^2+CD^2=BC^2+DE^2$.

4. A focilabda 32 db bőrdarabból van összevarrva: fehér hatszögletű és fekete ötszögletű darabokból. Mindegyik fekete csak fehér bőrdarabbal határos, és mindegyik fehér három feketével és három fehérrel. Hány fehér és hány fekete színű bőrdarab van a labdán? Válaszodat indokold!

Megoldás. Legyen x a fehér darabok száma, ekkor $32-x$ a feketéké. Minden fekete darabnak öt fehér szomszédja van, de ilyen módon minden fehér darabot háromszor számolunk meg, mivel minden fehér 3 feketével érintkezik. A fehér darabok száma így írható fel:

$$x=\frac{5\cdot(32-x)}{3}.$$

Innen $x=20$. Azaz a focilabda 20 fehér és 12 fekete darabból áll.

9. évfolyam

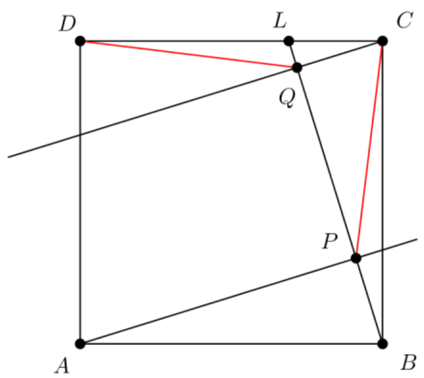
1. Egy 4×4-es táblázat mindegyik mezőjébe beírjuk az 1, 2, 3 számok valamelyikét.
a) Elérhető-e így, hogy minden sorban és minden oszlopban különbözzön a számok összege?
b) Elérhető-e így, hogy minden sorban, minden oszlopban és mindkét átlóban különbözzön a számok összege?

Megoldás. a) Igen, elérhető. Egy ilyen kitöltést mutat az alábbi ábra. A sorok végén a sorösszegek, az oszlopok alatt pedig az oszlopösszegek láthatók.

1	1	1	2	5
1	1	2	2	6
2	3	3	3	11
3	3	3	3	12
7	8	9	10	

b) Nem lehet. A legkisebb szám, ami összegként kijöhet $1+1+1+1=4$, a legnagyobb pedig $3+3+3+3=12$. Ez összesen 9 szám. Ugyanakkor a négy-négy oszlop- és sorösszeg, valamint a két átló összege összesen 10 féle számot jelent. Nyilvánvaló, hogy nem lehet mind a 10 összeg különböző, ha csak 9 féle összeg jöhet ki.

2. Az $ABCD$ négyzet CD oldalán fölveszünk egy tetszőleges L pontot. Az A csúcsból és a C csúcsból is merőleges egyeneseket bocsátunk a BL szakaszra, így kapjuk rendre a P és Q metszéspontokat. Igazoljuk, hogy $CP=DQ$.



Megoldás. Tekintsük a BAP és a CBQ háromszöget. $AB=BC$, mert a négyzet oldalai egyenlők;
$APB\angle=BQC\angle=90°$ a feltételek miatt;
$ABP\angle=BCQ\angle$, mert merőleges szárú konvex szögek; ebből következik, hogy BAP háromszög és CBQ háromszög egybevágó (két oldal és a nagyobbikkal szemközti szögek egyenlők). Így $BP=CQ$.
Tekintsük most a BCP és a CDQ háromszöget.
$BC=CD$, mert a négyzet oldalai egyenlők;
$BP=CQ$, az imént bizonyítottuk be;
$CBP\angle=DCQ\angle$, mert konvex váltószögek; ebből következik, hogy a BCP és a CDQ háromszögek egybevágók (két oldaluk és a közre zárt szögük egyenlő), amiből következik a bizonyítandó állítás: $CP=DQ$.

3. Határozzuk meg azokat a természetes számokat, amelyek négyzetének a végződése ugyanaz a kétjegyű szám, mint magának az eredeti számnak?

Megoldás. Ha a feltételek teljesülnek, akkor $100\mid\left(a^2-a\right)$ azaz $a\cdot(a-1)=100k=4\cdot25\cdot k$. Mivel $(a,a-1)=1$, ezért $25\mid a$ és $4\mid(a-1)$, vagy $25\mid(a-1)$ és $4\mid a$, vagy $100\mid a$, illetve $100\mid(a-1)$.

Az első esetben az a szám végződése 00, 25, 50 vagy 75 lehet, de ezek közül csak a 25-tel végződőek felelnek meg.
A második esetben az $a-1$ szám végződése 00, 25, 50 vagy 75 lehet, de ezekből csak azok felelnek meg, amikor $a-1$ szám 75-re végződik, azaz az a szám végződése 76.
A harmadik esetben a 00-re végződőek felelnek meg.
A negyedik esetben a 01-re végződőek felelnek meg.

4. Tekintsük a mellékelt ábrán látható végtelen számháromszöget, amelyben a páratlan természetes számokat láthatjuk fölsorolva emelkedő sorrendben.
a) Melyik szám áll a 100. sor végén?
b) Mennyi a 100. sorban álló számok összege?
c) Mennyi az első 100 sorban álló összes szám összege?

1

3 5

7 9 11

13 15 17 19

... ...

Megoldás. a) Vegyük észre, hogy minden sorban annyi szám van, ahányadik sort nézzük. Így az első sorban 1, a második sorban 2, a harmadik sorban 3 szám van és így tovább. Az első 100 sorban összesen $1+2+3+\cdots+100=\frac{100\cdot(100+1)}{2}=5050$.
Ezek szerint a 100. sor végén az 5050. páratlan szám áll. Mivel az n-edik páratlan számot úgy kapjuk meg, hogy az n kétszereséből kivonunk egyet, így az 5050. páratlan szám a 10099.
b) Ha a 100. sorban 100 páratlan szám áll, és a sor végén a 10099 áll, akkor ennek a sornak a számait csökkenő sorrendben a következőképpen írhatjuk:
10099, $10099-2$, $10099-2\cdot 2$, $10099-3\cdot 2$, $10099-4\cdot 2$, …, $10099-99\cdot 2$.
Jelöljük ezen számok összegét S-sel. Ekkor

$$S=10099+10099-2+10099-2\cdot 2+10099-3\cdot 2+10099-4\cdot 2+\cdots+10099-99\cdot 2=$$

$$=100\cdot 10099-2\cdot(1+2+3+\cdots+99)=100\cdot 10099-2\cdot\frac{(1+99)\cdot 99}{2}=$$

$$=100\cdot 10099-100\cdot 99=100\cdot(10099-99)=100\cdot 10000=1000000.$$

c) Tudjuk, hogy az első 100 sorban összesen 5050 páratlan szám van, így ezeknek kell venni az összegét: $1+3+5+7+9+\cdots+10099$. Adjunk mindegyik taghoz egyet, amit a végén vonjunk is ki:

$$2+4+6+8+\cdots+10100-5050=2\cdot(1+2+3+4+\cdots+5050)-5050=$$

$$=2\cdot\frac{(1+5050)\cdot 5050}{2}-5050=5050+5050\cdot 5050-5050=5050\cdot 5050=25502500.$$

10. évfolyam

1. Határozzuk meg azokat a természetes számokat, amelyek négyzetének a végződése ugyanaz a kétjegyű szám, mint magának az eredeti számnak?

Megoldás. Ha a feltételek teljesülnek, akkor $100 \mid (a^2 - a)$ azaz $a \cdot (a-1) = 100k = 4 \cdot 25 \cdot k$. Mivel $(a, a-1) = 1$, ezért $25 \mid a$ és $4 \mid (a-1)$, vagy $25 \mid (a-1)$ és $4 \mid a$, vagy $100 \mid a$, illetve $100 \mid (a-1)$.
Az első esetben az a szám végződése 00, 25, 50 vagy 75 lehet, de ezek közül csak a 25-tel végződőek felelnek meg.
A második esetben az $a-1$ szám végződése 00, 25, 50 vagy 75 lehet, de ezekből csak azok felelnek meg, amikor $a-1$ szám 75-re végződik, azaz az a szám végződése 76.
A harmadik esetben a 00-re végződőek felelnek meg.
A negyedik esetben a 01-re végződőek felelnek meg.

2. Hány megoldása van az egyenletrendszernek a valós számnégyesek halmazában és melyek ezek?

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 50,$$
$$x^2 - y^2 + z^2 - t^2 = -40,$$
$$xy - zt = 0,$$
$$x - y + z + t = 0.$$

Megoldás. Az utolsó két egyenlet alapján két eset lehetséges $xy = zt = 0$ vagy $xy = zt \neq 0$.
Az első esetben $x = 0$ vagy $y = 0$ és $z = 0$ vagy $t = 0$ lehetséges, de ez az első egyenletet nem elégíti ki. Így tehát csak a második esetre kaphatunk megoldást azaz $xy = zt \neq 0$, vagyis $\frac{x}{t} = \frac{z}{y}$, vagyis $t = kx$ és $y = kz$, ahol k nem 0 valós szám. Az egyenletrendszer pedig

$$\begin{aligned} x^2 + k^2z^2 + z^2 + k^2x^2 &= 50, & & (1+k^2)(x^2+z^2) = 50,\\ x^2 - k^2z^2 + z^2 - k^2x^2 &= -40, & \text{tehát } & (1-k^2)(x^2+z^2) = -40,\\ x - kz + z + kx &= 0, & & (1+k)x + (1-k)z = 0. \end{aligned}$$

A második és első egyenlet hányadosa $\frac{1-k^2}{1+k^2} = -\frac{4}{5}$ és ebből $k = -3$ vagy $k = 3$. Ha $k = 3$, akkor $z = 2x$, $t = 3x$, $y = 3z = 6x$ és ezeket az első egyenletbe helyettesítve adódik, hogy $x^2 = 1$. Hasonlóan, ha $k = -3$, akkor $z = \frac{x}{2}$, $t = -3x$, $y = -3z = -\frac{3}{2}x$ és ezeket az első egyenletbe helyettesítve adódik, hogy $x^2 = 4$. A megoldáshalmaz így négy számnégyest tartalmaz és ezek a következők:

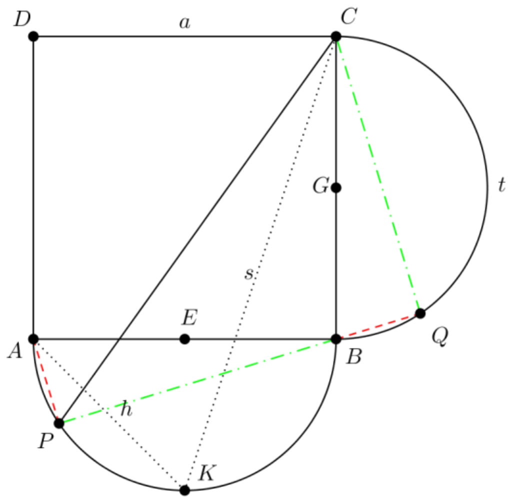
$$(1, 6, 2, 3), (-1, -6, -2, -3), (2, -3, 1, -6), (-2, 3, -1, 6).$$

3. Az $ABCD$ négyzet AB oldala felett kifelé félkört szerkesztünk. Ezen a félkörön melyik az a P pont, amelyre az $AP^2 + CP^2$ a lehető legnagyobb és mennyi a maximum értéke?

Megoldás. A négyzet oldala legyen a hosszúságú és szerkesszünk a BC oldal felett is félkört. Az AB átmérőjű félkör ívén felveszünk egy tetszőleges P pontot és összekötjük a B ponttal. Ez az egyenes Q pontban metszi a BC átmérőjű ívet. Mivel a BQC szög derékszög és $AP = BQ = x$, valamint $BP = CQ = y$, ezért $PC^2 = (x+y)^2 + y^2 = x^2 + 2y^2 + 2xy$.

Ennek alapján adódik, hogy $AP^2 + PC^2 = 2\left(x^2 + y^2 + xy\right) = 2\left(a^2 + xy\right)$.

Mivel $x^2 + y^2 = a^2$ konstans, az xy szorzat pedig akkor maximális ha egyenlők a tényezők, azaz $x = y = \frac{a}{\sqrt{2}}$, vagyis a P pont az AB ív felezőpontja, ezért $AP^2 + PC^2$ maximális értéke $3a^2$.



4. A táblára felírunk 2019 **nullát,** 2020 **egyest és** 2021 **kettes számjegyet. Minden alkalommal két különböző számjegyet törlünk és helyettük a** 0**,** 1**,** 2 **számjegy közül azt az egy számjegyet írjuk, amely abban a lépésben nem került letörlésre.**
a) Bizonyos lépés után maradhat-e csupa nulla sorozat?
b) Amikor a táblán csak egy számjegy maradt, akkor melyik számjegyek lehetnek azok?

Megoldás. Legyen $a_0 = 2019$, $b_0 = 2020$, $c_0 = 2021$. Az a_n, b_n, c_n jelölik rendre az n-edik lépés utáni 0, 1, illetve 2-es számjegyek számát és ezek minden lépésben változnak. A kezdő adatok alapján a 0 és a 2-esek száma azonos paritásúak és az egyesek számának paritása pedig nem egyezik meg ezzel.
a) Feltételezzük, hogy n lépés után csak nullák maradtak a táblán, azaz $b_n = 0 = c_n$, de ez az előbbi paritás vizsgálattal ellentmondó.
b) Ha az n lépés után egy számjegy maradt a táblán, akkor az a_n, b_n, c_n közül kettő nulla és ezek tehát azonos paritásúak, így a $b_n = 1$, tehát az 1 számjegy maradt a táblán.

11. évfolyam

1. Határozd meg az összes olyan n természetes számot, amelyre érvényes, hogy $n+1$, $n+3$, $n+7$, $n+9$, $n+13$ és $n+15$ mindegyike prímszám!

Megoldás. Kezdőhelyzetben $n=4$ az egyetlen megoldás, ekkor 5, 7, 11, 13, 17, 19 mindegyike prímszám.
Vizsgáljuk ki n szám öttel való maradékosztályait: 0, 1, 2, 3, 4. Ekkor egyiknek öttel kell oszthatónak lennie, de mivel prímszám, tehát éppen öt, akkor $n+1=5$, vagyis $n=4$. $n=2$-re $n+7=9$ nem prímszám.

2. Oldd meg az egyenletet: $\dfrac{\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x}{3\sin x+\cos 2x}=\operatorname{ctg}2x$

Megoldás. Végezzük el a következő átalakításokat: $\operatorname{tg} x=\dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}$ és $\operatorname{tg}2x=\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$.
Ekkor az adott egyenlet így alakul át:

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x\cdot(3\sin x+\cos 2x)}=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x}.$$

Ebből adódik, hogy $1-\operatorname{tg}^2 x=0$ vagy $3\sin x+\cos 2x=2$ és $\operatorname{tg} x\neq 0$.

1.eset: $1-\operatorname{tg}^2 x=0$

$$\operatorname{tg} x=\pm 1$$

$$x=\frac{\pi}{4}+k\pi \quad\vee\quad x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\quad k\in Z.$$

2.eset: $3\sin x+\cos 2x=2$

$$3\sin x+\cos^2 x-\sin^2 x=2$$

$$3\sin x+1-2\sin^2 x=2$$

$$2\sin^2 x-3\sin x+1=0$$

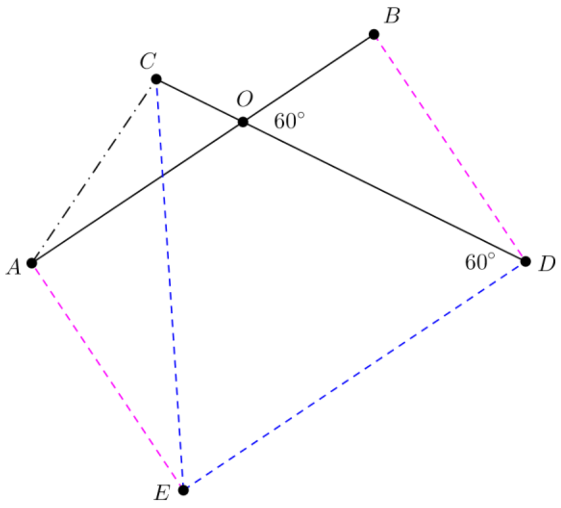
$$\sin x=1 \quad\vee\quad \sin x=\frac{1}{2}.$$

Ha $\sin x=1$, akkor $\operatorname{tg} x=0$, de ez lehetetlen.
Ha $\sin x=\dfrac{1}{2}$, akkor $x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \quad\vee\quad x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi,\quad k\in Z$.
Megoldáshalmaz:

$$M=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,-\frac{\pi}{4}+n\pi,\ \frac{\pi}{6}+2l\pi,\ \frac{5\pi}{6}+2m\pi \mid k\in Z,n\in Z,l\in Z,m\in Z\right\}$$

3. Legyenek AB és CD olyan 1 hosszúságú szakaszok, amelyek az O pontban metszik egymást úgy, hogy $AOC\angle=\dfrac{\pi}{3}$. Bizonyítsd be, hogy $AC+BD\geq 1$.

Megoldás. Az adott elemekhez válasszuk E pontot úgy, hogy CDE háromszög szabályos legyen, és az A és E pontok a CD egyenes ugyanazon oldalán vannak. Ekkor $CDE\angle = COA\angle = \frac{\pi}{3}$, ezért AB párhuzamos ED egyenessel.



Mivel $AB = ED$, ezért $ABDE$ paralelogramma, s akkor $AE = BD$.
Alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget az ACE háromszögre:

$$1 = CE \le AC + AE = AC + BD,$$

s így megkapjuk, amit bizonyítani kellett.

4. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\left(x^2+x+3\right)\left(x^2+3x+3\right)=3x^2$$

Megoldás. Az egyenlet bal oldalát átalakíthatjuk:

$$\left(x^2+x+3\right)\left(x^2+3x+3\right)=\left(x^2+2x+3-x\right)\left(x^2+2x+3+x\right)=\left(x^2+2x+3\right)^2-x^2.$$

Az egyenlet felírható az alábbi alakban:

$$\left(x^2+2x+3\right)^2-x^2=3x^2$$

$$\left(x^2+2x+3\right)^2=4x^2$$

$$\left(x^2+2x+3\right)=2x \text{ vagy } \left(x^2+2x+3\right)=-2x$$

Az első egyenlenek nincs valós megoldása, mert $x^2=-3$.
a második egyenletben $x^2+4x+3=0$ megoldásai $x_1=-3,\ x_2=-1$.
Ezek szerint a megoldáshalmaz:

$$M=\{-1,-3\}.$$

12. évfolyam

1. Bizonyítsd be, hogy minden x valós számra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$x^4+7x^2+2>4x^3+2x.$$

Megoldás. Rendezéssel a következőket kapjuk:

$$x^4+7x^2+2>4x^3+2x$$

akkor és csakis akkor ha

$$x^4-4x^3+7x^2-2x+2>0,$$

azaz

$$x^4-4x^3+6x^2-4x+1+x^2+2x+1=(x-1)^4+(x+1)^2>0,$$

ahol mindig érvényes a szigorú egyenlőtlenség, hiszen a kapott negyedik hatvány és négyzet sosem egyenlőek egyszerre 0-val.

2. Egy derékszögű háromszög befogói fölé kívülről négyzeteket rajzoltunk. Mutasd meg, hogy a háromszög köré írható köre átmegy a négyzetek legtávolabbi csúcsait összekötő szakasz felezőpontján.

Megoldás. Legyen adott a derékszögű ABC háromszög, ahol a C csúcsnál lévő szög derékszög. Legyen a k kör a háromszög köré írható köre. Legyenek $CBEF$ és $ACGH$ az említett négyzetek, legyen az I pont az EH szakasz felezőpontja, valamint legyen a J pont a C pont tükörképe a k kör középpontjához viszonyítva. Könnyen belátható, hogy a $CIJ\angle$ derékszög, valamint, hogy a $JEH\angle$ és a $JHE\angle$ nagysága $45°$. Innen következik, hogy a JEH háromszög egyenlő szárú, amelyben a JI nem csak magasság, hanem egyben súlyvonal is.

3. Jelölje $s(n)$ az n természetes szám számjegyeinek szorzatát. Létezik-e olyan n amelyre $s(n)=n^2-21n-40$?

Megoldás. Mivel az $n^2-21n-40$ másodfokú függvénynek két nullahelye van, amelyek közül az egyik negatív, a másik pedig egy 22 és 23 közötti szám, megállapíthatjuk, hogy $n\geq 23$. Ugyanakkor, mivel minden n természetes számra teljesül, hogy $s(n)\leq n$, megállapíthatjuk, hogy $n^2-21n-40\leq n$, azaz $n^2-22n-40\leq 0$. Innen következik viszont, hogy $n\leq 23$. Azaz, az egyedüli lehetséges megoldás az $n=23$, amelyre valóban teljesülnek a feladat feltételei.

4. Határozd meg a 7^{2020} szám utolsó 4 számjegyét!

Megoldás. Vegyük észre, hogy $7^4=2401$. Érvényes a következő egyenlőség:

$$7^{2020}=\left(7^4\right)^{505}=2401^{505}=(1+2400)^{505}=1+505\cdot 1\cdot 2400+\binom{505}{2}\cdot 1\cdot 5760000+\ldots$$

Vegyük észre, hogy az utolsó kiírt tag, valamint az őt követő összes tag mindig legalább 4 nullára végződik, azaz nincsenek kihatással a keresett szám négyjegyű végződésére. A keresett négyjegyű végződés tehát megegyezik az $1+505\cdot 1\cdot 2400$ szám négyjegyű végződésével, amely 2001.

A XVIII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

5. évfolyam
1. Nagy Martina, Sonja Marinkovic Általános Iskola, Szentmihály, **I. díj**
2. Živanac Léna, Cofman Iskola, Szabadka, **I. díj**
3. Nyilas Zsófia, Arany János Általános Iskola, Oromhegyes, **II. díj**
4. Földi Krizsán Kitty, Ady Endre Kísérleti Általános Iskola, Kishegyes, **II díj**
5. Mészáros Máté, Jovan Jovanović Zmaj Általános Iskola, Magyarkanizsa **III. díj**
6. Szabó Sándor, Stevan Sremac Általános Iskola, Zenta, **III. díj**

6. évfolyam
1. Zsivanac Beren, Petőfi Sándor Általános Iskola, Újvidék, **I. díj**
2. Keresztényi Albert, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **II. díj**
3. Kadvány Júlia, Október 18. Általános Iskola, Zentagunaras, **III. díj**
4. Papp Szabolcs, Kókai Imre Általános Iskola, Temerin, **III. díj**

7. évfolyam
1. Csanádi Petra, Jovan Jovanović Zmaj Általános Iskola, Magyarkanizsa, **I. díj**
2. Horváth Noémi, Dózsa György Általános Iskola, Gunaras, **II. díj**
3. Ristić Anna, Jovan Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék, **II. díj**
4. Csiszár Ákos, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **II. díj**
5. Gordos Beáta, Cseh Károly Általános Iskola, Ada, **III. díj**
6. Kis Botond, Jovan Jovanović Zmaj Általános Iskola, Magyarkanizsa, **III. díj**

8. évfolyam
1. Dobó Ármin, Jovan Mikić Általános Iskola/Cofman Iskola, Szabadka, **I. díj**
2. Fekecs Csaba, Október 18. Általános Iskola, Zentagunaras, **I. díj**
3. Buják Réka, József Attila Általános Iskola, Kupuszina, **II. díj**
4. Kratok Bence, Csáki Lajos Általános Iskola, Topolya, **III. díj**

9. évfolyam
1. Lapis Dávid, Óbecsei Gimnázium, Óbecse, **I. díj**
2. Erdélyi Nimród, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
3. Szabó Dorina, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
4. Fajka Zsóka, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

10. évfolyam
1. Kőműves Emese, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Somogyi Ákos, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Nagygyörgy Zsóka, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Nagy Albert, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
5. Hajagos Orsolya, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

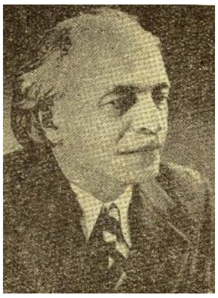
11. évfolyam
1. Gál József, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Nagy Daniella, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Apró Dorottya, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

12. évfolyam

1. Csíkos Enikő, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Molnár Dávid, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Fábián Viktor, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **III. díj**

A XIX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

A járványhelyzet miatt kialakult nehéz körülmények ellenére is sikerült megszerveznünk a versenyt.



XIX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2021. december 4.

5. évfolyam

1. Hogyan lehet egy négyzetet 10 kisebb négyzetre darabolni? Keress 3 különböző megoldást!

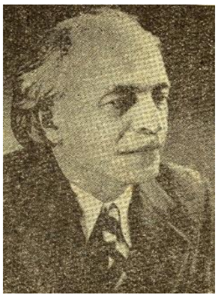
2. Egy 15 számjegyből álló számra a következő állítások igazak:
a) Bármely négy szomszédos számjegy összege 15.
b) Az összes számjegy összege 58.
c) A második számjegy 3-as, a 13. számjegy 4-es.
Írd fel a 15-jegyű számot!

3. Egy számokból álló sorozat következő elemét úgy kapjuk, hogy ha az előtte levő elem páratlan, akkor hozzáadunk ötöt, ha pedig páros, akkor elosztjuk kettővel.
a) Ha a sorozat első eleme a 7, akkor sorold fel a sorozat első 10 elemét!
b) Mi lesz a sorozat 2021. eleme?

4. Egy 5 literes és egy 8 literes edény segítségével hogyan lehet kimérni pontosan 1 liter vizet? (A méréshez rendelkezésünkre áll sok víz. Az edényeken nincs semmilyen beosztás, és az alakjuk is szabálytalan. Az edényeken kívül más mérőeszköz nem használható.)

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



XIX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2021. december 4.

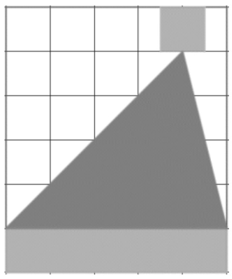
6. évfolyam

1. Mihály a lehető legnagyobb kerületű csokoládéháromszöggel szeretné meglepni testvérét idén karácsonykor. A háromszögről tudjuk, hogy az egyenlő szárú, valamint azt, hogy oldalai rendre $12x-5$, $6x+19$ és $3x+67$ mm hosszúságúak. Határozd meg a háromszög oldalainak hosszát, úgy hogy a háromszög kerülete maximális legyen!

2. Mikulás bácsi olyan régen használta már telefonját, hogy elfelejtette annak feloldó kódját. Segíts neki megtalálni a lehetséges kombinációkat, ha a kódról tudjuk, hogy egy olyan valódi négyjegyű szám, amelyre igaz, hogy minden számjegye különböző, a szám osztható néggyel, első és utolsó számjegyének összege 8, középső két számjegyének összege pedig 7.
Határozd meg az összes lehetséges kódot, amit a Mikulásnak érdemes kipróbálnia, azaz a feltételnek megfelel!
(A Mikulás többször is próbálkozhat, mint 3 lehetőség, hiszen csak feloldó kódot kerestünk.)

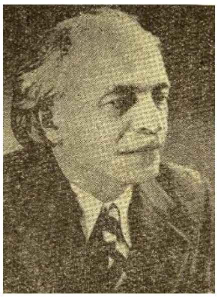
3. Misi várakozás közben nagyon unatkozott és elkezdett azon gondolkodni, hogy mi lenne, ha tenne egy lépést hátra, majd további 2 lépést hátra, utána 3 lépést előre, majd még 4 lépést előre, azután 5 lépést hátra, és még 6 lépést hátra, ezután 7-et előre, majd 8-at előre és így tovább egészen a 2021. lépésig.
Készíts egy matematikai modellt Misi lépéseinek követésére (figyelj, hogy az első néhány és az utolsó néhány lépés is szerepeljen a modellben), s határozd meg, hogy ezzel a módszerrel a 2021. lépés után Misi mennyit haladt előre!

4. Mekkora az ábrán látható Mikulás sapka (satírozott rész) területe, ha tudjuk, hogy a sapkát körülvevő téglalap kerülete 220 egység és az egyik oldal $10\,cm$-el hosszabb a másik oldalnál?



A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



XIX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2021. december 4.

7. évfolyam

1. Egy 3×3-as négyzet alakú táblázat mindegyik mezőjébe -2 vagy 1 értéket írtak. Ezután összeadták soronként is, oszloponként is a számokat. Igazold, hogy az így kapott 6 szám között biztosan van legalább két egyenlő!

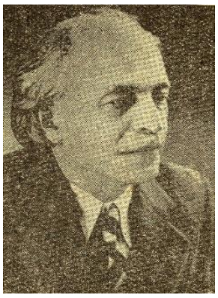
2. Az ABC háromszög C csúcsnál lévő szöge $45°$-os. Jelöld H-val a háromszög magasságpontját! Bizonyítsd be, hogy a $CH = AB$ egyenlőség teljesül!

3. Egy számsorozat első és második eleme is 1-gyel egyenlő. A második elemtől kezdve a sorozat bármely eleme két szomszédjának szorzatánál 1-gyel kisebb. Mennyi a sorozat első 2021 elemének összege?

4. Adott egy $13\,cm$ oldalhosszúságú négyzet. Ezt a négyzetet kell letakarni 5 db téglalappal, amelyek:
a) oldalainak hossza cm-ben mérve egész szám;
b) az oldalhosszak között $1\,cm$ és $10\,cm$ között minden lehetséges hossz pontosan egyszer szerepel;
c) a téglalapok nem lóghatnak le a négyzetről és részlegesen sem fedhetik egymást.
Ábrázold a megoldást!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



XIX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2021. december 4.

8. évfolyam

**1. Andor és Bella egy osztályba járnak és a következőket állítják.
Andor: Ötször annyi lány osztálytársam van, mint fiú.
Bella: Osztálytársaim között négyszer annyi a lány, mint a fiú.
Hányan járnak az osztályba?**

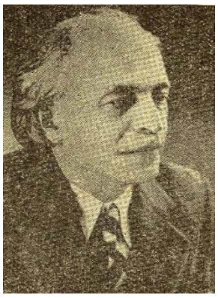
2. Tükrözzük az $ABCD$ téglalapot a BD átlójára. A tükrözés után $AC' = AD = BC'$, ahol C' a C pont tükörképe. Határozd meg a téglalap területének nagyságát, ha ismert, hogy $AB = 4\sqrt{3}$ cm hosszú!

**3. Egy bűvész kalapjában 11 fehér és 22 szürke nyuszi van. A színpadon van még egy egész kosár szürke nyuszi. A mutatvány lényege, hogy a bűvész kettesével húzgálja ki a nyuszikat a kalapból (nem néz a kalapba). A következő 3 eset lehetséges:
a) ha mindkettő nyuszi szürke, akkor az egyiket visszateszi a kalapba, a másikat futni hagyja a színpadon;
b) ha a két nyuszi különböző színű, akkor a fehér nyuszi megy vissza a kalapba, a szürke futkározhat;
c) ha két fehér nyuszit húzott ki, akkor mindkettőt elengedi a színpadon és helyettük betesz egy szürke nyuszit.
Addig folytatja a nyuszik kihúzását, míg a kalapban csak egy nyuszi marad (minden húzás után eggyel kevesebb nyuszi lesz a kalapban, ezért ez biztosan bekövetkezik). Ha ügyes vagy, te már tudod, hogy ez az utolsó nyuszi milyen színű.
Írd le a választ és indokold is!**

4. Egy 30 feladatból álló tesztversenyen a helyes válaszért 5 pont jár, a rossz válaszért pedig 2 pontot levonnak. Ha valaki nem válaszol egy kérdésre, akkor arra 0 pontot kap. A verseny első helyezettje 109 pontot ért el. Hány kérdésre nem válaszolt a győztes?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



XIX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2021. december 3.

9. évfolyam

1. Felírtuk a táblára a természetes számokat 1-től 10-ig. Egy lépésben kiválasztunk két számot, és elosztjuk őket egymással úgy, hogy a hányados legalább 1 legyen. A két kiválasztott számot letöröljük, és helyette felírjuk a hányados egész részét. (Például $7:2=3{,}5$, a 7-est és a 2-est letöröljük, és fölírjuk a 3-ast.) Legfeljebb mekkora lehet az utolsónak megmaradt szám?

2. Ha összeadjuk két egész szám összegét, különbségét, szorzatát és hányadosát, eredményül 500-at kapunk. Melyik lehet ez a két szám?

3. Legyen K, L, M és N pont rendre az $ABCD$ tetszőleges négyszög AB, BC, CD és DA oldalának felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy a KM és LN szakaszok P metszéspontja egyben mindkét szakasznak felezőpontja is!

4. Hányféleképpen lehet kiszínezni négy színnel az $ABCDE$ szabályos ötszög csúcsait, ha két szomszédos csúcs nem lehet azonos színű? (Két színezés különbözőnek számít, ha van olyan csúcs, amelyik színe különbözik a két színezésben.)

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

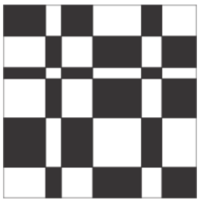
XIX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2021. december 3.

<u>10. évfolyam</u>

1. Hány olyan pozitív egész szám van, amelyre igaz, hogy a számjegyeinek összege és szorzata is egyaránt 24?

2. Határozd meg az összes olyan x, y pozitív egész számot, amelyekre $5^x - 3^y = 16$.

3. Egy négyzetet az oldalaival párhuzamos egyenesekkel téglalapokra osztottunk. Ezeket a téglalapokat sakktáblaszerűen feketére és fehérre színeztünk. Kiderült, hogy a fekete téglalapok összterülete megegyezik a fehér téglalapokéval. Bizonyítsd be, hogy a fekete téglalapok átrendezhetők úgy, hogy együtt egy téglalapot alkossanak!



4. Adottak a síkban az ABC és ACO szabályos háromszögek. Tekintsük azt az O középpontú kört, amely áthalad az A és C pontokon. Bizonyítsd be, hogy e kör bármely M pontjára érvényes a következő összefüggés: $MA^2 + MC^2 = MB^2$.

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XIX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2021. december 3.

11. évfolyam

1. Ötfaluban a telefonszámok ötjegyűek és az első számjegy nem lehet nulla. *Menőnek* tartják azokat a számokat, amelyeknek jegyei csökkenő vagy növekvő sorrendben következnek egymás után. (Így például az 12459 **menő szám, de az** 11234 **és az** 10345 **nem azok. Határozd meg az összes ötfalui menő telefonszámok számát!**

2. Legyen BH az ABC háromszög magasságvonala. A k kör középpontja a BH szakaszon van és tartalmazza a B és C csúcsokat, valamint ez a kör metszi az AB szakaszt az E pontban, $E \neq B$. Ha az AB szakasz hossza 16, a BC szakasz hossza 12, határozd meg az AE szakasz hosszát!

3. Adott az $4x^2-(3a+1)x-a-2=0$ egyenlet. Határozd meg az $a \in \mathbb{R}$ minden olyan értékét, amelyre az adott egyenlet x_1 és x_2 megoldásaira (gyökeire) érvényes, hogy $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2} \geq \frac{40}{9}$. Milyen $a \in \mathbb{R}$ értékekre lesz az egyenlet mindkét megoldása (gyöke) a $(-1,\ 2)$ intervallumban?

4. Oldd meg a $\sin x+\cos x+\sin x \cdot \cos x=1$ egyenletet!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XIX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2021. december 3.

12. évfolyam

1. Két egymást követő prímszámot ikerprímeknek nevezünk, ha a közöttük levő különbség 2. Határozd meg az összes olyan a és b ikerprímeket, $a<b$, amelyekre teljesül, hogy az $ab+1$ szám számjegyeinek összege 7.

2. Oldd meg a következő egyenletet az egész számok halmazában: $2021x^2 = 12y^2 + 4z^2$.

3. Adott az $ABCD$ trapéz. A trapéz alapjaira kívülről egy-egy téglalapot rajzolunk, amelyek egybevágóak, a trapéz száraira pedig szintén kívülről négyzetet rajzolunk. Bizonyítsd be, hogy ezeknek a téglalapoknak és négyzeteknek a középpontjai egy újabb négyzetet határoznak meg.

4. Adott az $X = \{1, 2, ..., n\}$ halmaz. Legyen $F = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ olyan halmaz, amelyre minden $i = 1, 2, ..., m$ esetén $A_i \subseteq X$, valamint minden $1 \le i < j \le m$ esetén $A_i \cap A_j \le 2$. Határozd meg az m legnagyobb lehetséges értékét!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

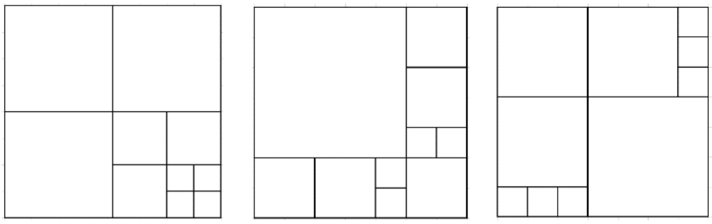
Jó munkát!

A XIX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

5. évfolyam

1. Hogyan lehet egy négyzetet 10 **kisebb négyzetre darabolni? Keress** 3 **különböző megoldást!**

Megoldás. (Létezik még néhány különböző megoldás.)



2. Egy 15 **számjegyből álló számra a következő állítások igazak:**
a) Bármely négy szomszédos számjegy összege 15**.**
b) Az összes számjegy összege 58**.**
c) A második számjegy 3**-as, a** 13**. számjegy** 4**-es.**
Írd fel a 15**-jegyű számot!**

Megoldás. Ha bármely 4 szomszédos számjegy összege 15, akkor, ha az első négy számjegy $abcd$, akkor a következőnek a-nak kell lenni (mert a $b+c+d$ -t ez egészíti ki 15-re), és a folytatásban ugyanezen az elven a számjegyek ismétlődni fognak.
Tehát a szám alakja: $abcdabcdabcdabc$.
Mivel az $abcd$ számjegyek összege 15, ezért az abc számjegyek összege $58-3\cdot 15=13$, így $d=2$.
A c) feltételből $b=3$ és $a=4$, tehát a még hiányzó számjegy $c=6$.
Így a 15-jegyű szám a: 436243624362436.

3. Egy számokból álló sorozat következő elemét úgy kapjuk, hogy ha az előtte levő elem páratlan, akkor hozzáadunk ötöt, ha pedig páros, akkor elosztjuk kettővel.
a) Ha a sorozat első eleme a 7**, akkor sorold fel a sorozat első** 10 **elemét!**
b) Mi lesz a sorozat 2021**. eleme?**

Megoldás. Ha az első elem a 7, amely páratlan, akkor a 2. elem a 12, majd a 3. a 6, és így tovább…
a) 7, 12, 6, 3, 8, 4, 2, 1, 6, 3.
b) A nyolcadik elemtől hatosával ismétlődnek a számok. Így a 2021. tagja a sorozatnak a 8 szám lesz, hiszen, ha az első két elemet elvesszük, akkor az ismétlődő elemeknél a 2019. számot keressük. $2019:6=336$, és a maradék 3.

4. Egy 5 **literes és egy** 8 **literes edény segítségével hogyan lehet kimérni pontosan** 1 **liter vizet? (A méréshez rendelkezésünkre áll sok víz. Az edényeken nincs semmilyen beosztás, és az alakjuk is szabálytalan. Az edényeken kívül más mérőeszköz nem használható.)**

Megoldás. Öntsük tele a 8 literes edényt, majd öntsük tele ezzel a vízzel az 5 literest, amit utána ürítsünk ki. Ekkor a 8 literes edényben marad 3 liter víz. Ezt öntsük át az 5 literesbe, töltsük tele újra a 8 literest, és töltsük tele belőle az 5 literest (2 litert öntünk bele). Így a 8 literes edényben 6 liter víz marad. Az 5 literest ürítsük ki, majd töltsük tele a 8 literesből, így a 8 literes edényben 1 liter víz marad. A táblázat mutatja, hogy az egyes lépések után melyik edényben mennyi víz van.

5 literes	0	0	5	0	3	3	5	0	5
8 literes	0	8	3	3	0	8	6	6	1

6. évfolyam

1. Mihály a lehető legnagyobb kerületű csokoládéháromszöggel szeretné meglepni testvérét idén karácsonykor. A háromszögről tudjuk, hogy az egyenlő szárú, valamint azt, hogy oldalai rendre $12x-5$, $6x+19$ és $3x+67$ mm hosszúságúak. Határozd meg a háromszög oldalainak hosszát, úgy hogy a háromszög kerülete maximális legyen!

Megoldás. Mivel a feladat nem írja elő, hogy melyik két szár egyenlő, így meg kell nézni minden esetet.

I. eset: $12x-5=6x+19$

$6x=24$

$x=4$

Így az oldalak 43, 43, 79 mm hosszúságúak, a kerület pedig $K=79+43+43=165\ mm$.

II. eset: $12x-5=3x+67$

$9x=72$

$x=8$

Így az oldalak 91, 91, 67 mm hosszúságúak, a kerület pedig $K=91+91+67=249\ mm$.

III. eset: $6x+19=3x+67$

$3x=48$

$x=16$

Az oldalak 115, 115, 187 mm hosszúságúak, a kerület pedig $K=115+115+187=417\ mm$.

A három eset kivizsgálásából láthatjuk, hogy a legnagyobb kerületet a 115, 115, 187 oldalú háromszög adja meg, már csak annyi a dolgunk, hogy leellenőrizzük létezik e ilyen háromszög.

A háromszögegyenlőtlenség $115+115>187$ alátámasztja, hogy lézető eset.

2. Mikulás bácsi olyan régen használta már telefonját, hogy elfelejtette annak feloldó kódját. Segíts neki megtalálni a lehetséges kombinációkat, ha a kódról tudjuk, hogy egy olyan valódi négyjegyű szám, amelyre igaz, hogy minden számjegye különböző, a szám osztható néggyel, első és utolsó számjegyének összege 8, középső két számjegyének összege pedig 7.

Határozd meg az összes lehetséges kódot, amit a Mikulásnak érdemes kipróbálnia, azaz a feltételnek megfelel!

(A Mikulás többször is próbálkozhat, mint 3 lehetőség, hiszen csak feloldó kódot kerestünk.)

Megoldás. Mivel a szám 4-gyel osztható kell, hogy legyen, így vizsgálhatjuk a szám végződéseit (20, 40, 60, 12, 32, 52, 72, 92, 04, 24, 44, 64, 84, 16, 36, 56, 76, 96, 08, 28, 48, 68, 88), tehát az utolsó számjegy lehet 0, 2, 4, 6, 8.

Mivel az első és az utolsó számjegy összege 8-at kell, hogy adjon így a 8 nem állhat az utolsó helyen, hiszen akkor az első helyre 0 kerülne, akkor pedig nem lenne 4 jegyű a szám. A 4-est is kizárhatjuk az utolsó számjegy helyéről, hiszen $4+4$ esetében a számjegyek ismétlődnének, ami nem megengedett.

Szűkítettük a lehetséges eseteket az utolsó számjegy helyére, mégpedig 0, 2, 6 esetekre.

Az $abcd$ szám esetén, ha

1) $d=0$, akkor a feltételek szerint $a=8$, valamint $c=4$, ahonnan $b=3$ vagy $c=2$, ahonnan $b=5$, vagy $c=6$, ahonnan $b=1$, tehát a kód lehet 8340, 8520 vagy 8160.

2) $d=2$, akkor a feltételek szerint $a=6$, valamint $c=1$, ahonnan $b=6$, ami nem jó, hiszen a 6-os ismétlődik vagy $c=3$, ahonnan $b=4$ vagy $c=5$, ahonnan $b=2$, ami nem jó, hiszen a 2-es ismétlődik vagy $c=7$, ahonnan $b=0$. A lehetséges kombinációk 6432 és 6072.

3) $d=6$, akkor a feltételek szerint $a=2$, valamint $c=1$, ahonnan $b=6$, ami nem jó, hiszen a 6-os ismétlődik vagy $c=3$, ahonnan $b=4$ vagy $c=5$, ahonnan $b=2$, ami nem jó, hiszen a 2-es ismétlődik vagy $c=7$, ahonnan $b=0$. A lehetséges kombinációk 2436 és 2076.

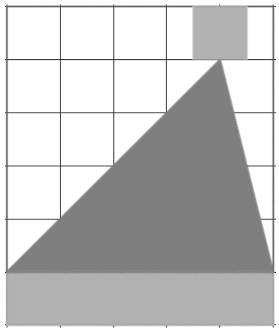
3. Misi várakozás közben nagyon unatkozott és elkezdett azon gondolkodni, hogy mi lenne, ha tenne egy lépést hátra, majd további 2 lépést hátra, utána 3 lépést előre, majd még 4 lépést előre, azután 5 lépést hátra, és még 6 lépést hátra, ezután 7-et előre, majd 8-at előre és így tovább egészen a 2021. lépésig. Készíts egy matematikai modellt Misi lépéseinek követésére (figyelj, hogy az első néhány és az utolsó néhány lépés is szerepeljen a modellben), s határozd meg, hogy ezzel a módszerrel a 2021. lépés után Misi mennyit haladt előre!

Megoldás. Kísérjük Misi lépéseit előjeles számokkal, a $-$ hátra, a $+$ előre. Észrevehetjük, hogy két egymást követő lépést megy hátra, majd a két rákövetkezőt pedig előre, ez egy négyes ciklust jelent Misi lépéssorozatában, így meg tudjuk állapítani az utolsó lépések irányát is. $2021=2020+1=505\cdot 4+1$, azaz a 2021. lépést hátra teszi meg. A kapott modell pedig a következő:

$$-1-2+3+4-5-6+7+8-9-10+11+12-\cdots-2017-2018+2019+2020-2021$$

Nincs más dolgunk, mint összeadni ezt a 2021 darab különböző számot. Vizsgáljuk a felfedezett 4-es ciklusokat, azaz $-1-2+3+4=4$, ahogyan a $-5-6+7+8=4$. Észrevehetjük, hogy minden négyes blokk összege pontosan 4. 505 darab ilyen blokkunk van, ami azt jelenti, hogy $505\cdot 4=2020$. Ebből a 2020-ból még ki kell vonni a 2021-et, így a lépéssorozat összegeként -1-et kapunk. Azaz Misi egy ilyen játékos menetelés során mindössze egy lépést haladt volna hátra kiindulópontjához képest.

4. Mekkora az ábrán látható Mikulás sapka (satírozott rész) területe, ha tudjuk, hogy a sapkát körülvevő téglalap kerülete 220 egység és az egyik oldal $10\,cm$-el hosszabb a másik oldalnál?



Megoldás. Először is számoljuk ki a téglalap oldalainak hosszát.

$K=2(a+b)$ kihasználva az oldalak közötti összefüggést:

$K=2(a+a+10)$ behelyettesítve az ismert értéket kapjuk, hogy:

$220=4a+20$ ahonnan

$4a=200$ azaz

$a=50$ egység.

Megkaptuk, hogy az egyik oldal 50 egység, a másik oldal pedig 60 egységnyi hosszú. A kapott adatokat bejelölhetjük az ábrán, egyértelmű, hogy a rövidebbik oldal a téglalap alapja, a hosszabbik pedig a magassága. Megvizsgálva a segédhálót, egyértelműen megállapítható, hogy egy kis négyzetrács oldala 10 egységnek felel meg. Ettől kezdve már nagyon könnyű dolgunk lesz, a sapka alsó része 5 db kis négyzetből áll, így ennek a területe $5 \cdot 100 = 500$ egységnégyzet. A bojt is egyértelmű, hiszen éppen egy négyzetnyi, melynek területe 100 egységnégyzet. A háromszög területét is könnyedén kiszámolhatjuk akkor is, ha a háromszög területszámítási módját még nem ismerjük. Szedjük szét két darab háromszögre, melynek területei éppen egy 4 négyzetnyi téglalap fele, illetve egy $4 \cdot 4 = 16$-os négyzet fele. Ezek területe rendre $\frac{4 \cdot 100}{2} = 200$ és $\frac{16 \cdot 100}{2} = 800$ egységnégyzet. A sapka területe pedig a vizsgált részek területének összege, azaz $500 + 100 + 200 + 800 = 1600$ egységnégyzet.

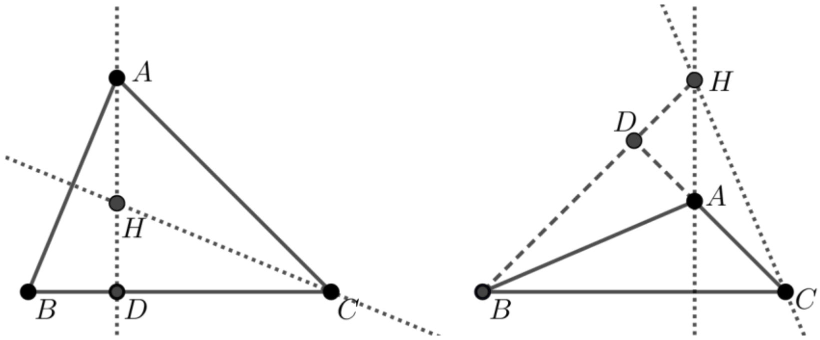
7. évfolyam

1. Egy 3×3-as négyzet alakú táblázat mindegyik mezőjébe -2 vagy 1 értéket írtak. Ezután összeadták soronként is, oszloponként is a számokat. Igazold, hogy az így kapott 6 szám között biztosan van legalább két egyenlő!

Megoldás. Soronként és oszloponként is 3-3 szám kerül a táblázatba. Az összeg szempontjából a sorrend lényegtelen, ezért négyféle elrendezés lehetséges:
a) nincs egyes: ebben az esetben az összeg $-2+(-2)+(-2)=-6$;
b) 1 db egyes van: $1+(-2)+(-2)=-3$;
c) 2 db egyes van: $1+1+(-2)=0$;
d) 3 db egyes van: $1+1+1=3$.
Mivel csak négy különböző eredmény kapható, biztosan lesz az eredmények között olyan, ami ismétlődik (skatulyaelv).

2. Az ABC háromszög C csúcsnál lévő szöge $45°$-os. Jelöld H-val a háromszög magasságpontját! Bizonyítsd be, hogy a $CH=AB$ egyenlőség teljesül!

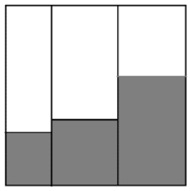
Megoldás. I. eset, ha ABC hegyesszögű háromszög. Nevezzük D-nek az A csúcsból a BC oldal egyenesére bocsátott magasságvonal talppontját. Az ACD háromszög egyenlőszárú derékszögű háromszög, mivel az egyik hegyesszöge $45°$-os. Kimondhatjuk, hogy $CD=AD$.
Figyeljük meg a CDH és az ADB háromszögeket. Mindkét háromszögnek van egy derékszöge, az egyik befogójuk egybevágó ($CD=AD$), valamint az egybevágó befogóhoz tartozó hegyesszögeik merőleges szárú szögek, tehát egyenlőek. Így a SzOSz tétel alapján kimondható, hogy a két háromszög egybevágó. Ebből következik, hogy az átfogóik is egybevágóak, azaz $CH=AB$. (bal oldali ábra)
II. eset, ha ABC tompaszögű háromszög. A jobb oldali ábrán látható, hogy az I. esetben leírt érvelés itt is megállja a helyét.



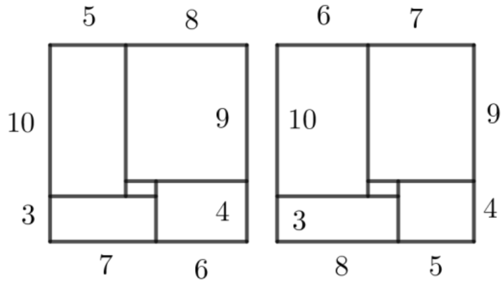
3. Egy számsorozat első és második eleme is 1-gyel egyenlő. A második elemtől kezdve a sorozat bármely eleme két szomszédjának szorzatánál 1-gyel kisebb. Mennyi a sorozat első 2021 elemének összege?

Megoldás. A sorozat első néhány eleme: $1, 1, 2, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 1, ...$
Látható, hogy a számok ötösével ismétlődnek. Az első 2021 elem 404 ilyen ciklusból és még egy egyesből áll. Az ötös ciklus elemeinek összege 9, ezért az első 2021 elem összege $S=404\cdot9+1=3637$.

4. Adott egy $13\,cm$ oldalhosszúságú négyzet. Ezt a négyzetet kell letakarni 5 db téglalappal, amelyek:
a) oldalainak hossza cm-ben mérve egész szám;
b) az oldalhosszak között $1\,cm$ és $10\,cm$ között minden lehetséges hossz pontosan egyszer szerepel;
c) a téglalapok nem lóghatnak le a négyzetről és részlegesen sem fedhetik egymást.
Ábrázold a megoldást!



Megoldás. Vegyük észre, hogy az 5 téglalaphoz pontosan 10 mérőszámot kaptunk, tehát a téglalapoknak nincs olyan téglalap-páros, aminek lenne megegyező hosszúságú oldala.
Abban ez esetben ha a négyzet egyik oldalára háromféle téglalapot is illesztenénk, olyan helyzet állna elő, ami nem fedhető le a maradék két téglalappal (lásd a jobb oldali ábrán).
Tehát gyorsan rájövünk, a négyzet minden oldalán 2-2 téglalap elemeit látjuk, így az ötödik téglalap valahol a négyzet belsejében foglal majd helyet. A 13 két (1-től 10-ig terjedő) szám összegeként a következő módokon írható fel: $10+3$, $9+4$, $8+5$ és $7+6$. Látható, hogy így a kimaradó $1\,cm$ és $2\,cm$ hosszú oldalak alkotják a középen lévő téglalapot. Hogy ez elférjen odabenn, a $10+3$ módon felosztott oldallal szemben a $9+4$ szerepeljen (1 az eltérés a hosszok között). A másik két páros: $8+5$ és $7+6$ szintén egymással szemben helyezhető el mivel $7-5=2$, ami a középső téglalap hosszabb oldalát alkotja.
Két lehetséges megoldás létezik:



8. évfolyam

1. Andor és Bella egy osztályba járnak és a következőket állítják.
Andor: Ötször annyi lány osztálytársam van, mint fiú.
Bella: Osztálytársaim között négyszer annyi a lány, mint a fiú.
Hányan járnak az osztályba?

Megoldás. Legyen l a lányok, f pedig a fiúk száma.

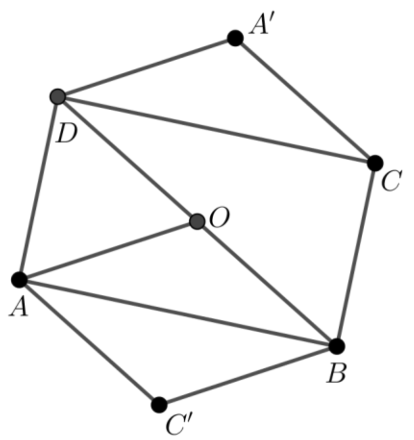
Andor állítása alapján felírható az $5(f-1)=l$ egyenlet. Bella állítása alapján pedig az $l-1=4f$ egyenlet. Oldjuk meg az egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} 5f-l&=5 \\ -4f+l&=1 \\ \hline \end{aligned}$$

Összeadva a két egyenletet adódik, hogy $f=6$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy $-24+l=1$, azaz $l=25$.
A kapott egyenletrendszernek tehát egy megoldása van. A fiúk száma 6, a lányoké 25, azaz 31 tanuló jár az osztályba.

2. Tükrözzük az $ABCD$ téglalapot a BD átlójára. A tükrözés után $AC'=AD=BC'$, ahol C' a C pont tükörképe. Határozd meg a téglalap területének nagyságát, ha ismert, hogy $AB=4\sqrt{3}$ cm hosszú!

Megoldás. A tükrözés után egy szabályos hatszöget kapunk, mivel a tükrözött csúcsok is a téglalap körülírt körére esnek, valamint adott, hogy az oldalai egyenlő hosszúságúak. A szabályos hatszög rövidebb átlója adott: $AB=4\sqrt{3}\ cm$. Az ABD háromszög szögei: $30°, 60°$ és $90°$. A félszabályos háromszögek tulajdonságainak felhasználásával könnyen kiszámolható, hogy a téglalap rövidebb oldala $AD=4\ cm$.
A téglalap területe tehát: $T=4\cdot 4\sqrt{3}=16\sqrt{3}\ cm^2$.



3. Egy bűvész kalapjában 11 fehér és 22 szürke nyuszi van. A színpadon van még egy egész kosár szürke nyuszi. A mutatvány lényege, hogy a bűvész kettesével húzgálja ki a nyuszikat a kalapból (nem néz a kalapba). A következő 3 eset lehetséges:
a) ha mindkettő nyuszi szürke, akkor az egyiket visszateszi a kalapba, a másikat futni hagyja a színpadon;

b) ha a két nyuszi különböző színű, akkor a fehér nyuszi megy vissza a kalapba, a szürke futkározhat;
c) ha két fehér nyuszit húzott ki, akkor mindkettőt elengedi a színpadon és helyettük betesz egy szürke nyuszit.
Addig folytatja a nyuszik kihúzását, míg a kalapban csak egy nyuszi marad (minden húzás után eggyel kevesebb nyuszi lesz a kalapban, ezért ez biztosan bekövetkezik). Ha ügyes vagy, te már tudod, hogy ez az utolsó nyuszi milyen színű.
Írd le a választ és indokold is!

Megoldás. A válasz: fehér.
A leírt szabály szerint a szürke nyuszik száma a kalapban minden lépésben eggyel változik: vagy csökken, vagy növekszik. A fehér nyuszik száma viszont a. és b. alatt leírt esetekben nem változik, a c. alatti esetben viszont kettővel csökken. Tehát a fehér nyuszik számának párossága nem változik. Mivel kezdetben 11 (páratlan számú) nyuszi van a kalapban, a fehér nyuszik száma a mutatvány során a következőképpen alakulhat: eleinte 11 fehér nyuszi, aztán 9, 7, 5, $3\ldots$
Tehát ha páratlan számú nyuszi van a kalapban, akkor biztosak lehetünk abban, hogy páratlan számú fehér és páros számú szürke van benne. Innen következik, hogy egy nyuszi esetén fehér nyusziról van szó.

4. Egy 30 feladatból álló tesztversenyen a helyes válaszért 5 pont jár, a rossz válaszért pedig 2 pontot levonnak. Ha valaki nem válaszol egy kérdésre, akkor arra 0 pontot kap. A verseny első helyezettje 109 pontot ért el. Hány kérdésre nem válaszolt a győztes?

Megoldás. Mivel $109 = 5\cdot 21 + 4$, ezért a jó válaszok száma legalább 22. A rossz válaszok száma így legfeljebb 8 lehet, vagyis 16 pontnál többet nem vonhattak le.
Mivel $150 - 16 = 134 = 5\cdot 26 + 4$, a helyes válaszok száma nem lehet több 26-nál.
A jó válaszok száma páratlan szám kell, hogy legyen, mivel páros számot kivonva a végső pontszám páratlan.
Így két lehetőségünk maradt:
1) A jó válaszok száma 23.
Ekkor a rossz válaszok száma $\dfrac{23\cdot 5 - 109}{2} = 3$, és 4 kérdésre nem válaszolt.
2) A jó válaszok száma 25.
Ekkor a rossz válaszok száma $\dfrac{25\cdot 5 - 109}{2} = 8$, ami lehetetlen, hiszen a jó és rossz válaszok számának összege legfeljebb 30 lehet.
A verseny győztese tehát 4 kérdésre nem válaszolt.

9. évfolyam

1. Felírtuk a táblára a természetes számokat 1-től 10-ig. Egy lépésben kiválasztunk két számot, és elosztjuk őket egymással úgy, hogy a hányados legalább 1 legyen. A két kiválasztott számot letöröljük, és helyette felírjuk a hányados egész részét. (Például $7:2=3{,}5$, a 7-est és a 2-est letöröljük, és fölírjuk a 3-ast.) Legfeljebb mekkora lehet az utolsónak megmaradt szám?

Megoldás. Mivel a hányados legalább egy, így mindig a kiválasztott számok nagyobbikát osztjuk el a kisebbel. Az a és b szám osztásakor, mivel b legalább egy, így a hányados legfeljebb a lehet, vagyis ha kiválasztok két számot, a legjobb esetben a maximumukat tudom a helyükbe írni. A tíz szám maximuma 10, így végül legfeljebb 10-et kaphatok. És ez valóban meg is kapható: Töröljük le először a 2-3, 4-5, 6-7, 8-9 párokat. Ekkor a következő számok maradnak: $1,1,1,1,10$. Most a 10-et osszuk el sorban az 1-esekkel. Így elértük, hogy utolsó számnak a 10-es maradjon.

2. Ha összeadjuk két egész szám összegét, különbségét, szorzatát és hányadosát, eredményül 500-at kapunk. Melyik lehet ez a két szám?

Megoldás. A két szám legyen x és y. Nyilván $y\neq 0$, hiszen az y-nal osztani is kell. Ekkor
$(x+y)+(x-y)+xy+x:y=500$, azaz $2x+xy+x:y=500$. Innen kiemeléssel kapjuk: $x\left(2+y+\dfrac{1}{y}\right)=500$. Mivel az x egész szám, így a zárójeles kifejezés is egész, azaz a tört miatt $y=\pm 1$. Ha $y=1$, akkor $x=125$. $y=-1$ esetén nem kapunk megoldást. A továbbiakban föltesszük, hogy $y\neq -1$. Ebben az esetben a szorzat csak úgy lehet egész szám, ha az x szorzó leegyszerűsíti az y-t, azaz $x=ky$, ahol k egész szám. Ekkor

$$ky\left(2+y+\frac{1}{y}\right)=500 \Leftrightarrow ky\frac{2y+y^2+1}{y}=500 \Leftrightarrow k(y+1)^2=500.$$

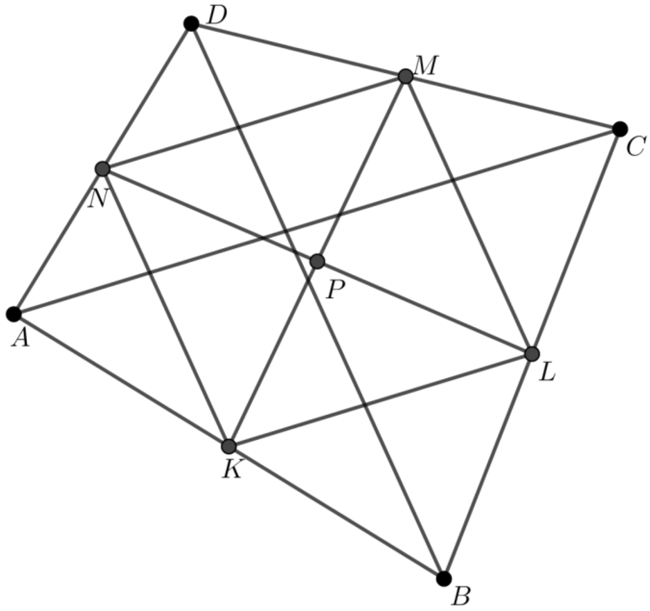
A bal oldal második tényezője miatt keressük az 500 négyzetszám osztóit: 1, 4, 25, 100. További próbálkozásainkat foglaljuk össze egy táblázatba:

$(y+1)^2$	1	1	4	4	25	25	100	100
$y+1$	1	–1	2	–2	5	–5	10	–10
y	0 nem lehet	–2	1 már volt	–3	4	–6	9	–11
k		500	125	125	20	20	5	5
x		–1000	125	–375	80	–120	45	–55

A megoldások tehát: $(-1000,-2)$, $(125,1)$, $(-375,-3)$, $(80,4)$, $(-120,-6)$, $(45,9)$, $(-55,-11)$.

3. Legyen K, L, M és N pont rendre az $ABCD$ tetszőleges négyszög AB, BC, CD és DA oldalának felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy a KM és LN szakaszok P metszéspontja egyben mindkét szakasznak felezőpontja is!

Megoldás. Felhasználva azt az ismert tételt, amely szerint minden paralelogramma átlói felezik egymást, elegendő belátni, hogy a $KLMN$ négyszög paralelogramma. Ehhez elegendő megmutatnunk, hogy a $KLNM$ négyszög szemközti oldali párhuzamosak.



Az MN szakasz párhuzamos az AC szakasszal, mivel az MN az ACD háromszög középvonala. Hasonlóan belátható, hogy az LK szakasz ugyancsak párhuzamos az AC szakasszal, így az MN szakasz is párhuzamos az LK szakasszal. Hasonlóan bizonyítható ML és NK párhuzamossága is. Mivel a $KLMN$ négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, ezért ez a négyszög paralelogramma, és így átlói felezik egymást.

4. Hányféleképpen lehet kiszínezni négy színnel az $ABCDE$ szabályos ötszög csúcsait, ha két szomszédos csúcs nem lehet azonos színű? (Két színezés különbözőnek számít, ha van olyan csúcs, amelyik színe különbözik a két színezésben.)

Megoldás. Különböztessünk meg három esetet.
I. Az A és a C csúcs azonos színű.
II. Az A és a C csúcs nem azonos színű, de A és D igen.
III. Az A és C csúcs nem azonos színű, és A és D sem.
Az I. esetben A és C négyféleképpen színezhető, B háromféleképpen, D háromféleléppen és E kétféleképpen (mivel két szomszédja különböző színű). Ez összesen $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 72$.
A II. esetben A és D négyféleképpen színezhető, B háromféleképpen, C kétféleképpen és E háromféleképpen, ami összesen $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 72$.
A III. esetben A négyféleképpen színezhető, B háromféleképpen, C kétféleképpen (mivel az A színét sem veheti föl), D kétféleképpen (hasonló okból kifolyólag, mint C) és E is kétféleképpen színezhető: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 96$.
A válasz: $72 + 72 + 96 = 240$ módon lehet kiszínezni a csúcsokat a feltétel szerint.

10. évfolyam

1. Hány olyan pozitív egész szám van, amelyre igaz, hogy a számjegyeinek összege és szorzata is egyaránt 24?

Megoldás. A keresett számokban előforduló számjegyek lehetséges értéke $1,2,3,4,6,8$ a szorzatra vonatkozó feltétel alapján. A számjegyek nem növekvő sorrendben a következők lehetnek az össszegre adott feltétel alapján:

$8,3$ és 13 db 1-es,
$6,4$ és 14 db 1-es,
$6,2,2$ és 14 db 1-es,
$4,3,2$ és 15 db 1-es,
$3,2,2,2$ és 15 db 1-es,

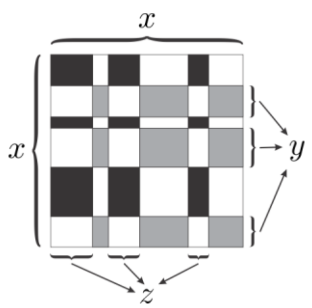
Az öt lehetséges esetben a megoldások száma rendre $\frac{15!}{13!}, \frac{16!}{14!}, \frac{17!}{2!\cdot 14!}, \frac{18!}{15!}, \frac{19!}{15!\cdot 3!}$

Összesen tehát $15\cdot 14+16\cdot 15+17\cdot 8\cdot 15+18\cdot 17\cdot 16+19\cdot 17\cdot 16\cdot 3=22890$ szám van.

2. Határozd meg az összes olyan x,y pozitív egész számot, amelyekre $5^x-3^y=16$.

Megoldás. Az egyenletet 4-es modulus szerint vizsgálva látjuk, hogy y páros, 3-as modulus szerint vizsgálva pedig x páros volta derül ki. Legyen $x=2m$, $y=2n$, és alakítsuk szorzattá: $5^{2m}-3^{2n}=\left(5^m+3^n\right)\left(5^m-3^n\right)=16$. Mivel az első szorzótényező pozitív egész, a második is pozitív és egyik sem nagyobb 16-nál. Ezért csak $m=1$ lehetséges, így $n=1$ azonnal adódik. Az egyenletnek tehát egyetlen megoldása van, az $(x,y)=(2,2)$.

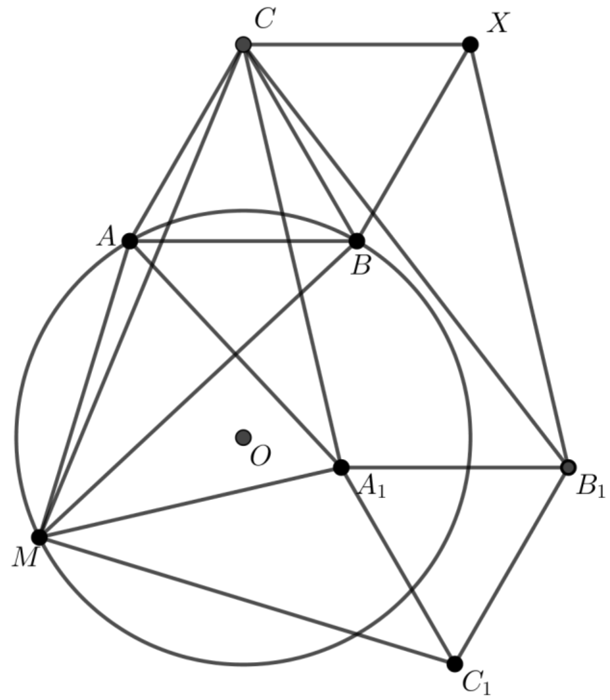
3. Egy négyzetet az oldalaival párhuzamos egyenesekkel téglalapokra osztottunk. Ezeket a téglalapokat sakktáblaszerűen feketére és fehérre színeztünk. Kiderült, hogy a fekete téglalapok összterülete megegyezik a fehér téglalapokéval. Bizonyítsd be, hogy a fekete téglalapok átrendezhetők úgy, hogy együtt egy téglalapot alkossanak!



Megoldás. Legyen a négyzet oldalának hossza x. Adjuk össze minden második vízszintes sáv szélességét és minden páratlanadik függőleges sáv szélességét. Ha az így kapott értékek y, illetve z akkor a sötét részek összterülete $\frac{x^2}{2}=y(x-z)+(x-y)z$. Rendezés és szorzattá alakítás után az $(x-2y)(x-2z)=0$ egyenlethez jutunk. Tehát y és z közül legalább az egyik $\frac{x}{2}$-vel egyenlő. Innen már egyszerűen adódik a feladat állítása, mert területének fel sötét a másik fele világos téglalap.

4. Adottak a síkban az ABC és ACO szabályos háromszögek. Tekintsük azt az O középpontú kört, amely áthalad az A és C pontokon. Bizonyítsd be, hogy e kör bármely M pontjára érvényes a következő összefüggés: $MA^2 + MC^2 = MB^2$.

Megoldás. Forgassuk el az M pont körül $-60°$-kal az ABC háromszöget, illetve a B körül $60°$-kal C-t. A pontok képei legyenek A_1, B_1, C_1 illetve X. Az A_1B_1B és BCM háromszögek egybevágóak, mert midketten egybevágóak az XBB_1 háromszöggel. Az előbbit B_1B felezőpontja körül kell $180°$-kal, az utóbbit B körül kell $60°$-kal elforgatni, hogy XBB_1-be jusson. Ezért $A_1B = MC$. Az A_1AB és MAC háromszögek egybevágóak, hiszen az A pont körül egymásba forgathatóak. A kerületi szögek tétele alapján $AMC\angle = 30°$ így $AA_1B\angle = 30°$. De AA_1M szabályos háromszög, így MA_1B derékszögű háromszög, amelyre Pitagorasz-tételt alkalmazva megkapjuk, hogy $MA^2 + MC^2 = MB^2$, mivel $MA_1 = MA$ és $A_1B = MC$.



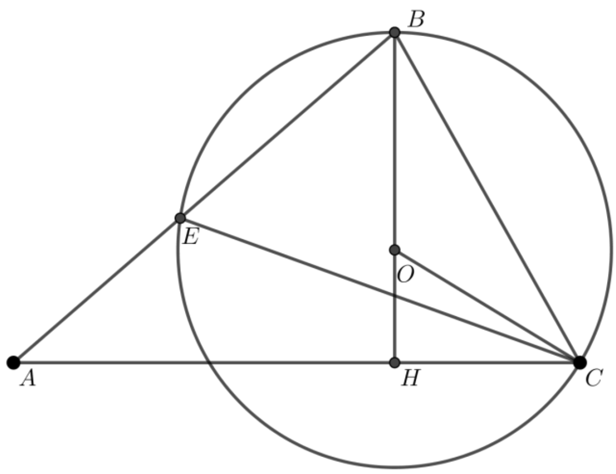
11. évfolyam

1. Ötfaluban a telefonszámok ötjegyűek és az első számjegy nem lehet nulla. *Menőnek* tartják azokat a számokat, amelyeknek jegyei csökkenő vagy növekvő sorrendben következnek egymás után. (Így például az 12459 menő szám, de az 11234 és az 10345 nem azok. Határozd meg az összes ötfalui menő telefonszámok számát!

Megoldás. Ha a számjegyekből kiválasztunk 5-öt, akkor ezekből pontosan egy csökkenő menő telefonszámot készíthetünk és ezek száma $\binom{10}{5}=252$. A növekvő menő telefonszámokban nem lehet a 0, ezért ezek száma $\binom{10}{4}=126$. Tehát összesen 378 menő telefonszám van.

2. Legyen BH az ABC háromszög magasságvonala. A k kör középpontja a BH szakaszon van és tartalmazza a B és C csúcsokat, valamint ez a kör metszi az AB szakaszt az E pontban, $E \neq B$. Ha az AB szakasz hossza 16, a BC szakasz hossza 12, határozd meg az AE szakasz hosszát!

Megoldás. Legyen O pont a k kör középpontja, és jelölje $ABC\angle=\beta,\ BAC\angle=\alpha,\ ACB\angle=\gamma$ a háromszög belső szögeit. Ekkor $OBC\angle=90°-\gamma$ és mivel BOC háromszög egyenlő szárú, ezért $OCB\angle=90°-\gamma$. Tehát a BOC háromszög belső szögei $BOC\angle=180°-2\cdot(90°-\gamma)=2\gamma$. A $BOC\angle$ középponti szögnek $BEC\angle$ kerületi szög felel meg, azaz $BEC\angle=\gamma$ Ezek alapján $ABC_\triangle \sim CBE_\triangle$ hasonló háromszögek, mert a B csúcsnál közös szögük van.



Tehát megfelelő oldalaik arányosak: $\dfrac{BC}{BE}=\dfrac{BA}{BC}$, vagyis $BE=9$. Végül pedig $AE=AB-BE=7$.

3. Adott az $4x^2-(3a+1)x-a-2=0$ egyenlet. Határozd meg az $a\in\mathbb{R}$ minden olyan értékét, amelyre az adott egyenlet x_1 és x_2 megoldásaira (gyökeire) érvényes, hogy $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}\geq\dfrac{40}{9}$. Milyen $a\in\mathbb{R}$ értékekre lesz az egyenlet mindkét megoldása (gyöke) a $(-1,\ 2)$ intervallumban?

Megoldás. Ha az $a \neq -2$, akkor a megoldások különböznek nullától és a Viéte-szabály alapján $x_1 + x_2 = \frac{3a+1}{4}$ és $x_1 \cdot x_2 = -\frac{a+2}{4}$. Ekkor

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{9a^2 + 14a + 17}{(a+2)^2}.$$

Mivel az $(a+2)^2 > 0,$ ezért a feltétel átalakul $9\left(9a^2 + 14a + 17\right) \geq 40(a+2)^2$ formába, vagyis $41a^2 - 34a - 7 \geq 0$, amelynek a megoldásai $-\frac{7}{41}$ és 1, ez alapján az egyenlőtlenség megoldási halmaza $\left(-\infty,\ -\frac{7}{41}\right] \cup [1,\ +\infty)$. Ez alapján

$$a \in \left(-\infty,\ -2\right) \cup \left(-2,\ -\frac{7}{41}\right] \cup [1,\ +\infty).$$

Legyen $f(x) = 4x^2 - (3a+1)x - a - 2$, ha a megoldások a $(-1,\ 2)$ intervallumban vannak, akkor $f(-1)$ és $f(2)$ egyező előjelű, vagyis $f(-1) \cdot f(2) > 0$, valamint a parabola csúcsa a $(-1,\ 2)$ intervallumban van, azaz $-1 < \frac{3a+1}{8} < 2$ és $f(-1) \cdot f\left(\frac{3a+1}{8}\right) < 0$. Mivel az $f(-1) = 2a + 3$ és $f(2) = -7a + 12$, és $f\left(\frac{3a+1}{8}\right) = -\frac{9a^2 + 22a + 33}{16}$, ezért $(2a+3)(-7a+12) > 0$, $-3 < a < 5$, $\frac{9a^2 + 22a + 33}{16} \cdot (2a+3) > 0$. Ezek közös megoldása $a \in \left(-\frac{3}{2},\ \frac{12}{7}\right)$.

4. Oldd meg a $\sin x + \cos x + \sin x \cdot \cos x = 1$ **egyenletet!**

Megoldás. Legyen a $\sin x + \cos x = t$, és mivel a $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$, akkor $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\left(t^2 - 1\right)$. Az egyenlet alakja $t^2 + 2t - 3 = 0.$ Ennek megoldásai az 1 és a -3, de ez utóbbi nem lehet, mert $\sin x + \cos x > -2$. Tehát a megoldás $\sin x + \cos x = 1$, azaz $\sin x = 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$, ahonnan $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\sin^2\frac{x}{2}$, ezért $\sin\frac{x}{2} = 0$, ahonnan $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, vagy $tg\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$, amiből a megoldás $x = \frac{\pi}{2} + 2m\pi,\quad m \in \mathbb{Z}$.

Másik módon, $\sin x + \cos x = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, akkor az addiciós tétellel $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ és ezért $x = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$, vagy $x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$, ahonnan $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi,\quad n \in \mathbb{Z}$.

12. évfolyam

1. Két egymást követő prímszámot ikerprímeknek nevezünk, ha a közöttük levő különbség 2. Határozd meg az összes olyan a és b ikerprímeket, $a<b$, amelyekre teljesül, hogy az $ab+1$ szám számjegyeinek összege 7.

Megoldás. Egy megoldás létezik $a=3$, $b=5$. Megmutatjuk, hogy nincs több megoldás. Minden 3-nál nagyobb prímszámról ismeretes, hogy felírható $6k\pm1$ alakban. Ha a és b ikerprímek, akkor valamely k természetes számra pontosan $a=6k-1$ és $b=6k+1$. Ekkor $ab+1=(6k-1)(6k+1)+1=36k^2-1+1=36k^2$. Ez a szám viszont biztosan osztható 9-cel, azaz a számjegyeinek összege is legalább 9, tehát nem létezik más megoldás.

2. Oldd meg a következő egyenletet az egész számok halmazában: $2021x^2=12y^2+4z^2$.

Megoldás. Egy megoldás az $(x,y,z)=(0,0,0)$. Megmutatjuk, hogy nem létezik másik megoldás. Legyen (x_0,y_0,z_0) egy az előzőtől eltérő megoldás. Ekkor $2021{x_0}^2=12{y_0}^2+4{z_0}^2$.

Ismeretes, hogy a négyzetszámok hárommal való osztási maradéka 0 vagy 1. Ekkor az előbbi egyenlőség bal oldalának hárommal való osztási maradéka 0 vagy 2, még a jobb oldal hárommal való osztási maradéka 0 vagy 1. Könnyen belátható, hogy megoldás csak akkor létezik, ha a jobb oldal és a bal oldal is osztható 3-mal, azaz, ha x_0 és z_0 is osztható hárommal. Legyen $x_0=3x_1$ és $z_0=3z_1$. Ekkor az előző egyenlőség felírható:

$$2021\cdot9\cdot x_1^2=12y_0^2+4\cdot9\cdot z_1^2.$$

Ha mindkét oldalt elosztjuk 3-mal, akkor a következőt kapjuk:

$$2021\cdot3\cdot x_1^2=4y_0^2+4\cdot3\cdot z_1^2.$$

Azaz, y_0 is osztható 3-mal, vagyis $y_0=3y_1$. Ekkor

$$2021\cdot3\cdot x_1^2=4\cdot9\cdot y_1^2+4\cdot3\cdot z_1^2,$$

ahol, ha ismét elosztjuk mindkét oldalt 3-mal a következőt kapjuk:

$$2021x_1^2=12y_1^2+4z_1^2.$$

Tehát ha egy (x_0,y_0,z_0) számhármas megoldása az adott egyenletnek, akkor az $\left(\frac{x_0}{3},\frac{y_0}{3},\frac{z_0}{3}\right)$ számhármas is megoldása az egyenletnek. Analóg módon belátható, hogy ekkor bármely k természetes szám esetén az $\left(\frac{x_0}{3^k},\frac{y_0}{3^k},\frac{z_0}{3^k}\right)$ számhármas is megoldása az adott egyenletnek. Mivel csakis egész számokról van szó, ezért az egyetlen olyen számhármas, amely kielégíti az adott feltételeket csak a $(0,0,0)$.

3. Adott az *ABCD* trapéz. A trapéz alapjaira kívülről egy-egy téglalapot rajzolunk, amelyek egybevágóak, a trapéz száraira pedig szintén kívülről négyzetet rajzolunk. Bizonyítsd be, hogy ezeknek a téglalapoknak és négyzeteknek a középpontjai egy újabb négyzetet határoznak meg.

Megoldás. Legyenek F és H a négyzetek csúcsai, G a trapéz alatti I pedig a trapéz feletti téglalap csúcsa. Könnyen belátható, hogy az F középpontú 90°-os elforgatás a G pontot az I pontra képezi le, akárcsak az, hogy a H középpontú 90°-os elforgatás az I pontot a G pontra képezi le. Tehát az $FGHI$ négyszögben $IF = FG$, $GH = HI$, valamint az F és G csúcsoknál lévő szögek derékszögűek. Ez a konfiguráció csak akkor létezhet, ha $FGHI$ négyzet.

4. Adott az $X = \{1, 2, ..., n\}$ halmaz. Legyen $F = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ olyan halmaz, amelyre minden $i = 1, 2, ..., m$ esetén $A_i \subseteq X$, valamint minden $1 \le i < j \le m$ esetén $A_i \cap A_j \le 2$. Határozd meg az m legnagyobb lehetséges értékét!

Megoldás. Az F halmaz tartalmazhatja az X halmaz összes legfeljebb 3 elemű részhalmazát, azaz $m \ge \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$. Mutassuk meg, hogy ez egyben felső korlát is az m értékére. Ezt úgy fogjuk megtenni, hogy bebizonyítjuk, hogy ha F egy maximális elemszámú halmazrendszer, akkor nem tartalmazhat négy- vagy attól többelemű halmazt. Tegyük fel az ellenkezőjét, hogy F-ben van egy legalább négyelemű halmaz. Ekkor ezt a halmazt kicserélhetjük az ő összes háromelemű részhalmazára. Ezek a halmazok biztosan nem szerepelnek F-ben, mert különben létezett volna F-ben háromelemű metszet. Így viszont ellentmondáshoz jutottunk azzal a ténnyel, hogy F egy maximális elemszámú halmazrendszer.

A XIX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

5. évfolyam

1. Balázs Piri Kevin, Kárász Karolina Általános Iskola, Horgos, **I. díj**
2. Bakota Áron, Október 10. Általános Iskola, Szabadka, **I. díj**
3. Leopold Kata, Jovan Jovanović Zmaj Általános Iskola, Magyarkanizsa, **II. díj**
4. Szebenyi Antónia, Kárász Karolina Általános Iskola, Horgos, **II. díj**
5. Kopunović Edina, Hunyadi János Általános Iskola, Csantavér, **III. díj**
6. Kurnyák Zsófia, Ady Endre Kísérleti Általános Iskola, Kishegyes, **III.díj**

6. évfolyam

1. Zsivanac Léna, Cofman Iskola, Szabadka **I. díj**
2. Nagy Martina, Sonja Marinković Általános Iskola, Szentmihály, **II. díj**
3. Földi Krizsán Kitty, Ady Endre Kísérleti Általános Iskola, Kishegyes, **II. díj**
4. Mészáros Máté, Jovan Jovanović Zmaj Általános Iskola, Magyarkanizsa, **III. díj**
5. Varga Martin, Kókai Imre Általános Iskola, Temerin **III. díj**

7. évfolyam

1. Zsivanac Beren, Petőfi Sándor Általános Iskola, Újvidék, **I. díj**
2. Sövény Petra, Petőfi Sándor Általános Iskola, Hajdujarás, **II. díj**
3. Keresztényi Albert, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **II. díj**
4. Kadvány Júlia, Október 18. Általános Iskola/ Cofman Iskola, Zentagunaras, **III. díj**

8. évfolyam

1. Pletikoszity Martin, Testvériség Egység Általános Iskola, Bajsa, **I. díj**
2. Csiszár Ákos, Miroslav Antić Általános Iskola, Palics, **I. díj**
3. Csanádi Petra, Jovan Jovanović Zmaj Általános Iskola, Magyarkanizsa, **I. díj**
4. Ristić Anna, Jovan Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék, **II. díj**
5. Téglás Dóra, Constantinum Katolikus Óvoda, Általános Iskola, Gimnázium, Technikum, Kiskunfélegyháza, **II. díj**
6. Retkes Emma, Constantinum Katolikus Óvoda, Általános Iskola, Gimnázium, Technikum, Kiskunfélegyháza, **III. díj**
7. Rádi Gellért, Constantinum Katolikus Óvoda, Általános Iskola, Gimnázium, Technikum, Kiskunfélegyháza, **III. díj**
8. Kis Botond, Jovan Jovanović Zmaj Általános Iskola, Magyarkanizsa, **III. díj**

9. évfolyam

1. Vicián Márk, Orosházi Táncsics Mihály Gimnázium és Kollégium, Orosháza, **I. díj**
2. Kratok Bence, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Fekecs Csaba, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Huszta Kristóf, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

10. évfolyam

1. Erdélyi Nimród, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Szabó Dorina, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Tóth Katarina, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
4. Fajka Zsóka, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
5. Kalmár Krisztina, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

11. évfolyam

1. Kőműves Emese, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Török Csongor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Balázs Bálint, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Tóth Norbert, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

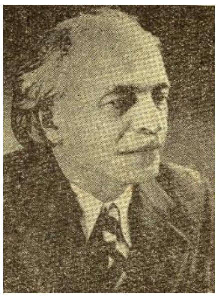
12. évfolyam

1. Gál József, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Apró Dorottya, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Nagy Daniella, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
4. Irimiás Márk, Orosházi Táncsics Mihály Gimnázium és Kollégium, Orosháza, **III. díj**
5. Ágó Gergely, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

Pillanatkép a tanulókról.

A XX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

A jubiláris XX. Fekete Mihály Emlékverseny versenybizottságának tagjai.



XX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2022. december 3.

5. évfolyam

1. Pisti 90 **db cukorkát vitt be születésnapján az iskolába, hogy osztálytársait megajándékozza. A cukorkák csomagolása piros, sárga és zöld színű volt. A piros és a sárga cukrok száma** 64**, a sárga és a zöld színűeké pedig** 49**. Az egyes színekből hány cukrot vitt az iskolába Pisti?**

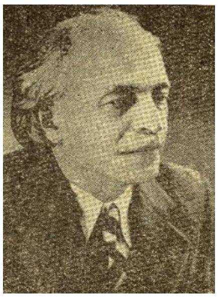
2. A 2023 **olyan évszám, amelyben háromféle számjegy szerepel:** 0**,** 2**,** 3**. Hány olyan évszám van a XXI. században, amelyben szintén háromféle számjegy szerepel?**

3. Hány részre osztja fel a síkot két (nem feltétlenül egyforma) háromszög? Vizsgáld meg az összes esetet!

4. Az 5**. osztály tanulói osztályfőnökükkel kirándulást szerveznek, de nem tudják eldönteni, hogy Palicsra, Újvidékre vagy Belgrádba menjenek.** 13 **tanuló szeretne Palicsra menni,** 14 **Újvidékre,** 13 **pedig Belgrádba.** 5**-en vannak, akik szívesen mennének Palicsra és Újvidékre is,** 6**-an mennének Palicsra és Belgrádba,** 4**-en pedig Újvidékre és Belgrádba. Egy tanuló mindhárom helyre elmenne,** 5 **tanuló viszont nem akar kirándulni. Hány gyerek jár ebbe az osztályba?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



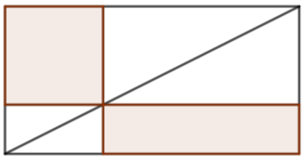
XX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2022. december 3.

6. évfolyam

1. Mikulás bácsi egy doboz cukorkát kapott névnapjára, melynek egy ötödét fel is falta már első nap. Második nap megette a megmaradt rész felét és megkínálta két kedvenc kismanóját, akik fejenként két-két szemet vettek el. Ekkor a dobozban maradt még 12 **szem cukorka. Mennyi cukorka volt eredetileg a dobozban, és mennyit evett meg a Mikulás az első napon?**

2. Niki és Misi azon tanakodnak, hogy ha egy téglalapba berajzolják a téglalap egyik átlóját, valamint az átló egy belső pontján át párhuzamost húznak az oldalakkal (lásd ábra), akkor a két satírozott rész területe egyenlő lesz. Segíts bebizonyítani nekik ezt az állítást!

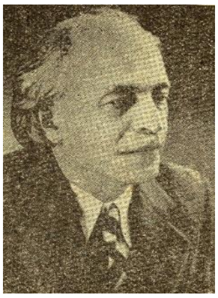


3. Az iskolai karácsonyfadíszítés után a karácsonyi gömbökből 700 **gömb kimaradt. Misi eldöntötte, hogy épít belőle egy** 12 **rétegű gömbpiramist. A piramis a következő jellemzőkkel rendelkezik: alapja négyzet alakú, a gömbök egyforma méretűek, az építés során négy gömb tetejére egy gömböt teszünk, a legfelső réteg egyetlen gömbből áll. Elég lesz-e Misinek és barátainak a megmaradt** 700 **gömb egy** 12 **szintes piramis felépítésére? Tudnának-e esetleg nagyobb piramist építeni?**

4. Misi születésnapjára egy marcipánbevonatú meglepetéstortát kapott barátaitól, melynek mérete $16\,cm \times 16\,cm \times 16\,cm$**. Fel tudja-e osztani** 16 **egybevágó (egyforma) téglatestre** 8 **vágással (síkkal) a tortát? Amennyiben sikerül Misinek ilyen módon feldarabolni a tortát rajzold le a kis szelet (téglatest) testhálóját, határozd meg az éleinek hosszát, végül határozd meg mennyi a térfogata egy ilyen szeletnek!**
A kapott téglatestek között nem teszünk különbséget a díszítés miatt.

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



XX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2022. december 3.

7. évfolyam

1. Mihály apó puttonya mézes pogácsával van tele. Kiveszünk belőle 11-et, és ebből 9-et egy dobozba, 2-t pedig egy tálba teszünk. Újra kiveszünk 11-et, az előbbi módon elosztjuk, majd ezt addig folytatjuk, míg a puttonyban már csak 9 mézes pogácsa marad.
Ekkor a tál tartalmát kezdjük felosztani hasonlóképp: egyszerre 11-et markolunk belőle, ebből 9 egy tasakba kerül, 2 pedig egy tányérra, egészen addig míg a tányéron 66 pogácsa nem lesz, a tálban viszont csak 3 marad. Hány mézes süti volt Mihály apó puttonyában eredetileg?

2. Egy nagy társaságba jófejek és füllentők jöttek össze. A jófejek mindig igazat mondanak, a füllentők viszont mindig fülletenek.
a) Egy kerek asztal köré kilencen ülnek le. Valaki megkérdezi őket, hogy milyen természetű emberek között ülnek. Mindenki ugyanazt a választ adja: „*az egyik szomszédom jófej, a másik füllentő*”. Hány jófej és hány füllentő ülhet az asztalnál? Van-e többféle megoldás?
b) Mi a helyzet abban az esetben, ha egy 7 fős asztal körül kapjuk ugyanezeket a válaszokat?
Ebben az esetben van-e többféle megoldás?
c) Általános esetben (tetszőleges számú személy ül az asztal körül) mi a megoldás?

3. Adott az $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$ **kifejezés.**

Tehát, ha $n=2$, akkor a kifejezés értéke $\frac{3}{2}$ lesz.

a) Mennyi a kifejezés értéke, ha $n=5$?
b) Ha tudjuk, hogy a kifejezés értéke 2022, hány tényező alkotja a szorzatot?

4. Az ABC háromszög külső szögfelező egyenesei (a külső szögek szimmetriatengelyei) egy olyan háromszöget alkotnak, aminek a belső szögei $30°, 70°$ és $80°$-osak. Határozd meg az ABC háromszög belső szögeit!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

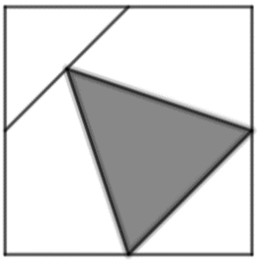
Jó munkát!

XX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2022. december 3.

8. évfolyam

1. Egy négyjegyű szám középső számjegyeit letöröljük. Az így kapott kétjegyű szám az eredeti szám 99-ed része. Melyik lehet ez a négyjegyű szám?

2. Az ábrán látható négyzetben szakaszfelező pontok összekötésével kaptuk meg a $9\,cm^2$ területű szürke háromszöget. Határozd meg a négyzet területének nagyságát!

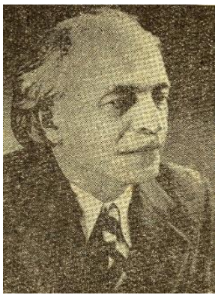


3. Egy hangya egy $2\,cm$, $3\,cm$ és $5\,cm$ oldalélű téglatest egyik csúcsán pihen. Szeretne eljutni a tőle legtávolabbi csúcshoz a lehető legrövidebb úton a téglatest felszínén haladva. Határozd meg ezt az útvonalat és számold ki a hosszúságát!

4. Fekete Mihály, versenyünk névadója $\overline{abbc}$-ben született Zentán, és $\overline{adef}$-ben Jeruzsálemben hunyt el $\overline{fa}$ évesen. Idén $\overline{agc}$ éves lenne. Határozd meg Fekete Mihály születésének és halálának évét, ha a, b, c, d, e, f és g különböző számjegyeket jelölnek!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



XX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2022. december 3.

9. évfolyam

1. Egy sportversenyen 15 csapat vett részt, és minden csapat minden csapattal egyszer mérkőzött meg. A győzelemért 3, a döntetlenért 2, a vereségért 1 pont járt. A verseny végén minden csapatnak más volt a pontszáma, az utolsó csapat 21 pontot szerzett. Igaz-e, hogy a győztes csapat legalább egyszer döntetlent játszott?

2. Keressük meg az összes olyan kétjegyű számot, amelyre igaz, hogy ha a számot elosztjuk a számjegyei szorzatával, akkor a hányados 5, a maradék 2.

3. Egy derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság a hegyesszögek szögfelezőivel olyan α és β hegyesszögeket zár be, melyek aránya $2:3$. Mekkorák a derékszögű háromszög hegyesszögei?

4. Legyen az $x_1, x_2, ..., x_{2022}$ egész számok szorzata 1.

a) Bizonyítsd be, hogy az $x_1 + x_2 + ... + x_{2022}$ összeg nem osztható 4-gyel!

b) Számoljuk ki az $\left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right)...\left(x_{2022} + \frac{1}{x_1}\right)$ kifejezés lehetséges értékét!

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2022. december 3.

10. évfolyam

1. Bizonyítsd be, hogy az $n = 99...900...025$ **szám, amelyben** k **darab** 0 **és** 9 **számjegy szerepel, minden** k **természetes szám esetén négyzetszám!**

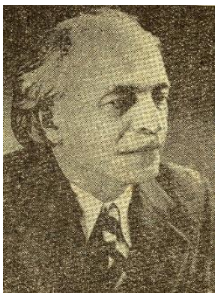
2. Oldd meg a következő egyenletet a prímszámok halmazán: $2x + 3y + 6z = 78$**.**

3. Bizonyítsd be, hogy abban a derékszögű háromszögben, amelynek egyik hegyesszöge 15°**-os, az átfogóhoz tartozó magasság az átfogó negyedével egyenlő. Számítsd ki a háromszög területét az átfogó függvényében!**

4. A táblán a következő hiányos egyenlet áll $x^3 + ...x^2 + ...x + ... = 0$**. Két játékos felváltva ír a kipontozott helyekre valós számokat együtthatónak. Az első játékos célja:**
a) olyan egyenletet kapni, amelynek pontosan egy valós gyöke van,
b) olyan egyenletet kapni, amelynek három, nem feltétlenül különböző, valós gyöke van.
Megakadályozhatja-e ebben az első játékost a második játékos külön az a) és külön a b) esetben?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



XX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2022. december 3.

11. évfolyam

1. Oldd meg az $\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}=2\sqrt{2}$ **egyenletet!**

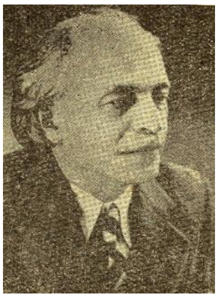
2. Az ABC **derékszögű háromszögben a két befogó összege** $4\sqrt{10}$**, az átfogóra húzott magassága** 3**. Határozd meg a háromszög oldalainak hosszát!**

3. Három prímszám szorzata az összegük ötszörösével egyenlő. Add meg az összes lehetséges megoldást!

4. Mivel egyenlő az $S=f\left(\dfrac{1}{2022}\right)+f\left(\dfrac{2}{2022}\right)+\ldots+f\left(\dfrac{2021}{2022}\right)+f\left(1\right)$ **összeg, ha** $f\left(x\right)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$ **?**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!



XX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2022. december 3.

<u>12. évfolyam</u>

1. Határozd meg azokat a prímszámokat, amelyekre teljesül, hogy a köbükhez egyet hozzáadva egy szám természetes szám négyzetét kapjuk!

2. Legyen a T pont az ABC háromszög köré írható körének egy tetszőleges pontja. Legyenek T_a, T_b, T_c pontok rendre a T pont tengelyes tükrözéssel kapott képei a BC, AC, AB egyenesekhez viszonyítva. Bizonyítsd be, hogy a T_a, T_b, T_c pontok kollineárisak!

3. Bizonyítsd be, hogy minden x, y, z pozitív valós számra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$xy^2z^3 + yz^2x^3 + zx^2y^3 \le x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 .$$

4. Hányféleképpen tölthető ki egy 2022×2023-as táblázat 1 és -1 számokkal úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban a számok szorzata 1 legyen?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

A XX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

5. évfolyam

1. Pisti 90 db cukorkát vitt be születésnapján az iskolába, hogy osztálytársait megajándékozza. A cukorkák csomagolása piros, sárga és zöld színű volt. A piros és a sárga cukrok száma 64, a sárga és a zöld színűeké pedig 49. Az egyes színekből hány cukrot vitt az iskolába Pisti?

Megoldás. A cukrok számát p, s, z-vel jelölve felírhatjuk a következő egyenleteket:

$$p+s=64$$

$$s+z=49.$$

Az egyenleteket összeadva $p+s+s+z=113$, és miután $p+s+z=90$, így $s=23$, $p=41$ és $z=26$. 23 db sárga, 41 db piros és 26 db zöld csomagolású cukorkát vitt Pisti az iskolába.

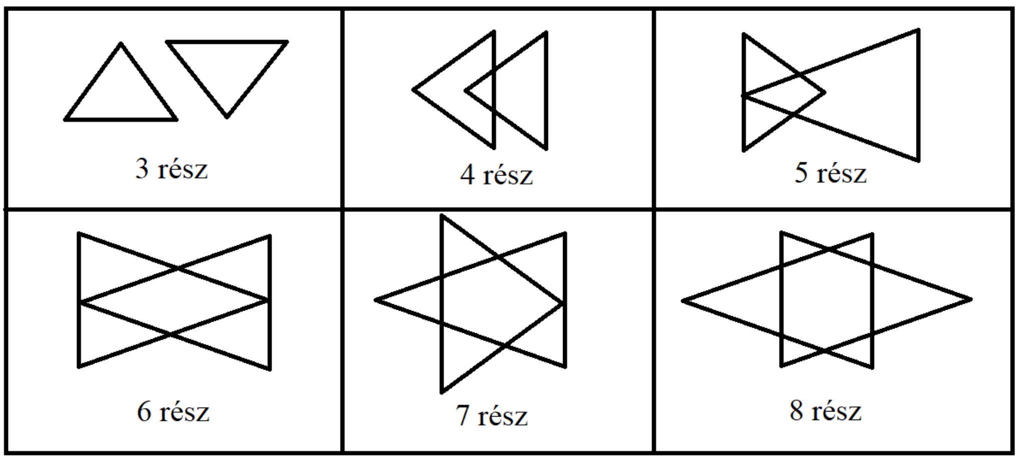
2. A 2023 olyan évszám, amelyben háromféle számjegy szerepel: 0, 2, 3. Hány olyan évszám van a XXI. században, amelyben szintén háromféle számjegy szerepel?

Megoldás. A XXI. században minden évszám 20-szal kezdődik. Így a lehetséges esetek:

(1) 2, 0 és tőlük különböző két egyforma számjegy.
Ilyen szám a 2011, 2033, 2044, …, 2099 – összesen 8 db.
(2) 2, 0, 0 és egy tőlük különböző számjegy.
Ilyen szám a 2001, 2003, 2004, …, 2009 és 2010, 2030, 2040,…, 2090, 2100 – összesen 17 db.
(3) 2, 0, 2 és egy tőlük különböző számjegy.
Ilyen szám a 2021, 2023, 2024, …, 2029 és 2012, 2032, 2042, …, 2092 – összesen 16 db.
Tehát összesen 41 db ilyen évszám van a XXI. században.

3. Hány részre osztja fel a síkot két (nem feltétlenül egyforma) háromszög? Vizsgáld meg az összes esetet!

Megoldás. A lehetséges esetekre példák:



Megjegyzés: Ha megengedjük, hogy a két háromszög azonos legyen és egymáson helyezkedjen el, akkor két részre is lehetne osztani a síkot.

4. Az 5. osztály tanulói osztályfőnökükkel kirándulást szerveznek, de nem tudják eldönteni, hogy Palicsra, Újvidékre vagy Belgrádba menjenek. 13 tanuló szeretne Palicsra menni, 14 Újvidékre, 13 pedig Belgrádba. 5-en vannak, akik szívesen mennének Palicsra és Újvidékre is, 6-an mennének Palicsra és Belgrádba, 4-en pedig Újvidékre és Belgrádba. Egy tanuló mindhárom helyre elmenne, 5 tanuló viszont nem akar kirándulni. Hány gyerek jár ebbe az osztályba?

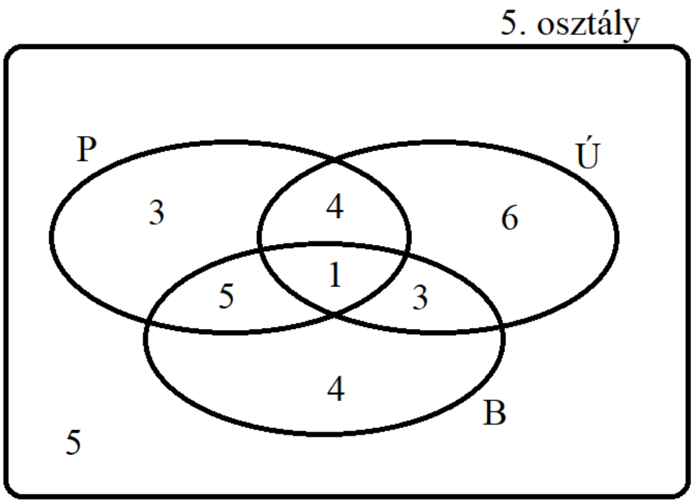
Megoldás. A hármas metszettől indulva töltsük ki a halmazábrát. Az az 5 tanuló, aki nem szeretne kirándulni menni, csak az osztály halmazba kerül bele. Ezután a két-két halmaz által létrejött metszeteket töltjük ki, persze kivonva azt az egy tanulót, aki mindhárom kiránduláson szívesen részt venne. Végül pedig kitöltjük a halmazábra azon a részeit, ahova azon tanulók számát írjuk, akik csak egy-egy úticélt jelöltek meg.

Palics: $13-(5+1+4)=3$

Újvidék: $14-(3+1+4)=6$

Belgrád: $13-(5+1+3)=4$

A beírt számokat összeadva 31-et kapunk, tehát ebbe az osztályba 31 tanuló jár.



6. évfolyam

1. Mikulás bácsi egy doboz cukorkát kapott névnapjára, melynek egy ötödét fel is falta már első nap. Második nap megette a megmaradt rész felét és megkínálta két kedvenc kismanóját, akik fejenként két-két szemet vettek el. Ekkor a dobozban maradt még 12 szem cukorka. Mennyi cukorka volt eredetileg a dobozban, és mennyit evett meg a Mikulás az első napon?

Megoldás. Jelöljük a cukorkák számát x-szel.

- Első napon megette a cukorkák egy ötödét, azaz $\frac{x}{5}$-öt.
- Második napon a maradék felét, azaz $\frac{1}{2}\cdot\frac{4x}{5}=\frac{2x}{5}$ részét.
- Adott a manóknak 4 szemet.
- Maradt 12 szem.

A fenti megállapításokból felírható a következő egyenlet:

$$\frac{x}{5}+\frac{2x}{5}+4+12=x.$$

Az egyenletet rendezve a következőket kapjuk:

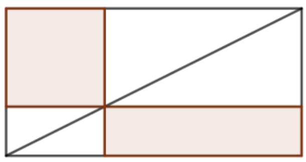
$$\frac{3x}{5}+16=x$$

$$16=\frac{2x}{5}$$

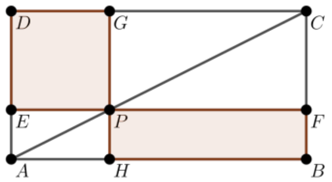
$$x=40.$$

Tehát 40 cukorka volt a dobozban, és ebből a Mikulás az első napon 8 darabot evett meg.

2. Niki és Misi azon tanakodnak, hogy ha egy téglalapba berajzolják a téglalap egyik átlóját, valamint egy az átló egy belső pontján át párhuzamost húznak az oldalakkal (lásd ábra), akkor a két satírozott rész területe egyenlő lesz. Segíts bebizonyítani nekik ezt az állítást!



Megoldás. Először is nevezzük el a fontos pontokat az ábránkon.



Egy téglalap átlója két egybevágó háromszögre osztja fel a a négyszöget, az így kapott háromszögek területe pedig megegyezik.
Az $ABCD$ téglalap esetén $ABC\Delta \cong ACD\Delta$, ezért $T_{ABC\Delta} = T_{ACD\Delta} = t$.
Az $AHPE$ téglalap esetén $AHP\Delta \cong APE\Delta$, ezért $T_{AHP\Delta} = T_{APE\Delta} = t_1$.
Az $PFCG$ téglalap esetén $PCF\Delta \cong PCG\Delta$, ezért $T_{PFC\Delta} = T_{PCG\Delta} = t_2$.
Valamint azt is tudjuk, hogy
$T_{ABC\Delta} = T_{AHP\Delta} + T_{PFC\Delta} + T_{HBFP}$, ahonnan: $T_{HBFP} = T_{ABC\Delta} - T_{AHP\Delta} - T_{PFC\Delta} = t - t_1 - t_2$.
$T_{ACD\Delta} = T_{APE\Delta} + T_{PCG\Delta} + T_{EPGD}$, ahonnan:
$T_{EPGD} = T_{ACD\Delta} - T_{APE\Delta} - T_{PCG\Delta} = t - t_1 - t_2$.
Tehát a két satírozott rész területe megegyezik egymással.

3. Az iskolai karácsonyfadíszítés után a karácsonyi gömbökből 700 **gömb kimaradt. Misi eldöntötte, hogy épít belőle egy rétegű gömbpiramist. A piramis a következő jellemzőkkel rendelkezik: alapja négyzet alakú, a gömbök egyforma méretűek, az építés során négy gömb tetejére egy gömböt teszünk, a legfelső réteg egyetlen gömbből áll. Elég lesz-e Misinek és barátainak a megmaradt** 700 **gömb egy** 12 **szintes piramis felépítésére? Tudnának-e esetleg nagyobb piramist építeni?**

Megoldás. A legfelső, azaz a 12. réteg 1 gömböt tartalmaz, mely alatt a 11. rétegben 4 gömb található. Ha megvizsgáljuk a 11. réteget oldalnézetből, akkor 2 gömböt látunk, így a képzeletbeli négyzet oldala 2 gömbnyi, területe pedig 4 gömbnyi. A következő rétegben, azaz a 10.-ben oldalról nézve a piramist, a 2 gömb alá 3 gömb kerül, és mivel négyzet alapú, így a rétegben felhasznált gömbök száma 9 lesz. Hasonlóan gondolkodhatunk a további rétegek esetén is. Visszafelé haladva minden réteg „oldala” egy gömbbel növekszik, megállapíthatjuk, hogy lényegében az n. réteg elkészítéséhez $(12-n+1)^2$ gömb szükséges. Nézzük meg rétegenként:

réteg	gömb darabszám
12.	1
11.	$2^2=4$
10.	$3^2=9$
9.	$4^2=16$
8.	$5^2=25$
7.	$6^2=36$
6.	$7^2=49$
5.	$8^2=64$
4.	$9^2=81$
3.	$10^2=100$
2.	$11^2=121$
1.	$12^2=144$

Miután kiszámoltuk, hogy egy adott réteg hány darab gömböt tartalmaz össze kell adnunk a rétegekben levő gömbök számát, azaz, az első 12 szám négyzetösszegét, ami nem más, mint $144+121+100+81+64+49+36+25+16+9+4+1=650$ gömb. Nagyobb piramist már nem tudnának építeni, mivel ahhoz még $169-50$, azaz 119 gömb kellene.

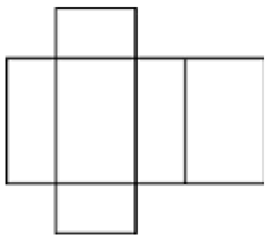
4. Misi születésnapjára egy marcipánbevonatú meglepetéstortát kapott barátaitól, melynek mérete $16\,cm \times 16\,cm \times 16\,cm$. Fel tudja-e osztani 16 egybevágó (egyforma) téglatestre 8 vágással (síkkal) a tortát? Amennyiben sikerül Misinek ilyen módon feldarabolni a tortát rajzold le a kis szelet (téglatest) testhálóját, határozd meg az éleinek hosszát, végül határozd meg mennyi a térfogata egy ilyen szeletnek!
A kapott téglatestek között nem teszünk különbséget a díszítés miatt.

Megoldás. Szimbolizáljuk a vágásokat egy-egy síkkal. Gondoljuk át, hogyan kaphatunk 16 darab egybevágó téglatestet. Ha csupa párhuzamos síkkal szeretnénk feldarabolni egybevágó részekre a tortát, akkor 15 darab síkra volna szükségünk, ami egyrészt páratlan szám, másrészt több, mint amennyi sík a rendelkezésünkre áll. Ahhoz, hogy páros számú síkkal páros számú egybevágó darabokra osszuk fel a tortát, legalább egy sík merőleges kell, hogy legyen a többi síkra, s ez a sík meg fogja duplázni a párhuzamos síkok által meghatározott egybevágó szeletek számát.

Tehát $\frac{16}{2}$ azaz 8 egybevágó szeletet kell létrehoznunk $8-1=7$ sík segítségével.

A 7 sík pontosan 8 egybevágó szeletre tudja osztani a tortát, melyet ha egy olyan merőleges síkkal vágunk el, mely a torta mélységének felénél halad át, akkor megkaphatjuk a 16 darab egybevágó szeletet, tehát Misi el tudja osztani igazságosan a tortát.

Egy ilyen szelet, ami egy téglatest kiterített hálója a következőképpen néz ki:



Dimenziói: $2\ cm\ \times\ 8\ cm\ \times\ 16\ cm.$

Térfogata: $V = abc = 2 \cdot 8 \cdot 16 = 256 cm^2$.

7. évfolyam

1. Mihály apó puttonya mézes pogácsával van tele. Kiveszünk belőle 11-et, és ebből 9-et egy dobozba, 2-t pedig egy tálba teszünk. Újra kiveszünk 11-et, az előbbi módon elosztjuk, majd ezt addig folytatjuk, míg a puttonyban már csak 9 mézes pogácsa marad.
Ekkor a tál tartalmát kezdjük felosztani hasonlóképp: egyszerre 11-et markolunk belőle, ebből 9 egy tasakba kerül, 2 pedig egy tányérra, egészen addig míg a tányéron 66 pogácsa nem lesz, a tálban viszont csak 3 marad. Hány mézes süti volt Mihály apó puttonyában eredetileg?

Megoldás. Mivel a tányéron 66 pogácsa van, innen tudjuk hogy 33-szor tettünk bele pogácsát. Tehát a tasakban $9 \cdot 33$, azaz 297 pogácsa van. Kiszámítható, hogy a tálban a felosztás előtt $297+66+3=366$ pogácsa volt. Mivel ide is kettesével raktuk a pogácsákat, így tudjuk, hogy 183 alkalommal nyúltunk bele a puttonyba. Tehát ott $183 \cdot 11+9=2022$ pogácsa volt eredetileg.

2. Egy nagy társaságba jófejek és füllentők jöttek össze. A jófejek mindig igazat mondanak, a füllentők viszont mindig fülletenek.
a) Egy kerek asztal köré kilencen ülnek le. Valaki megkérdezi őket, hogy milyen természetű emberek között ülnek. Mindenki ugyanazt a választ adja: „*az egyik szomszédom jófej, a másik füllentő*”. Hány jófej és hány füllentő ülhet az asztalnál? Van-e többféle megoldás?
b) Mi a helyzet abban az esetben, ha egy 7 fős asztal körül kapjuk ugyanezeket a válaszokat?
Ebben az esetben van-e többféle megoldás?
c) Általános esetben (tetszőleges számú személy ül az asztal körül) mi a megoldás?

Megoldás. a) Válasszunk ki egy személyt, és tegyük fel róla, hogy ő füllentő. A szerepe miatt vagy mindkét szomszédja füllentő, vagy mindkettő jófej. Ha mindketten jófejek, az ő szomszédaik jófejek kell hogy legyenek, hisz igazat mondtak amikor azt mondták, hogy az egyik szomszédjuk füllentő, a másik jófej. Ezeknek a jófejeknek már füllentő szomszéd kell. Ezeknek a füllentőknek jófej a másik szomszédjuk is, hisz ők hazudnak. Ezzel a kör be is zárult, és megkaptuk a felső ábrán látható ülésrendet. A 9 fő között 6 jófej és 3 füllentő van.
A másik eset, hogy a kiinduló helyen ülő füllentő személy mindkét szomszédja füllentő. Ebben az esetben az ő másik szomszédaik is füllentők, és így továbbhaladva kiderül, hogy lehetséges az az eset is, amikor mind a 9 személy füllent.
b) Induljunk ki megint abból, hogy a megfigyelt személy füllentő. Az a) pont alatt leírt módon gondolkodva felsorakoztathatjuk egymás mellé a jófejeket és a füllentőket, de amikor a kör bezárulna, ellentmondáshoz jutunk. A kérdőjelekkel jelölt mezőben lévő személynek a mellette ülő jófej állítása szerint füllentőnek kell lennie, míg a füllentő szomszéd állítása miatt ő egy jófej. Tehát csak abban az esetben jutunk helyes gondolatmenethez, ha az asztal körül csupa füllentő ül.
c) Általános esetben:
Akárhányan ülnek az asztal körül, mindig előfordulhat, hogy mindannyian füllentők.
Ha az asztal körül ülők száma osztható 3-mal, akkor lehetséges, hogy a kétharmaduk jófej, egyharmaduk pedig füllentő, és a felső ábrán ábrázolt helyzetben ülnek az asztal körül: minden füllentőnek két jófej szomszédja van.

Ha az asztal körül ülők száma nem osztható hárommal, csakis füllentők ülhetnek az asztal körül. Egyéb feltételezések esetén ellentmondásba ütközünk.

3. Adott az $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$ **kifejezés.**

Tehát, ha $n=2$**, akkor a kifejezés értéke** $\frac{3}{2}$ **lesz.**

a) Mennyi a kifejezés értéke, ha $n=5$**?**
b) Ha tudjuk, hogy a kifejezés értéke 2022**, hány tényező alkotja a szorzatot?**

Megoldás.

a) $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}=3$.

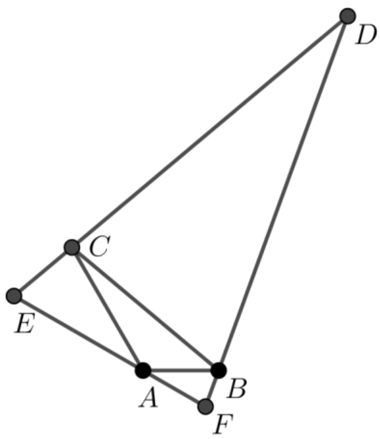
b) $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=2022$, tehát

$\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}=2022.$

Innen: $\frac{n+1}{2}=2022$, ahonnan $n+1=4044$. Tehát a szorzatnak $n-1$, azaz 4042 tényezője van.

4. Az ABC **háromszög külső szögfelező egyenesei (a külső szögek szimmetriatengelyei) egy olyan háromszöget alkotnak, aminek a belső szögei** $30°$**,** $70°$ **és** $80°$**-osak. Határozd meg az** ABC **háromszög belső szögeit!**

Megoldás. Legyenek az ABC háromszög A, B és C csúcsánál lévő belső szögei rendre α, β és γ, a nekik megfelelő külső szögek pedig α_1, β_1 és γ_1. Az α_1 szög felezőegyenese az EF, a β_1 szögé az FD, a γ_1 szög felezője pedig az ED egyenes.



Figyeljük meg az ACE háromszöget! Ennek a belső szögei $\frac{\alpha_1}{2}, \frac{\gamma_1}{2}$, valamint az E csúcsnál lévő $70°$-os szög.

Tehát $\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\gamma_1}{2}+70^\circ=180^\circ$. Tudjuk, hogy a háromszög külső szöge egyenlő a vele nem szomszédos két belső szög összegével, tehát $\alpha_1=\beta+\gamma$, valamint $\gamma_1=\alpha+\beta$. Ezeket az összefüggéseket a fenti egyenletbe helyettesítve a $\frac{\beta+\gamma}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}=110^\circ$ egyenlethez jutunk. Rendezés után a $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}+\frac{\beta}{2}=110^\circ$ összefüggést kapjuk. Mivel $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, így $\frac{180}{2}+\frac{\beta}{2}=110^\circ$, amiből könnyen megkapható, hogy $\frac{\beta}{2}=20^\circ$, azaz $\beta=40^\circ$. Hasonló módon számíthatjuk ki az ABF háromszögből, hogy $\gamma=20^\circ$, a BCD háromszögből pedig, hogy $\alpha=120^\circ$.

8. évfolyam

1. Egy négyjegyű szám középső számjegyeit letöröljük. Az így kapott kétjegyű szám az eredeti szám 99-ed része. Melyik lehet ez a négyjegyű szám?

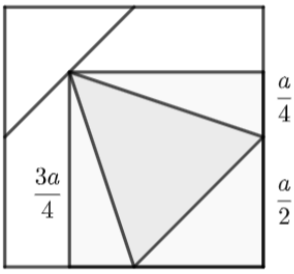
Megoldás. Felírható az $\overline{abcd} = 99 \cdot \overline{ad}$ egyenlet, amit átírhatunk a következő alakba: $1000a + 100b + 10c + d = 990a + 99d$. Rendezés után $5(a + 10b + c) = 49d$. A d osztható 5-tel, de 0 nem lehet, így $d = 5$. Ugyanakkor $a + 10b + c = 49$. Innen a b csak 4 lehet, azaz $a + c = 9$.
Összesen 9 db négyjegyű szám felel meg a feltételnek, ezek: 1485, 2475, 3465, 4455, 5445, 6435, 7425, 8415, 9405.

2. Az ábrán látható négyzetben szakaszfelező pontok összekötésével kaptuk meg a $9\ cm^2$ területű szürke háromszöget. Határozd meg a négyzet területének nagyságát!

Megoldás. Legyen a négyzet oldala a. Rajzoljuk be a $\frac{3a}{4}$ oldalú négyzetet, amelybe a szürke háromszög beleilleszkedik. Ekkor a háromszög területe felírható a következő alakban:

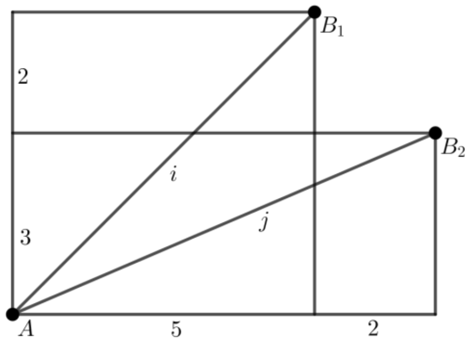
$$T_{sz} = \left(\frac{3a}{4}\right)^2 - \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} - 2 \cdot \frac{\frac{3a}{4} \cdot \frac{a}{4}}{2} = \frac{a^2}{4}.$$

A szürke terület tehát a négyzet területének negyedével egyenlő, azaz a négyzet területe $36\ cm^2$.



3. Egy hangya egy $2\ cm$, $3\ cm$ és $5\ cm$ oldalélű téglatest egyik csúcsán pihen. Szeretne eljutni a tőle legtávolabbi csúcshoz a lehető legrövidebb úton a téglatest felszínén haladva. Határozd meg ezt az útvonalat és számold ki a hosszúságát!

Megoldás. Két pont között a legrövidebb távolság az egyenes. Hajtogassuk ki a téglalap oldalait a síkba és figyeljük meg, hogy mely útvonalak jöhetnek számításba (az ábrán két lehetséges útvonalat jelöltünk). A hangyának minden esetben át kell haladnia a téglatest két oldallapján. A Pitagorasz-tétel segítségével kiszámítható ezeknek az útvonalaknak a hossza. A legrövidebb utat abban az esetben kapjuk, ha a hangya a két szomszédos $5\,cm$ oldalhosszúságú téglalapon keresztül mászik. Ebben az esetben a hangya által megtett út $|AB_1| = \sqrt{5^2 + (3+2)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ cm lesz.



4. Fekete Mihály, versenyünk névadója $\overline{abbc}$-ben született Zentán, és $\overline{adef}$ -ben Jeruzsálemben hunyt el $\overline{fa}$ évesen. Idén $\overline{agc}$ éves lenne. Határozd meg Fekete Mihály születésének és halálának évét, ha *a,b,c,d,e,f* és *g* különböző számjegyeket jelölnek!

Megoldás. Nyilvánvalóan $a=1$. Írjuk fel a következő összeadást:

$$\begin{array}{r} 1bbc \\ +\quad 1gc \\ \hline 2022 \end{array}$$

Innen $c=6,\ g=3$ és $b=8$.

Az

$$\begin{array}{r} 1886 \\ +\quad f1 \\ \hline 1def \end{array}$$

összeadásból pedig: $f=7, e=5$ és $d=9$. Fekete Mihály 1886-ban született és 1957-ben hunyt el.

9. évfolyam

1. Egy sportversenyen 15 csapat vett részt, és minden csapat minden csapattal egyszer mérkőzött meg. A győzelemért 3, a döntetlenért 2, a vereségért 1 pont járt. A verseny végén minden csapatnak más volt a pontszáma, az utolsó csapat 21 pontot szerzett. Igaz-e, hogy a győztes csapat legalább egyszer döntetlent játszott?

Megoldás. A versenyen a csapatok összesen $\frac{15\cdot 14}{2}=105$ mérkőzést játszottak. Egy mérkőzésen mindig 4 pont sorsa dőlt el, így együttesen összesen $4\cdot 105=420$ pontot szereztek a csapatok. Mivel az utolsó 21 pontot szerzett, így az őt megelőző legalább 22-t, az őt megelőző 23-at,..., az első legalább 35 pontot szerzett. Mivel

$$21+22+23+...+35=\frac{(21+35)\cdot 15}{2}=28\cdot 15=420,$$

ezért csak ez a lehetőség valósulhatott meg, hogy mindenki a lehető legkevesebb pontot szerezte, azaz az első csapatnak 35 pontja lett 14 mérkőzésből.
Tegyük föl, hogy a 35 pontot kizárólag győzelemből és vereségből érték el. Jelöljek x a győzelmek számát. Ekkor

$$3x+(14-x)\cdot 1=35,$$
$$2x=21,$$

Vagyis x nem lehet egész szám, azaz csak győzelmekkel és vereségekkel nem lehet 35 pontot szerezni. Így a győztes csapat játszott legalább egy döntetlent. Például 10 győzelem, 1 döntetlen és 3 vereség esetén éppen 35 pontot szerezhettek.

2. Keressük meg az összes olyan kétjegyű számot, amelyre igaz, hogy ha a számot elosztjuk a számjegyei szorzatával, akkor a hányados 5, a maradék 2.

Megoldás. A keresett szám legyen $\overline{xy}$ alakú, ahol x nyilván nem lehet 0. A feltétel alapján ha $10x+y$-t elosztjuk xy-nal, akkor a hányados 5, a maradék 2. Ezek szerint

$$5\cdot xy+2=10x+y,$$
$$5xy-10x-y+2=0,$$
$$(5x-1)(y-2)=0.$$

Az első zárójelben semmilyen x számjegy esetén nem kaphatunk nullát, tehát az egyenlet megoldásai: $y=2$ és x tetszőleges nullától különböző számjegy. A lehetséges megoldások tehát: 12, 22, 32, 42, 52, 62, 72, 82, 92. Ellenőrzéssel azt kapjuk, hogy a 12-n kívül valóban mind megoldása is a feladatnak.

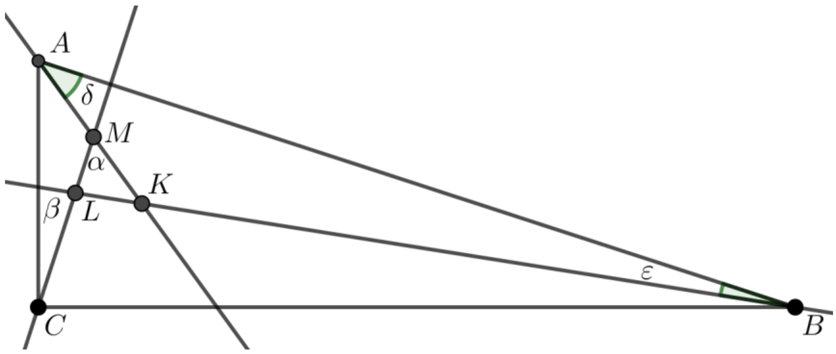
3. Egy derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság a hegyesszögek szögfelezőivel olyan α és β hegyesszögeket zár be, melyek aránya $2:3$. Mekkorák a derékszögű háromszög hegyesszögei?

Megoldás. Tekintsük az alábbi ábra szerinti jelöléseket. A két szögfelező és a magasságvonal által létrehozott háromszöget KLM háromögnek neveztük el.
Az ABC háromszög hegyesszögeinek összege $2\varepsilon+2\delta=90°$, innen $\varepsilon+\delta=45°$. Ez alapján az AKB háromszögben $AKB\sphericalangle=135°$.

A β-val jelölt szög és a $KLM\sphericalangle$ csúcsszögek, ezért egyenlők. A KLM háromszögben az AKB külső szög egyenlő a két nem mellette fekvő belső szöggel, vagyis $\alpha+\beta=135°$.

Mivel a feltétel szerint $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2}{3}$, és ezért $\alpha=\frac{2}{3}\beta$, innen pedig $\frac{2}{3}\beta+\beta=135°$, ahonnan egyszerű számolással kapjuk, hogy $\beta=81°$ és $\alpha=54°$.

A β és az ε szög ugyanannak a derékszögű háromszögnek a hegyesszögei, így $\beta+\varepsilon=90°$, ahonnan az előzőek alapján $\varepsilon=9°$. Hasonlóan az α és a β szög ugyanannak a derékszögű háromszögnek a hegyesszögei, így $\alpha+\delta=90°$, ahonnan az előzőek alapján $\delta=36°$. Az ABC háromszög hegyesszögei tehát $2\varepsilon=18°$ és $2\delta=72°$.



4. Legyen az $x_1, x_2, \ldots, x_{2022}$ egész számok szorzata 1.

a) Bizonyítsd be, hogy az $x_1+x_2+\ldots+x_{2022}$ összeg nem osztható 4-gyel!

b) Számoljuk ki az $\left(x_1+\frac{1}{x_2}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_3}\right)\ldots\left(x_{2022}+\frac{1}{x_1}\right)$ kifejezés lehetséges értékét!

Megoldás. a) Mivel $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2022}=1$, ezért $x_1, x_2, \ldots, x_{2022} \in \{1,-1\}$, és a -1-esek száma páros. Jelölje a az 1-esek, b a -1-esek számát (b páros szám). Ekkor a kérdéses összeg így számítható ki:

$$x_1+x_2+\ldots+x_{2022}=$$
$$=a\cdot 1+b\cdot(-1)=a-b=a+b-2b=2022-2b=2022-2\cdot(2k)=2022-4k=$$
$$=2020-4k+2=4\cdot(505-k)+2,$$

ahol k nemnegatív egész szám. Tehát a kérdéses összeg 4-gyel osztva 2-t ad maradékul.

b) Ha mindegyik x_i szám egyenlő 1-gyel, akkor $\left(x_1+\frac{1}{x_2}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_3}\right)\ldots\left(x_{2022}+\frac{1}{x_1}\right)=2^{2022}$. Ha mindegyik x_i szám egyenlő -1-gyel, akkor $\left(x_1+\frac{1}{x_2}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_3}\right)\ldots\left(x_{2022}+\frac{1}{x_1}\right)=(-2)^{2022}=2^{2022}$. Ha a számok között van 1-es és -1-es is, akkor van két szomszédos, amely előjele különbözik. Legyenek ezek x_j és x_{j+1}. Ekkor $x_j+\frac{1}{x_{j+1}}=\frac{x_jx_{j+1}+1}{x_{j+1}}=\frac{-1+1}{x_{j+1}}=0$ miatt az egész szorzat 0 lesz.

10. évfolyam

1. Bizonyítsd be, hogy az $n = 99...900...025$ **szám, amelyben** k **darab** 0 **és** 9 **számjegy szerepel, minden** k **természetes szám esetén négyzetszám!**

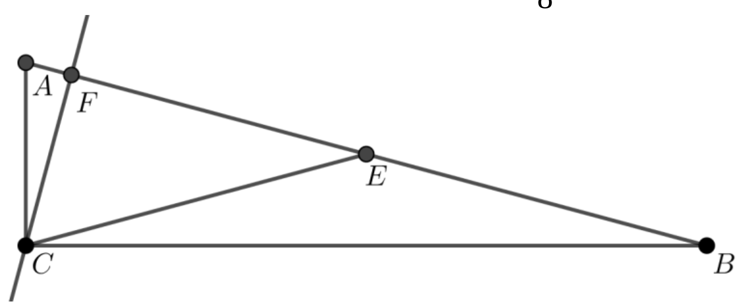
Megoldás. Vegyük észre hogy, ha $k = 1$, akkor $n = 9025 = 95^2 = \left(10^2 - 5\right)^2$. Ha $k = 2$, akkor $n = 990025 = 995^2 = \left(10^3 - 5\right)^2$. Könnyen belátható, hogy minden esetben $n = \left(10^{k+1} - 5\right)^2$.

2. Oldd meg a következő egyenletet a prímszámok halmazán: $2x + 3y + 6z = 78$**.**

Megoldás. Rendezzük át az egyenletet a következő alakba: $2x = 3(26 - y - 2z)$. Mivel az egyenlet jobb oldala osztható 3-mal, ezért a bal oldal is osztható, ahonnan $x = 3$. Ebből következik, hogy $y + 2z = 24$. Innen azonnal látszik, hogy y páros szám, azaz az egyedüli lehetőség $y = 2$. Végezetül pedig $z = 11$. Tehát az egyedüli megoldás az $(x, y, z) = (3, 2, 11)$.

3. Bizonyítsd be, hogy abban a derékszögű háromszögben, amelynek egyik hegyesszöge 15°**-os, az átfogóhoz tartozó magasság az átfogó negyedével egyenlő. Számítsd ki a háromszög területét az átfogó függvényében!**

Megoldás. Legyen az ABC derékszögű háromszög B csúcsnál levő szöge 15°-os, a C csúcsnál levő szöge pedig 90°-os. Legyen az F pont a C pontból az átfogóra bocsátott merőleges talppontja, az E pont pedig az átfogó felezőpontja. Ennek alapján a CE az átfogó fele, azaz $\frac{c}{2}$, de ez egyidőben a CFE derékszögű háromszög átfogója, amely félszabályos, mert a CFE szöge 30°-os, amiből az következik, hogy $CF = \frac{CE}{2} = \frac{c}{4}$. Így az ABC háromszög területe pedig $\frac{c^2}{8}$.



4. A táblán a következő hiányos egyenlet áll $x^3 + ...x^2 + ...x + ... = 0$**. Két játékos felváltva ír a kipontozott helyekre valós számokat együtthatónak. Az első játékos célja:**
a) olyan egyenletet kapni, amelynek pontosan egy valós gyöke van,
b) olyan egyenletet kapni, amelynek három, nem feltétlenül különböző, valós gyöke van.
Megakadályozhatja-e ebben az első játékost a második játékos külön az a) és külön a b) esetben?

Megoldás. a) $x^3 + ...x^2 + ...x + ... = 0$. Írjunk fel egy olyan harmadfokú egyenletet, melynek pontosan egy valós gyöke van. Például $(x+a)(x^2+1)=0$, azaz $x^3 + ax^2 + x + a = 0$, így az első játékos az x együtthatóját 1-nek választja. Ezután bármit ír a második játékos bármelyik helyre, az első játékos beírja ugyanezt a számot a fennmaradó helyre, ezzel biztosítva magának a nyertes stratégiát.

b) Az első játékos 0-t ír a konstans helyére. Ekkor a következő alak marad: $x(x^2 + ax + b) = 0$. Ha a második játékos az a helyére ír valamit, akkor az első játékos a b helyére 0-t (vagy bármely negatív számot) ír. Ha a második játékos a b helyére ír valamit, akkor az első játékos a-t megválaszthatja úgy, hogy $a^2 \geq 4b$ (vagy az a helyére $-(b+1)$-et ír).

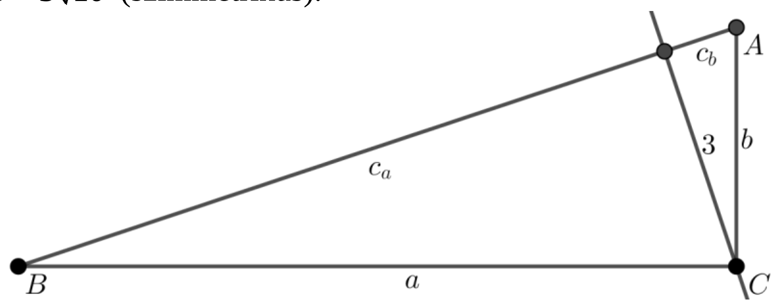
11. évfolyam

1. Oldd meg az $\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}=2\sqrt{2}$ egyenletet!

Megoldás. Kezdőhelyzetben az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk be $\sin x\cdot\cos x$-szel, majd emeljük négyzetre, akkor $\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x=8\sin^2 x\cdot\cos^2 x$.
Ezt rendezve $2\sin^2 2x-\sin 2x-1=0$.
Az eredeti egyenletünk megoldásai a kapott egyenletnek is megoldásai. Az utóbbi egyenletből adódik, hogy $\sin 2x=1 \ \vee\ \sin 2x=-\dfrac{1}{2}$, ahonnan pedig $x\in\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ \dfrac{7\pi}{12}+k\pi,\ \dfrac{11\pi}{12}+k\pi,\ ahol\ \ k\in\mathbb{Z}\right\}$.
Az eredeti egyenletet csak az $x\in\left\{\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\ \dfrac{11\pi}{12}+2k\pi,\ \dfrac{19\pi}{12}+2k\pi,\ ahol\ \ k\in\mathbb{Z}\right\}$ gyökök elégítik ki.

2. Az ABC derékszögű háromszögben a két befogó összege $4\sqrt{10}$, az átfogóra húzott magassága 3. Határozd meg a háromszög oldalainak hosszát!

Megoldás. Euklideszi-tétel szerint a magasság az átfogón lévő metszetek geometriai közepe, vagyis $c_a\cdot c_b=9$, $c\cdot c_a=a^2$, $c\cdot c_b=b^2$. Mivel $a+b=4\sqrt{10}$, akkor négyzetre emelve $a^2+2ab+b^2=160$, behelyettesítés után $a^2\cdot b^2=c^2\cdot c_a\cdot c_b=9c^2$, ezért a befogók szorzata $3c$.
Most a Pitagorasz-tétel szerint $a^2+2ab+b^2=c^2+2\cdot 3c=160$, azaz $c^2+6c-160=0$ egyenlet két gyöke 10 és -16, ebből csak a $c=10$ elfogadható, tehát az átfogó 10, a befogók szorzata 30 és összege $4\sqrt{10}$, akkor, ez utóbbi gyökei a háromszög befogói $a=\sqrt{10}$ és $b=3\sqrt{10}$ (szimmetrikus).



3. Három prímszám szorzata az összegük ötszörösével egyenlő. Add meg az összes lehetséges megoldást!

Megoldás. Jelölje x, y és z a három prímszámot, a feladat feltételei alapján $xyz=5\cdot(x+y+z)$, ezért x, y és z közül valamelyik egyenlő öttel, legyen ez $x=5$. Tehát $yz=5+y+z$. Ezt kielégítő y és z értékre fennáll, hogy $y-1=\dfrac{6}{z-1}$ és $z\neq 1$. Ezek alapján z lehetséges értékei 2, 3, 4, 7, az y lehetséges értékei 7, 4, 3, 2, és ebben nem lehet a 4. A válasz tehát 2, 5 és 7.

4. Mivel egyenlő az $S=f\left(\frac{1}{2022}\right)+f\left(\frac{2}{2022}\right)+...+f\left(\frac{2021}{2022}\right)+f(1)$ **összeg, ha** $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$ **?**

Megoldás. Vegyük észre, hogy $f(1-x)=1-f(x)$.

Innen $f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\left(1-\frac{4^x}{4^x+2}\right)=1,$

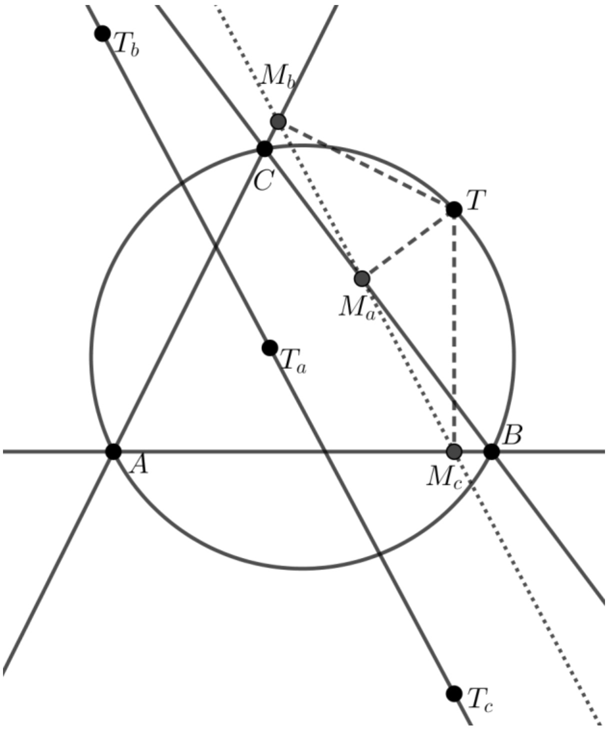
ezért $S=1010+f\left(\frac{1011}{2022}\right)+f(1)=1010+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=1011\frac{1}{6}$.

1. Határozd meg azokat a prímszámokat, amelyekre teljesül, hogy a köbükhez egyet hozzáadva egy szám természetes szám négyzetét kapjuk!

Megoldás. Legyen a keresett prímszám p, a keresett négyzetszám pedig n^2. Ekkor felírható, hogy: $p^3+1=n^2$, ahonnan ekvivalens átalakításokkal adódnak a következők: $p^3=n^2-1$, ahonnan $p^3=(n-1)(n+1)$. Innen két eset lehetséges. Vagy $n-1=1$ és $n+1=p^3$, ahonnan nem kapunk megoldást, vagy pedig $n-1=p$, és $n+1=p^2$, ahonnan $p^2-p=2$, amelynek egyedüli megoldása a $p=2$ prímszám.

2. Legyen a T pont az ABC háromszög köré írható körének egy tetszőleges pontja. Legyenek T_a, T_b, T_c pontok rendre a T pont tengelyes tükrözéssel kapott képei a BC, AC, AB egyenesekhez viszonyítva. Bizonyítsd be, hogy a T_a, T_b, T_c pontok kollineárisak!

Megoldás. Legyenek M_a, M_b, M_c pontok rendre a T pont merőleges vetületei a BC, AC, AB egyenesekre. Ezek a pontok kollineárisak (Simson-egyenes). Vegyük észre, hogy a T_a, T_b, T_c pontok rendre az M_a, M_b, M_c pontok $H_{T,2}$ homotéciával kapott képei, emiatt kollineárisak.



3. Bizonyítsd be, hogy minden x, y, z pozitív valós számra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$xy^2z^3 + yz^2x^3 + zx^2y^3 \le x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3.$$

Megoldás. A számtani és a mértani közepekre fennálló egyenlőtlenségekből következnek a következő egyenlőtlenségek:

$$x^3y^3 + x^3y^3 + x^3z^3 \geq 3\sqrt[3]{x^3y^3x^3y^3x^3z^3} = 3x^3y^2z,$$
$$y^3z^3 + y^3z^3 + y^3x^3 \geq 3\sqrt[3]{y^3z^3y^3z^3y^3x^3} = 3y^3z^2x,$$
$$z^3x^3 + z^3x^3 + z^3y^3 \geq 3\sqrt[3]{z^3x^3z^3x^3z^3y^3} = 3z^3x^2y.$$

Ezeket az egyenlőtlenségeket összeadva majd mindkét oldalt 3-mal elosztva pontosan a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk meg.

4. Hányféleképpen tölthető ki egy 2022×2023-as táblázat 1 és -1 számokkal úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban a számok szorzata 1 legyen?

Megoldás. A bal felső 2021×2022-es téglalapot kitöltjük tetszőlegesen. Ezt összesen $2^{2021\cdot2022}$-féleképp tehetjük meg. Jelölje A ezeknek a számoknak a szorzatát. Megmutatjuk, hogy ez a válasz a keresett kérdésre. A résztéglalap kitöltése után az utolsó oszlop első 2021 mezőjében, valamint az utolsó sor első 2022 mezőjében egyértelmű, melyik számnak kell szerepelnie ahhoz, hogy kiegészítse a megfelelő szorzatokat 1-re. Jelöljük az ezekben a részekben található számok szorzatát rendre B-vel és C-vel. Egyedüli kérdés, hogy kitölthetjük-e ellentmondásmentesen téglalap jobb alsó mezőjét. Jelöljük az ebben a mezőben található számot D-vel. Tudjuk, hogy $AB = AC = 1$, ahonnan $B = C$, vagyis a D mező mindig ellentmondásmentesen kitölthető. A keresett válasz tehát $2^{2021\cdot2022}$.

A XX. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY DÍJAZOTTJAI

5. évfolyam

1. Góbor Erik, Kókai Imre Általános Iskola, Temerin, **I. díj**
2. Balázs Piri Dávid, Kárász Karolina Általános Iskola/Cofman Iskola, Horgos, **I. díj**
3. Cseszkó Dávid, Jovan Jovanović Zmaj Általános Iskola, Magyarkanizsa, **II. díj**
4. Péter Ádám, Ady Endre Kísérleti Általános Iskola, Kishegyes, **II. díj**
5. Pozsgai Balázs, Cseh Károly Általános Iskola, Ada, **III. díj**
6. Erdélyi Zamúr, Petőfi Sándor Általános Iskola/Cofman Iskola, Hajdujárás, **III.díj**
7. Gordos Emese, Cseh Károly Általános Iskola, Ada, **III. díj**

6. évfolyam

1. Juhász Krisztián, Petőfi Sándor Általános Iskola, Zenta, **I. díj**
2. Balázs Piri Kevin, Kárász Karolina Általános Iskola, Horgos, **I. díj**
3. Kopunović Edina, Hunyadi János Általános Iskola, Csantavér, **II. díj**
4. Csernák Péter, Stevan Sremac Általános Iskola, Zenta, **II. díj**
5. Kurnyák Zsófia, Ady Endre Kísérleti Általános Iskola, Kishegyes, **III. díj**

7. évfolyam

1. Zsivanac Léna, Cofman Iskola, Szabadka, **I. díj**
2. Földi Krizsán Kitty, Ady Endre Kísérleti Általános Iskola, Kishegyes, **II. díj**
3. Nagy Martina, Sonja Marinković Általános Iskola, Szentmihály, **III. díj**

8. évfolyam

1. Živanac Beren, Cofman Iskola, Szabadka, **I. díj**
2. Kadvány Júlia, Október 18. Általános Iskola/Cofman Iskola, Zentagunaras, **I. díj**
3. Papp Szabolcs, Kókai Imre Általános Iskola, Temerin, **II. díj**
4. Kiss Noé, Stevan Sremac Általános Iskola, Zenta, **II. díj**
5. Világos Csongor, Cseh Károly Általános Iskola, Ada, **III. díj**
6. Sövény Petra, Petőfi Sándor Általános Iskola, Hajdujárás, **III. díj**
7. Engi Anabela, Csáki Lajos Általános Iskola, Topolya, **III. díj**

9. évfolyam

1. Ristić Anna, Jovan Jovanović Zmaj Gimnázium, Újvidék, **I. díj**
2. Csanádi Petra, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Verebélyi Viktor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
4. Kis Botond, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
5. Gordos Beáta, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

10. évfolyam

1. Kiss Balázs, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Buják Réka, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
3. Dobó Ármin, Svetozar Marković Gimnázium, Szabadka, **II. díj**
4. Zsiga Dávid, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
5. Kratok Bence, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
6. Huszta Kristóf, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

11. évfolyam

1. Tóth Katarina, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **I. díj**
2. Erdélyi Nimród, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Kiss Csenge, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
4. Szabó Dorina, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

12. évfolyam

1. Balázs Bálint, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
2. Kőműves Emese, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **II. díj**
3. Kálmán Ádám, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**
4. Török Csongor, Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium, Zenta, **III. díj**

A Nemzetközi Magyar Matematikaverseny Délvidéket képviselő középiskolás csapata a régióvezetővel Csikós Pajor Gizellával.

FEKETE MIHÁLY (1886-1957)

Fekete Mihály 1886. július 19-én született Zentán. Eredeti családi neve Schwarz volt. Elemi és középiskolai tanulmányainak befejezése után a budapesti és a göttingai egyetemeken tanult matematikát. Az egyetem elvégzése után mint tehetséges matematikus Beke Manó professzor tanszékére került. Pár évi tanársegédi működés után a Tanácsköztársaság alatti magatartása miatt állásától megfosztották, sőt még a Matematikai és Fizikai Társulat is törölte tagjai sorából. Ezután középiskolai tanárként működött. Először a budapesti Nagymező utcai polgári iskolában kapott állást. Ebben az iskolában 1919-ig, majd igen rövid ideig a Váci utcai és a Práter utcai leánygimnáziumban tanított, ám innen is elbocsátották. 1925-től a budapesti izraelita hitközség fiúgimnáziumának tanára lett, egészen 1928-ig, amikor két egyetemtől is kapott professzori meghívást. Ő a Jeruzsálemi Egyetem matematika tanszékének meghívását fogadta el, amelynek később dékánja is volt. A meghívást Hadamard és Landau is szorgalmazta, mert jól ismerték és nagyra értékelték Fekete Mihály munkásságát. Fekete Mihály a Jeruzsálemi Egyetem tanára volt elhunytáig.

„Fekete Mihályt sajnos személyesen nem ismerhettem. Volt tanítványai, ismerősei, barátai, elsősorban Bálint Elemér elbeszélései alapján azonban olyan kép rajzolódott elém, amely azt mutatta, hogy Fekete Mihály nemcsak kiváló és tehetséges matematikus volt, hanem igen jó pedagógus, nagyszerű előadó is. Egyénisége pedig, emberi jó tulajdonságai miatt, mindenki számára, aki ismerte, rendkívül megnyerő volt. Fekete Mihály egyike volt Fejér Lipót azon tanítványainak, akik matematikai munkásságukkal nagy elismerést szereztek maguknak. Több dolgozatából kitűnik, hogy tanárától, Fejér Lipóttól kapott indítékot egy-egy probléma vizsgálatához. Fekete Mihály legjelentősebb és egyben legismertebb eredményei a ponthalmazok elmélete, az algebra és a komplex függvénytan határterületéhez tartoznak. Igen értékes és szép eredményeket ért el azonban a Fourier-sorok elméletében, a divergens sorok szummációjában, az interpoláció-elméletben és a matematikusi pályája kezdetén a számelméletben is" – írta róla Balázs János a Matematikai Lapokban, 1958-ban.

Rátz László matematikatanár javaslatára, Fekete Mihály volt Budapesten a gimnazista Neumann János egyik magántanára. Még az érettségi előtt a zseniális ifjú Neumann (18 éves korában) tehetséges tanárával, Fekete Mihállyal, közösen írt és jelentetett meg tudományos dolgozatot. A Neumann Jánossal közösen írt dolgozata Fekete Mihály irodalmi működésének 11. évében jelent meg, s ez a 19. publikált tanulmánya. A megjelenés idején, 1922-ben, Neumann János már Berlinben egyetemi hallgató volt. Az 1922. évi nyomdába küldést megerősíti az a tény is, hogy a tanulmány bevezetőjében Fejér Lipót 1922. évi egyik cikkére is hivatkoznak. Fejér Lipót egy problémáját az ún. Fekete-féle pontok segítségével oldotta meg. Egyébként Fekete Mihály magányos alkotó volt, csak néhány esetben közölt közös cikket Szegő Gáborral, C. E. Win-nel és J. L. Walshsel. Neumann-nal nem publikált több közös művet. Azonban Neumann két esetben is általánosította Fekete tételeit. Fekete Mihály 1957. május 13-án hunyt el Jeruzsálemben.

Irodalom

[1] Természet Világa, Neumann-emlékszám, 134. évf. 2003. III. különszám

[2] Filep László: A Bolyaiaktól Erdős Pálig, Nyári Akadémia, Szabadka, 2003. augusztus 4.

[3] Sain Márton, Matematikatörténeti ABC, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.

[4] Balázs János, Fekete Mihály munkásságáról, Matematikai Lapok, 1958. 3-4. sz.

A NEMZETKÖZI MAGYAR MATEMATIKAVERSENYEK TÖRTÉNETE

„A magyar irodalom ötágú síp, összehangolhatatlan. Eléri még vajon a mi nemzedékünk, hogy egy jó munka mind e nemcsak külön-külön, de másként szóló sípot egyszer ismét összehangolja, illetve az eldugulástól megmenti?” (Illyés Gyula)

Az 1991. évi jubileumi szegedi Rátz László Vándorgyűlésen vetődött fel először – Bencze Mihály brassói és Oláh György komáromi matematikatanárok részéről – olyan középiskolai matematikaverseny szervezésének gondolata, amely lehetőséget ad arra, hogy a Kárpát-medence magyar anyanyelvű diákjai összemérhessék tudásukat. Elképzelésüket talán Dsida Jenő Psalmus Hungaricus című versének soraival lehetne leginkább jellemezni, amelyek refrénként térnek vissza a versenyeken:

„Elindulok, mint egykor Csoma Sándor,
hogy felkutassak minden egy magyart.
Székelyek, ott a bércek szikla-mellén,
üljetek mellém!
Magyarok ott a Tisza partján,
magyarok ott a Duna partján,
magyarok ott a tót hegyek közt
s a bácskai szőlőhegyek közt,
üljetek mellém!”

Az elhatározást tett követte. Az ötágú-sokágú síp Illyés-i szellemében, a nagyon hiányzó jó munka elvégzésének reményében került megrendezésre 1992-től a Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, évente 200-300 Kárpát-medence-i magyarajkú diák és tanár részvételével. Létrejöttét és hagyománnyá válását a régióvezetők áldozatos munkája tette lehetővé. Ők a következő személyek: a Délvidéken Szabó Magda és Csikós Pajor Gizella, Erdélyben Bencze Mihály és Szilágyi Judit, a Felvidéken Oláh György, Keszégh István és Mikó István, Kárpátalján Elek Ernő, Neubauer Ferenc, Balázsi Borbála és File-Kovács Erika, Magyarországon Urbán János, Pintér Ferenc és Kubatov Antal. A versenyek eddigi helyszínei: Komárom (1992), Vác (1993), Ungvár (1994), Paks (1995), Székelyudvarhely (1996), Kaposvár (1997), Szabadka (1998), Debrecen (1999), Dunaszerdahely (2000), Nagykanizsa (2001), Sepsiszentgyörgy (2002), Eger (2003), Nagydobrony (2004), Miskolc (2005), Zenta (2006), Szeged (2007), Kassa (2008), Gyula (2009), Szatmárnémeti (2010), Bonyhád (2011), Kecskemét (2012), Győr (2013), Csíkszereda (2014), Szabadka (2015), Budapest (2016), Somorja (2017), Kaposvár (2018), Marosvásárhely (2019). 2020-ban, 2021-ben és 2022-ben a versenyt sajnos nem lehetett megrendezni az egész világot súlytotta járványhelyzet miatt. Három év kihagyás után viszont a hagyomány folytatódott, és 2023-ban Miskolcon megrendezésre került a XXIX. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

2014 óta a verseny kibővült; immár általános iskolások részére is megszervezésre kerül a Nemzetközi Magyar Matematikaverseny. A versenyek eddigi helyszínei: Dunaszerdahely (2014), Nagyvárad (2015), Kecskemét (2016), Beregszász (2017), Szabadka (2018), Lakitelek (2019). Az öt régióvezető: a Délvidéken Tóth Gabriella, Erdélyben Bencze Mihály, a Felvidéken Liszkay Béla, Kárpátalján Román Erika, Magyarországon pedig Csordás Mihály.

E rangos nemzetközi megmérettetést három fontos tényező mozgatja és köti össze: az anyanyelv, a matematika szeretete és tisztelete, valamint a találkozókon születő vagy megerősödő barátság. A Nemzetközi Magyar Matematikaverseny lehetőséget ad az egységes magyar matematikai nyelv megteremtésére, a szabadidős programjának szerves részét képező kirándulás pedig alkalmat ad a különböző országok magyarlakta tájainak, kultúrájának, történelmének és szokásainak megismerésére. Az első rendezvényen, melynek színhelye Észak- és Dél-Komárom volt, Reimann Istvánnak, a zsűri elnökének zárószavai a következők voltak: „A két helyszín közötti Duna-hídon naponta többször is átkelve éreztük igazán, hogy ez a híd úgy kapcsolhat össze embereket és országokat, ahogyan azt a jövő Európájában elképzeljük.” Az immár közel harminc éve megrendezésre kerülő verseny valóban országokat és embereket köt össze, s erősen hisszük, hogy „Csak művelt nemzet tarthatja fenn magát Európa népei között, tehát a nemzet jövője kulturális előre haladásától függ.” (Eötvös József)