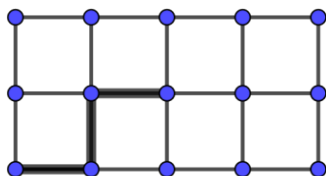


XXII. Fekete Mihály Emlékverseny

Első levelező forduló

12. évfolyam

1. Bizonyítsd be, hogy öt egymást követő természetes szám szorzata sohasem teljes négyzet!
2. Adott az ABC háromszög. Legyen az I pont a háromszögbe írt kör középpontja, a J pont pedig a háromszög azon hozzáírt körének középpontja, amely érinti a BC oldalt. Az IJ egyenes metszi a háromszög köré írt kört a K pontban, $K \neq A$. Bizonyítsd be, hogy a K pont az IJ szakasz középpontja!
3. Adott egy $m \times n$ -es négyzetrács, ahol m és n egynél nagyobb természetes számok, amelyek a rácspontok számát jelölik. Ezen számok függvényében legalább hány színre van szükségünk, ha ki szeretnénk színezni a négyzetrács rácspontjait úgy, hogy semelyik két szomszédos rácspont se legyen egyszínű, valamint bármely négy különböző pontot összekötő összefüggő út legalább háromszínű legyen? (Az ábrán látható egy 3×5 -ös négyzetrács, valamint egy négy különböző pontot összekötő összefüggő út.)



4. Határozd meg az összes olyan $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, amelyre igaz, hogy bármely két a és b természetes szám esetén $f(ab) = f(a)f(b)$, valamint az $f(a)$, $f(b)$ és $f(a+b)$ számok közül legalább kettő egyenlő!

Sikeres munkát kívánunk!

Az első levelező fordulóban a megoldások beküldésének határideje: **2024. október 11.**

Minden feladatot maximum 25 ponttal értékelünk. A megoldásokat részletesen kell indokolni!

A feladatok megoldásait A4-es formátumú lapon kérjük beadni. Nem szükséges minden feladatot új lapon kezdeni, viszont minden beadott lapon fel kell tüntetni a nevet és az évfolyamot. A feladatmegoldásokat tartalmazó lapokat egy dupla A4-es formátumú borítólapba kell beletenni. A borítólapra kérjük ráírni a következő adatokat: a versenyző neve, évfolyama, e-mail címe, telefonszáma, iskolájának neve és székhelye, a felkészítő tanár neve, telefonszáma és e-mail címe.

A megadott versenyzői és tanári e-mail címre minden forduló után el fogjuk küldeni a versenyző adott fordulóban elért pontszámát.

Minden további értesítés megtalálható lesz az **Ingenium Alapítvány** honlapján: <http://ingenium.rs/> illetve a **Bolyai Gimnázium** honlapján: <http://www.bolyai-zenta.edu.rs>

Postacím: Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium
L e v e l e z ő v e r s e n y
24400 Zenta, Posta utca 18.