

XXII. Fekete Mihály Emlékverseny

Második levelező forduló

12. évfolyam

1. Bizonyítsd be, hogy a $P(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 14x + 25$ polinom minden nullahelye valós!

2. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges n és k természetes számok esetén léteznek olyan $n_k > n_{k-1} > \dots > n_j \geq j \geq 1$ természetes számok, amelyekre teljesül, hogy

$$n = \binom{n_k}{k} + \binom{n_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{n_j}{j}.$$

3. Adott az ABC háromszög BC , AC és AB oldalain, rendre, az A' , B' és C' pont. Az AA' , BB' és CC' egyenesek a P pontban metszik egymást. Bizonyítsd be:

$$\frac{PC}{PC'} = \frac{B'C}{B'A} + \frac{A'C}{A'B}.$$

4. Határozd meg az összes olyan n természetes számot amelyre a $3^n - 1$ szám osztható a $2^n - 1$ számmal!

Sikeres munkát kívánunk!

A második levelező fordulóban a megoldások beküldésének határideje: **2024. november 1.**

Minden feladatot maximum 25 ponttal értékelünk. A megoldásokat részletesen kell indokolni!

A feladatok megoldásait A4-es formátumú lapon kérjük beadni. Nem szükséges minden feladatot új lapon kezdeni, viszont minden beadott lapon fel kell tüntetni a nevet és az évfolyamot. A feladatmegoldásokat tartalmazó lapokat egy dupla A4-es formátumú borítólapba kell beletenni. A borítólapra kérjük ráírni a következő adatokat: a versenyző neve, évfolyama, e-mail címe, telefonszáma, iskolájának neve és székhelye, a felkészítő tanár neve, telefonszáma és e-mail címe.

A megadott versenyzői és tanári e-mail címre minden forduló után el fogjuk küldeni a versenyző adott fordulóban elért pontszámát.

Minden további értesítés megtalálható lesz az **Ingenium Alapítvány** honlapján: <http://ingenium.rs/> illetve a **Bolyai Gimnázium honlapján**: <http://www.bolyai-zenta.edu.rs>

Postacím: Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium
L e v e l e z ő v e s e n y
24400 Zenta, Posta utca 18.