

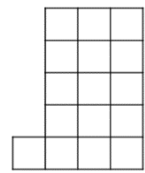


XXII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2024. december 8.

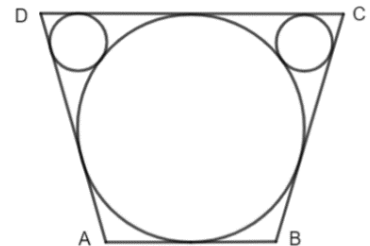
8. évfolyam

1. Az ábrán látható alakzatot darabold fel a rácsvonalak mentén két részre úgy, hogy a két részt egymáshoz illesztve (átfedés és hézag nélkül) négyzetet alkossanak. A részeket tetszőlegesen forgathatod. Keres minél több ilyen feldarabolást.



2. Az n számnak pontosan 2024 pozitív osztója van. Milyen számot kapunk, ha összeszorozzuk az n szám összes osztóját?

3. Az ábrán látható trapéz minden oldalát érinti a 144π területű kör, a 9π területű körök pedig érintik a nagy kört, a hosszabbik alapot és egy-egy szarát. Mekkora a trapéz kerülete?



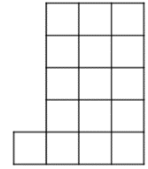
4. Egy fán majmok élnek. Közülük legalább annyi a tolvaj, mint a becsületes. Szeptemberben az egyik tolvaj majom minden nap ellopott a többi tolvajtól egy-egy banánt, és minden harmadik napon minden tolvaj majom ellopott az összes becsületes majomtól egy-egy banánt. Ebben a hónapban összesen 850 banánlopás történt. Hány majom élhet a fán?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

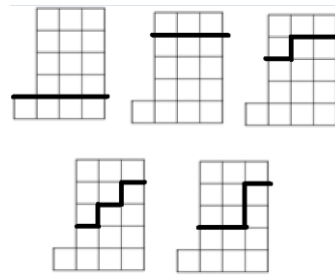
XXII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 8. évfolyam

1. Az ábrán látható alakzatot darabold fel a rácsvonalak mentén két részre úgy, hogy a két részt egymáshoz illesztve (átfedés és hézag nélkül) négyzetet alkossanak. A részeket tetszőlegesen forgathatod. Keres minél több ilyen feldarabolást.



Megoldás. Mivel az alakzat 16 kis négyzetből áll, ezért az átdarabolás után kapott négyzet oldala 4 egység hosszúságú kell, hogy legyen.

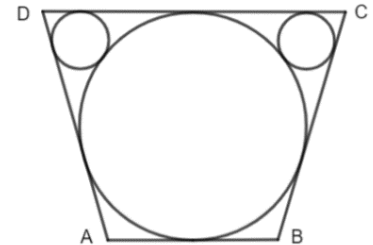
Az ábrán 5 ilyen feldarabolás látható.



2. Az n számnak pontosan 2024 pozitív osztója van. Milyen számot kapunk, ha összeszorozzuk az n szám összes osztóját?

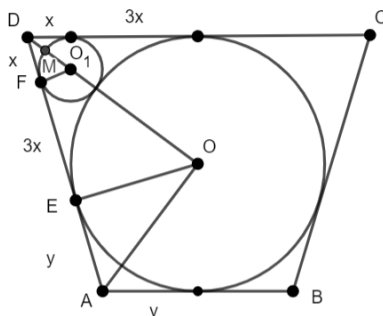
Megoldás. Írjuk fel az osztókat növekvő sorrendben. Ha az elsőt megszorozzuk az utolsóval, akkor n -t kapunk, a másodikat szorozva a 2023.-kal szintén n -t kapunk. Ilyen módon tovább haladva 1012 olyan párhoz jutunk, melyeknek szorzata minden esetben n -nel egyenlő. Innen már könnyen belátható, hogy az 1012 pár szorzatának szorzata n^{1012} , ami a keresett szám.

3. Az ábrán látható trapéz minden oldalát érinti a 144π területű kör, a 9π területű körök pedig érintik a nagy kört, a hosszabbik alapot és egy-egy szárát. Mekkora a trapéz kerülete?



Megoldás. Az $ABCD$ trapéz egyenlő szárú.

Kössük össze a körök sugarait a megfelelő érintési pontokkal, ahogy az ábrán látható. Mivel a körök területe adott, kiszámítható a két sugár hossza is: $OE = 12$ és $O_1F = 3$.



A külső pontból körre húzott érintőszakaszok egybevágóak. Jelöljük x -szel a D -ből a kisebbik körre és y -nal az A pontból a nagyobb körre húzott érintőszakaszokat.

FO_1D_Δ és EOD_Δ hasonlóak, mivel mindkettő derékszögű (érintési pontnál) és van egy közös hegyesszögük is a D csúcsnál. A hasonlóság aránya megegyezik a sugarak hosszának arányával, azaz $1:4$, így $FE = 3x$. Jelöljük DM szakaszt a -val, ekkor a következő arányt írhatjuk fel: $(a+3):(a+18)=1:4$, azaz $a=2$, vagyis a $DFO_1\Delta$ átfogója 5 egység hosszú, innen $x=4$.

Az AOD_{Δ} szintén derékszögű, hiszen hegyesszögeinek összege 90° . Az EO sugár a háromszög magassága, ezért felírható: $4xy = 144$, azaz $xy = 36$. Az x értékét behelyettesítve, megkapjuk, hogy $y = 9$.

Innen már csak be kell helyettesítenünk a kerületképletbe: $K = 16x + 4y = 16 \cdot 4 + 4 \cdot 9 = 100$.

4. Egy fán majmok élnek. Közülük legalább annyi a tolvaj, mint a becsületes. Szeptemberben az egyik tolvaj majom minden nap ellopott a többi tolvajtól egy-egy banánt, és minden harmadik napon minden tolvaj majom ellopott az összes becsületes majomtól egy-egy banánt. Ebben a hónapban összesen 850 banánlopás történt. Hány majom élhet a fán?

Megoldás. Legyen x a tolvajok, y pedig a becsületes majmok száma. Ekkor:

$$30(x-1) + 10xy = 850$$

$$3(x-1) + xy = 85$$

$$x(3+y) = 88$$

A 88-at a következőképpen írhatjuk fel egész számok szorzataként:

$$88 = 1 \cdot 88 = 2 \cdot 44 = 4 \cdot 22 = 8 \cdot 11 = 11 \cdot 8 = 22 \cdot 4 = 44 \cdot 2 = 88 \cdot 1.$$

A 8 lehetőségből három felel meg a feladat feltételeinek, miszerint legalább annyi tolvaj van a majmok között, mint becsületes. Ezek: $x = 8$ és $y = 8$, $x = 11$ és $y = 5$, $x = 22$ és $y = 1$.

Ezek szerint 16 vagy 23 majom élhet a fán.