XXII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2024. december 8.

9. évfolyam

1. Az A és B város közötti autópályán minden kilométeren egy tábla jelzi, hány kilométerre van az A város. Józsi elindul autóval A városból B városba egyenletes sebességgel. Egyszer csak meglát egy kilométerjelző táblát, amin egy kétjegyű szám van. Fél óra múlva egy olyan kilométerjelző táblához ér, amelyen az előbbi számok megfordított sorrendben vannak. Újabb 30 perc múlva olyan táblához ér, amelyen az eddigi két számjegyen kívül még egy nulla is van.
a) Hány km/óra sebességgel halad Józsi?
b) Miután Józsi elhalad a harmadikként megfigyelt kilométerjelző tábla mellett, legkevesebb hány százalékkal kell, hogy megnövelje a sebességét, hogy újabb fél óra múlva egy négyzetszámot tartalmazó kilométerjelző táblához érjen?

2. A $p+pq+pqr=442$ egyenletben a p, q, r számok különböző prímek. Keressük meg az egyenlet összes megoldását!

3. Az ABC háromszögben az A csúcsnál lévő belső szög kétszer akkora, mint a B csúcsnál lévő belső szög. A CM súlyvonal merőleges az A csúcsnál lévő belső szög szögfelező félegyenesére. Legyen D pont az A csúcsból húzott szögfelező félegyenes metszéspontja a BC oldallal.
a) Milyen fajta háromszög a BMD háromszög?
b) Mekkorák az ABC háromszög belső szögei?

4. Egy k-szor n-es sakktábla ($k>1$, $n>1$) mindegyik mezőjén áll egy figura. Egy adott jelre mindegyik figura egy, a saját mezőjével élben szomszédos valamelyik mezőre lép. A lépések után megállapítjuk, hogy minden mezőn áll egy figura.
a) Lehetséges-e ez $k=100$ és $n=101$ esetén?
b) Lehetséges-e ez $k=101$ és $n=101$ esetén?
c) Hány (k,n) számpár esetén lehetséges ez, ha tudjuk, hogy $n+k=2024$?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XXII. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – 9. évfolyam

1. Az A és B város közötti autópályán minden kilométeren egy tábla jelzi, hány kilométerre van az A város. Józsi elindul autóval A városból B városba egyenletes sebességgel. Egyszer csak meglát egy kilométerjelző táblát, amin egy kétjegyű szám van. Fél óra múlva egy olyan kilométerjelző táblához ér, amelyen az előbbi számok megfordított sorrendben vannak. Újabb 30 perc múlva olyan táblához ér, amelyen az eddigi két számjegyen kívül még egy nulla is van.
a) Hány km/óra sebességgel halad Józsi?
b) Miután Józsi elhalad a harmadikként megfigyelt kilométerjelző tábla mellett, legkevesebb hány százalékkal kell, hogy megnövelje a sebességét, hogy újabb fél óra múlva egy négyzetszámot tartalmazó kilométerjelző táblához érjen?

Megoldás.
a) A kilométerjelző táblákon látott három szám sorrendben legyen a, b és c. Az egyenletes sebesség miatt $b-a=c-b$. Jelöljük a különbséget d-vel. A különbség akkor a legnagyobb, ha a számjegyek között is a legnagyobb a különbség: $91-19=72$. A b kétjegyű számhoz hozzáadva a legnagyobb különbséget a kapott háromjegyű szám 200-nál biztosan kisebb, így a keresett számokban szerepelnie kell az 1-es számjegynek. Mivel $a<b$, ezért $a=\overline{1n}$ és $b=\overline{n1}$. Ezzel leszűkítettük a lehetséges megoldások számát annyira, hogy érdemes módszeresen próbálkozni.

a	b	$d=b-a$	$c=b+d$
19	91	72	163
18	81	63	144
17	71	54	125
16	61	45	106
15	51	36	87

Mivel a b és a d oszlopban csökkenő számsorozat van, így az összegükként kapott c oszlopba írt számok is csökkennek, tehát a további próbálkozásoknál már csak 87-nél kisebb számokat kapnánk c-re, azaz c nem lesz háromjegyű. A kapott értékeket megvizsgálva látjuk, hogy csak a 16, 61, 106 számhármas elégíti ki a feladat feltételeit. Ezek szerint Józsi fél óra alatt 45 km-t tett meg, azaz a sebessége 90 km/óra volt.
b) Ha Józsi változatlan sebességgel folytatná az útját, akkor fél óra múlva a $106+45=151$-es kilométertáblánál lenne. A legközelebbi négyzetszám a 169, ehhez viszont $169-106=63$ kilométert kellene megtennie a következő fél órában, azaz $2\cdot 63=126$ km/h sebességgel kellene haladnia, $126-90=36$ km/h-val gyorsabban. Mivel a 90-nek a 40%-a a 36, így 40%-kal kellene növelnie a sebességét.

2. A $p+pq+pqr=442$ egyenletben a p, q, r számok különböző prímek. Keressük meg az egyenlet összes megoldását!

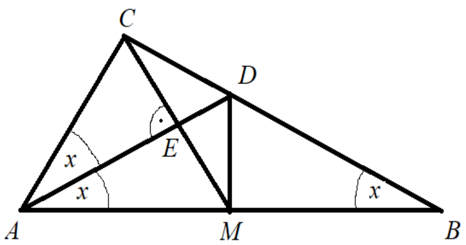
Megoldás. A bal oldal három tagjának paritását figyelve megállapíthatjuk, hogy vagy mindhárom tag páros, vagy pontosan egy tag páros. Minden más esetben a bal oldal páratlan lenne, tehát nem lehetne 442.

I. Mindhárom tag páros. Ebben az esetben mindhárom tagban van páros tényező, tehát $p=2$. Az egyenlet ekkor így alakul: $2+2q+2qr=442$, ahonnan $q(1+r)=220$. A q kizárólag a 220 valamelyik prímtényezője lehet. Mivel a $220=2\cdot2\cdot5\cdot11$, így (a különbözőség miatt) $q=5$ vagy $q=11$. Az első esetben $1+r=44$, tehát $r=43$, ami prímszám, tehát jó megoldás. A második esetben $1+r=20$, tehát $r=19$, ami szintén prímszám, tehát ez is egy jó megoldás.
II. Pontosan egy tag páros, azaz pqr páros, de p és pq nem. Ez csak úgy lehet, ha $r=2$. Ekkor így alakul az egyenlet: $p+pq+2pq=442$, azaz $p(1+3q)=442$. Az előbbiekhez hasonlóan p csak a 442 valamelyik prímtényezője lehet. Mivel $442=2\cdot13\cdot17$, így (mivel $r=2$), p csak 13 vagy 17 lehet. Az első esetben $1+3q=34$, ahonnan $q=11$, ami prímszám, tehát ez is egy jó megoldás. A második esetben $1+3q=26$, vagyis q nem egész, ez nem lehet megoldás.
Összefoglalva: három megoldást kaptunk a p, q és r számokra:

$$(2,5,43),(2,11,19),(13,11,2).$$

3. Az ABC háromszögben az A csúcsnál lévő belső szög kétszer akkora, mint a B csúcsnál lévő belső szög. A CM súlyvonal merőleges az A csúcsnál lévő belső szög szögfelező félegyenesére. Legyen D pont az A csúcsból húzott szögfelező félegyenes metszéspontja a BC oldallal.
a) Milyen fajta háromszög a BMD háromszög?
b) Mekkorák az ABC háromszög belső szögei?

Megoldás. Legyen E pont a súlyvonal és a szögfelező metszéspontja, valamint legyen a B csúcsnál lévő belső szög nagysága x. Ekkor $x=DBA\measuredangle=DAB\measuredangle=DAC\measuredangle$ a feladat feltételeinek értelmében.
a) Az ABD háromszög egyenlő szárú (van két x nagyságú szöge), és így a DM súlyvonala egyben magasságvonala is, tehát $AMD\measuredangle=90°$. Így a BMD háromszög egy derékszögű háromszög.



b) Megállapítjuk, hogy az AME és az ACE háromszögek egybevágók, mert van egy közös oldaluk, és a rajta fekvő két-két szög páronként egyenlő (egyik pár egyenlő x-szel, a másik $90°$-kal). Így $AM=AC$. Az AMD és az ACD háromszögek is egybevágók, mivel az AD közös oldal és az $AM=AC$ oldalak által közbezárt szögek nagysága egyaránt x. A feladat a) részében láttuk, hogy az AMD szög derékszög, így az egybevágóság miatt az ACD is az. Most az ABC háromszög belső szögeire fölírhatjuk, hogy $2x+x+90°=180°$, ahonnan $x=30°$ adódik. A háromszög belső szögeinek mértéke tehát $60°$, $30°$ és $90°$.

4. Egy k-szor n-es sakktábla ($k>1$, $n>1$) mindegyik mezőjén áll egy figura. Egy adott jelre mindegyik figura egy, a saját mezőjével élben szomszédos valamelyik mezőre lép. A lépések után megállapítjuk, hogy minden mezőn áll egy figura.
a) Lehetséges-e ez $k=100$ és $n=101$ esetén?
b) Lehetséges-e ez $k=101$ és $n=101$ esetén?
c) Hány (k,n) számpár esetén lehetséges ez, ha tudjuk, hogy $n+k=2024$?

Megoldás.
a) Igen, lehetséges. Legyen k a sorok, n az oszlopok száma, ekkor 101 darab 100 hosszúságú oszlopunk van. Megmutatjuk, hogy oszloponként külön-külön megoldható, hogy a lépések után minden mezőn álljon figura. Fedjünk le egy oszlopot 50 darab 2×1-es téglalappal átfedés mentesen. Minden figura cseréljen helyet ezekben a téglalapokban. Ha minden oszlopra alkalmazzuk ezt a lépésszabályt, akkor minden mezőn fog állni figura.

b) Nem lehetéges. Ha k és n is páratlan szám, akkor a szorzatuk is páratlan szám, így a szokásos fekete-fehér sakktáblaszínezés esetén valamelyik színű mezőből 1-gyel több van, mint a másikból. A figurák csak úgy léphetnek, hogy a fekete mezőn állók fehérre, a fehér mezőkön állók feketére lépnek. Ha például a fehér színű mezők száma nagyobb, akkor a fekete mezők kisebb száma miatt nem jut minden fehér mezőre figura. Tehát k és n értéke egyszerre nem lehet páratlan, ha a lépések után mindegyik mezőn van figura.

c) Az a) rész általánosításával azt kapjuk, hogy ha k és n valamelyike páros (lehet mindkettő is), akkor előállhat a kívánt helyzet. A b) részben láthattuk, hogy ha k és n két páratlan szám, akkor a lépések után nem állhat minden mezőn figura. Mivel $k+n=2024$ páros szám, így k és n értéke is – a feltételek teljesülése esetén – csak páros szám lehet. A (k,n) számpárokban így k értéke $2,4,6,8,...,2022,2024$ lehet, így a lehetséges megfelelő számpárok száma 1012. Mind az 1012 darab számpár esetén megvalósítható a feladat feltétele, például úgy, hogy minden egyes sorban a páronként szomszédos mezőkön álló figurák helyet cserélnek az adott jelre.